УДК 550.311: 517.984.54

РЭЛЕЕВСКИЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ ПИКЕРИСА. I. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

В.М.Маркушевич

Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук

В этой статье продолжается изучение рэлеевских волн в тех случаях, когда существует простое аналитическое представление для решения уравнений, описывающих эти волны. Выясняются некоторые малоизвестные свойства волн Рэлея. Множество таких сред будет использоваться в дальнейшем для усовершенствования расчетов P-SV колебаний, или теоретических сейсмограмм. Ограничиваясь только пуассоновыми средами, мы описываем некоторое их подмножество, для которого решения уравнений для волн Рэлея выражается в элементарных функциях. Это множество включает однородное полупространство, среды Зволинского и **D**-постоянные среды как частные случаи. С точки зрения представления в форме матричной задачи Штурма-Лиувилля, эти среды характеризуются *равномерно вращающейся* **D**-матрицей (РВD), т.е. ортогональной **D**-матрицей, которая задает угол поворота, линейно зависящий от глубины. Мы приводим решения уравнений для волн Рэлея в случае РВD-сред. Доказывается, что при изменении частоты среда остается в классе РВD-сред. Это свойство позволяет изучать дисперсию рэлеевских волн, не выходя за пределы РВD-сред. Такое исследование проведено в последующей статье.

RAYLEIGH WAVES IN PEKERIS' MEDIA. I. INVESTIGATION OF EQUATIONS AND THEIR SOLUTION

V.M.Markushevich

International Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences

The present study of analytically solvable cases for Rayleigh waves is aimed to clarify their poorly understood properties. Media entering the treatment will be used in future to enhance calculation of P-SV vibrations, or synthetic seismograms. Restricting ourselves to Poissonian media only, we describe their subset admitting of explicit solution to the Rayleigh wave equations in terms of elementary functions. This subset includes homogeneous subspaces, Zvolinskii's, and **D**-constant media as particular cases. In terms of matrix Sturm-Liouville representation, a medium from the subset is characterized by a uniformly rotating **D**-matrix (URD-matrix), i.e., an ortogonal **D**-matrix which defines the angle of rotation linearly varying with depth. We present the solution to the Rayleigh wave equations with URD-matrices. The URD-subset is proved to be invariant under frequency changes. This property allows one to study Rayleigh wave dispertion while remaining in the subset. The study is presented in another paper.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] система уравнений для волн Релея приводилась к матричной задаче Штурма-Лиувилля. Потенциал этой задачи [3] является в общем случае несимметричной матрицей, но выражается через симметричную матрицу $\mathbf{D}$. Матрица $\mathbf{D}$ зависит от параметров Ламе λ, μ и плотности ρ, которые считаются достаточно гладкими функциями глубины x. Частота ω входит в матрицу $\mathbf{D}$ как параметр.

В работах [4, 5] рассматривался частный случай, когда матрица $\mathbf{D}$ постоянна. В них находились λ, μ и ρ, соответствующие постоянной матрице $\mathbf{D}$ и определяющие так называемую $\mathbf{D}$-постоянную упругую среду. Матрица $\mathbf{D}$ может быть постоянной лишь при некотором значении ω, которое называлось характерной частотой. Изучить поведение рэлеевских волн в $\mathbf{D}$-постоянной среде при частотах, отличающихся от характерной, не удавалось. Только при экспоненциально и пропорционально возрастающих λ, μ и ρ, т.е. для сред Зволинского, дисперсионные свойства были исследованы во всем диапазоне частот [6, 7].

В настоящей статье мы исследуем более широкий класс сред по сравнению с $\mathbf{D}$-постоянными, хотя и ограничимся пуассоновыми телами, т.е. случаем $\lambda=\mu$. Предположим, что выполняются соотношения

$$\det \mathbf{D} = C_1, \quad \det \dot{\mathbf{D}} = C_2, \tag{1}$$

где C_1 и C_2 – константы и $\dot{()} \equiv d/dx$. Будем называть этот класс РВD-средами, т.е. средами с *равномерно вращающейся* $\mathbf{D}$-матрицей, или РВD-матрицей. Такое название выбрано в связи с тем, что переменная часть матричного потенциала при условии (1) совпадает с ортогональной матрицей, аргумент которой линейно возрастает с глубиной. Очевидно, что $\mathbf{D}$-постоянные среды принадлежат классу РВD-сред.

Мы выясним структуру РВD-матрицы и зависимость $\lambda = \mu$ и ρ от глубины для таких сред. Окажется, что эти $\mathbf{D}$-матрицы являются периодическими функциями глубины или же их модификациями, получающимися заменой тригонометрических функций на гиперболические или постоянные.

Другим важным свойством множества сред РВD является то, что при неизменных $\lambda = \mu$, ρ и изменяющейся частоте ω свойство (1) сохраняется, хотя значения C_1 и C_2 в соотношении (1) зависят от ω. Поэтому появляется возможность изучить поведение рэлеевских волн во всем диапазоне частот и, в частности, исследовать их дисперсию.

Изучению дисперсии в РВD-средах мы посвятим отдельную статью, а здесь ограничимся тем, что выпишем решение соответствующей матричной задачи Штурма-Лиувилля.

1. СВЯЗЬ МАТРИЦЫ D С ПАРАМЕТРАМИ ЛАМЕ И ПЛОТНОСТЬЮ

Хорошо известны уравнения для волн Рэлея [3]

$$\frac{d}{dx}\left(\mu\frac{dw_1}{dx} - \xi\mu w_2\right) - \xi\lambda\frac{dw_2}{dx} + (\omega^2\rho - \xi^2(\lambda+2\mu))w_1 = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left((\lambda+2\mu)\frac{dw_2}{dx}+\xi\lambda w_1\right)+\xi\mu\frac{dw_1}{dx}+(\omega^2\rho-\xi^2\mu)w_2=0,$$

где w_1, w_2 – трансформанты горизонтальной и вертикальной компонент смещения; ξ и ω – волновое число и круговая частота; λ, μ и ρ – параметры Ламе и плотность, рассматриваемые как функции глубины x. Эти уравнения можно представить в форме Штурма-Лиувилля [3]

$$\ddot{\mathbf{F}}-\xi^2\mathbf{F}=\mathbf{AF},$$

где $\mathbf{F}=(f,\varphi)^{\mathrm{T}}$ – столбец-функция, T обозначает транспонирование,

$$\mathbf{A}=\mathbf{C}\dot{\mathbf{D}}-\mathbf{E}\det\mathbf{D},\quad \dot{()}\equiv d/dx,$$

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}0\,1\\-1\,0\end{pmatrix},\quad \mathbf{E}=\begin{pmatrix}1\,0\\0\,1\end{pmatrix}.$$

Для пуассонова тела матрица $\mathbf{D}$ определяется следующим образом [4]:

$$\mathbf{D}=\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{G},$$

где

$$\Delta=\begin{pmatrix}-\omega^2\mu_0\rho/\mu^2+d & \dot{\mu}/\mu\\ \dot{\mu}/\mu & -2\mu/3\mu_0\end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\dot{\mathbf{G}}=\mathbf{LG},\quad \mathbf{G}(0)=\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix}0&c\\d&0\end{pmatrix},\quad c=\frac{1}{3}\frac{\mu}{\mu_0},\quad d=-\mu_0\left(\ddot{\frac{1}{\mu}}\right). \tag{4}$$

Наоборот, если задана матрица $\mathbf{D}$ и известна частота ω, то $\mu=\lambda$ и ρ можно найти по формулам [8]:

$$(\ddot{\mu^{1/2}})-\frac{3}{4}\left(\det\mathbf{D}\pm2\sqrt{-\det\dot{\mathbf{D}}}\right)\mu^{1/2}=0, \tag{5}$$

$$\omega^2\frac{\rho}{\mu}=3\left(\det\mathbf{D}\pm\sqrt{-\det\dot{\mathbf{D}}}\right). \tag{6}$$

Для того, чтобы в этих выражениях установить знак перед корнем квадратным, в общем случае используется $\det\ddot{\mathbf{D}}$ [8]. Однако в случае PBD-матриц для определения знака достаточно знать $\mu_0=\mu(0)$ и $\rho_0=\rho(0)$.

2. МАТРИЦА D ДЛЯ PBD-ПОЛУПРОСТРАНСТВА

2.1. Задача Коши для вспомогательной матрицы M

Мы выведем матричное уравнение с постоянными коэффициентами, решением которого является матрица **M**, отличающаяся от PBD-матрицы на постоянную; это приведенное ниже уравнение (12) с начальными условиями (13).

Введем обозначения

$$\det \mathbf{D} = \frac{Q^2}{3}, \quad \sqrt{-\det \dot{\mathbf{D}}} = \frac{P^2}{3}, \quad \det \mathbf{D} \pm 2\sqrt{-\det \dot{\mathbf{D}}} = \frac{R^2}{3}, \quad Q^2 \pm 2P^2 = R^2. \tag{7}$$

Если бы выполнялись соотношения $\left(\ddot{\overline{\mu^{1/2}}}\right) - R^2\mu^{1/2}/4 = 0$ и $\omega^2\rho/\mu = R^2$, то матрица **D** была бы постоянной [4]:

$$\mathbf{D}(x) = \mathbf{D}_c,$$

где

$$\mathbf{D}_c = \begin{pmatrix} -(3\sigma_0^2 + R^2)/2 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & -2/3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 = \frac{\dot{\mu}_0}{\mu_0}. \tag{8}$$

Так как в действительности из уравнения (6) следует, что

$$\omega^2 \frac{\rho}{\mu} = Q^2 \pm P^2 = R^2 \mp P^2,$$

то

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_c \pm P^2 \mathbf{G}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \mu_0/\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{G} = \mathbf{D}_c \pm P^2 \mathbf{M}. \tag{9}$$

Оказывается, что матрица **M**, введенная в (9), является решением некоторой задачи Коши для уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Приступим к выводу этого уравнения и начальных условий. Обозначив $\mu_0/\mu = u$, получим

$$\mathbf{M} = \mathbf{G}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{G}. \tag{10}$$

Продифференцируем **M** дважды с учетом (3) и (4)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{G}^{\mathrm{T}} \left[\begin{pmatrix} 0 & d \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{u} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} \right] \mathbf{G} = \\ &= \mathbf{G}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \dot{u} & cu \\ cu & 0 \end{pmatrix} \mathbf{G} = \mathbf{G}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \dot{u} & 1/3 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{G}, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{M}} &= \mathbf{G}^{\mathrm{T}} \left[\begin{pmatrix} 0 & d \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} & 1/3 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddot{u} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{u} & 1/3 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} \right] \mathbf{G} = \\ &= \mathbf{G}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 2d/3 + \ddot{u} & c\dot{u} \\ c\dot{u} & 2c/3 \end{pmatrix} \mathbf{G} = \mathbf{G}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} -d/3 & -\dot{\mu}/3\mu \\ -\dot{\mu}/3\mu & 2\mu/9\mu_0 \end{pmatrix} \mathbf{G} = \\ &= -\frac{1}{3} \mathbf{G}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} d & \dot{\mu}/\mu \\ \dot{\mu}/\mu & -2\mu/3\mu_0 \end{pmatrix} \mathbf{G}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2) следует, что

$$\frac{1}{3}\mathbf{D}+\ddot{\mathbf{M}}=-\frac{1}{3}\omega^2\frac{\rho}{\mu}\mathbf{M}=-\frac{1}{3}(R^2\mp P^2)\mathbf{M}$$

или, с помощью (7) и (9),

$$\ddot{\mathbf{M}}=-\frac{1}{3}[\mathbf{D}+(R^2\mp P^2)\mathbf{M}]=-\frac{1}{3}[\mathbf{D}_c\pm P^2\mathbf{M}+(R^2\mp P^2)\mathbf{M}]=-\frac{1}{3}[\mathbf{D}_c+R^2\mathbf{M}].$$

Следовательно, $\mathbf{M}$ является решением задачи

$$\ddot{\mathbf{M}}+\frac{R^2}{3}\mathbf{M}=-\frac{1}{3}\mathbf{D}_c. \tag{12}$$

Начальные условия этой задачи в точке $x=0$ даются с учетом (3) формулами (10) и (11)

$$\mathbf{M}(0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \dot{\mathbf{M}}(0)=\begin{pmatrix}-\sigma_0&1/3\\1/3&0\end{pmatrix}. \tag{13}$$

2.2. Явный вид осциллирующей части матрицы D

Чтобы представить матрицу $\mathbf{D}$ в явном виде, нужно решить задачу Коши (12), (13). Положим

$$\frac{R^2}{3}=\gamma^2 \tag{14}$$

и пусть $\gamma^2>0$.
Пусть

$$\mathbf{M}=\mathbf{M}_1+\overline{\mathbf{M}},$$

где постоянная матрица $\overline{\mathbf{M}}$ есть частное решение (12), т.е.

$$\overline{\mathbf{M}}=-R^{-2}D_c=\begin{pmatrix}(3\sigma_0^2R^{-2}+1)/2&-\sigma_0R^{-2}\\-\sigma_0R^{-2}&2R^{-2}/3\end{pmatrix}$$

и, следовательно, из (15) имеем

$$\mathbf{M}_1(0)=\mathbf{M}(0)-\overline{\mathbf{M}}=\begin{pmatrix}-(3\sigma_0^2R^{-2}-1)/2&\sigma_0R^{-2}\\\sigma_0R^{-2}&-2R^{-2}/3\end{pmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{M}}_1(0)=\dot{\mathbf{M}}(0)=\begin{pmatrix}-\sigma_0&1/3\\1/3&0\end{pmatrix}.$$

Тогда можно проверить, что

$$\mathbf{M}_1=\begin{pmatrix}-(3\sigma_0^2R^{-2}-1)\cos\gamma x/2-\\ \quad -\sigma_0\sin\gamma x/\gamma & \sigma_0R^{-2}\cos\gamma x+\sin\gamma x/3\gamma\\ \sigma_0R^{-2}\cos\gamma x+\sin\gamma x/3\gamma & -2R^{-2}\cos\gamma x/3\end{pmatrix} \tag{15}$$

и

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \overline{\mathbf{M}} =$$
$$= \begin{pmatrix} \sigma_0^2(1-\cos\gamma x)(1+\cos\gamma x)/4\gamma^2 - & -\sigma_0(1-\cos\gamma x)/3\gamma^2 + \sin\gamma x/3\gamma \\ -\sigma_0 \sin\gamma x/\gamma & \\ & \\ -\sigma_0(1-\cos\gamma x)/3\gamma^2 + \sin\gamma x/3\gamma & -2(1-\cos\gamma x)/9\gamma^2 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

2.3. Случай $\gamma = 0$

Устремив γ к нулю в формуле для $\mathbf{M}$, получим, что $\mathbf{M}$ при $\gamma = 0$ принимает вид

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\sigma_0 x + \sigma_0^2 x^2/4 & -\sigma_0 x^2/6 + x/3 \\ -\sigma_0 x^2/6 + x/3 & x^2/9 \end{pmatrix}$$

и

$$\dot{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} -\sigma_0 + \sigma_0^2 x/2 & -\sigma_0 x/3 + 1/3 \\ -\sigma_0 x/3 + 1/3 & 2x/9 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_c \pm P^2\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -3\sigma_0^2/2 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & -2/3 \end{pmatrix} \pm P^2 \begin{pmatrix} (1-\sigma_0 x/2)^2 & x(1-\sigma_0 x/2)/3 \\ x(1-\sigma_0 x/2)/3 & x^2/9 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Можно убедиться, что

$$\det \mathbf{D} = \frac{2}{3}P^2, \quad \det \dot{\mathbf{D}} = -\frac{P^4}{9},$$

причем условия $\gamma = 0$ и $\rho > 0$ в (6) удовлетворяются только, если $\det \mathbf{D} > 0$ и в (7) выбран знак минус.

3. СТРОЕНИЕ ПУАССОНОВОЙ PBD-СРЕДЫ

Уравнения (5), (6) и значения μ_0, $\dot{\mu}_0$ при условии (7) определяют, как зависят модуль сдвига и плотность от глубины. Из (5) с использованием обозначений (7) немедленно следует, что

$$\mu^{1/2} = \begin{cases} A\exp(Rx/2) + B\exp(-Rx/2), & R^2 > 0, \quad (18а) \\ A\cos(Rx/2) + B\sin(Rx/2), & R^2 < 0, \quad (18б) \\ A + Bx, & R^2 = 0, \quad (18в) \end{cases}$$

а из (6) вытекает, что скорость в такой среде постоянна и

$$\beta^2 = \frac{\mu}{\rho} = \omega^2(Q^2 \pm P^2)^{-1}. \quad (19)$$

Отсюда, в частности, следует, что должно выполняться неравенство

$$Q^2 \pm P^2 > 0. \quad (20)$$

Среды (18а) совпадают с $\mathbf{D}$-постоянными [4]. Среды (18в) мы называем квадратичными, так как в них $\mu = \mu_0(1+\kappa x)^2$, $\rho = \rho_0(1+\kappa x)^2$. Частным случаем этих сред является однородное полупространство. Матрица $\mathbf{D}$ для него получается, если приравнять в (17) к нулю логарифмическую производную μ на поверхности

$$\sigma_0 = \frac{\dot{\mu}}{\mu}(0) = 0.$$

Как в средах (18а), так и в (18в) нужно наложить ограничения на абсолютную величину отрицательных значений σ_0, чтобы избежать обращения μ в ноль на некоторой глубине x. С другой стороны, в полупространстве (18б) μ обращается в нуль обязательно. Поэтому мы должны исключить их из рассмотрения и наложить на среды с постоянными $\det \mathbf{D}$ и $\det \dot{\mathbf{D}}$ более строгое, чем (20), ограничение

$$R^2 = Q^2 \pm 2P^2 > 0.$$

Это не означает, конечно, что среды, задаваемые (18б), лишены физического содержания. Среды, содержащие тонкие водные прослойки, могут моделировать, например, селеопасные структуры, плывуны, подмываемые насыпные дамбы. Волны в таких средах рассматриваются, например, в [9]. В нашем случае, т.е. в случае пуассоновой среды, не только тангенциальное, но и нормальное напряжение обращается в нуль на счетном множестве глубин в средах (18б). Одновременно обращается в нуль плотность, так что скорее это можно рассматривать как предельный случай тонких газовых прослоек. Очевидно, что математический подход к изучению таких сред должен отличаться от используемого в этой статье.

4. ИНВАРИАНТНОСТЬ МНОЖЕСТВА PBD-СРЕД ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТОТЫ

Теорема. Изменение частоты ω не выводит PBD-*матрицу из класса матриц с* $\det \mathbf{D} = const$, $\det \dot{\mathbf{D}} = const$, *хотя значения констант при этом изменяются.*

Доказательство. Из формул (2) и (6) следует, что если

$$\det \mathbf{D}(\omega_1) = \frac{Q_1^2}{3}, \quad \sqrt{-\det \dot{\mathbf{D}}(\omega_1)} = \frac{P_1^2}{3},$$

то при изменении частоты величина $\det \mathbf{D}$ изменяется, но по-прежнему не зависит от x. Из (5) получаем, что и $\det \dot{\mathbf{D}}$ не зависит от x. Так как из (5) и (6) следует, что

$$\frac{\rho}{\mu} = \frac{Q_1^2 \pm P_1^2}{\omega_1^2} = \frac{Q_2^2 \pm P_2^2}{\omega_2^2}$$

и

$$Q_1^2 \pm 2P_1^2 = Q_2^2 \pm 2P_2^2,$$

то

$$\pm P_2^2 = \left(1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right) Q_1^2 \pm \left(2 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right) P_1^2, \tag{21}$$

$$Q_2^2 = \left(-1 + 2\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right) Q_1^2 \pm 2\left(-1 + \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right) P_1^2. \tag{22}$$

Из формул (21) и (22) вытекает утверждение теоремы.

Это свойство позволяет исследовать дисперсию волн Рэлея, оставаясь в классе PBD-сред. В частности, в этом классе возможно исследование дисперсии для D-постоянных сред.

5. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛН РЭЛЕЯ ПРИ $\gamma > 0$

5.1. Явная форма уравнения

Формулы (8), (9) и (16) определяют матрицу $\mathbf{D}$ при $\gamma > 0$. Используем их для того, чтобы упростить систему уравнений для волн Рэлея [3]:

$$\ddot{\mathbf{F}} - \xi^2\mathbf{F} = \mathbf{AF}, \tag{23}$$

где

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{D}} - \mathbf{E}\det\mathbf{D}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $\det\mathbf{D} = Q^2/3$ и $\dot{\mathbf{D}} = \pm P^2\dot{\mathbf{M}}$, то (23) принимает вид

$$\ddot{\mathbf{F}} - \zeta^2\mathbf{F} = \pm P^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{M}}\mathbf{F}, \tag{24}$$

где

$$\zeta^2 = \xi^2 - \frac{Q^2}{3}, \qquad P^2 = 3\sqrt{-\det\dot{\mathbf{D}}}.$$

Для того, чтобы найти $\dot{\mathbf{M}}$, заметим, что из (15) следует

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{M}_1 = \\ &= \frac{1}{3\gamma}\begin{pmatrix} \sigma_0\cos\gamma x/\gamma + \sin\gamma x & -2\cos\gamma x/3\gamma \\ 3\gamma(\sigma_0^2/\gamma^2 - 1)\cos\gamma x/2 + 3\sigma_0\sin\gamma x & -\sigma_0\cos\gamma x/\gamma - \sin\gamma x \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{3\gamma}T\begin{pmatrix} \sin\gamma x & -\cos\gamma x \\ -\cos\gamma x & -\sin\gamma x \end{pmatrix} T^{-1} = -\frac{1}{3\gamma}T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} C\Omega T^{-1}, \end{aligned} \tag{25}$$

где

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3\gamma} & 0 \\ \sigma_0\sqrt{3\gamma/2}/\gamma & \sqrt{3\gamma/2} \end{pmatrix},$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \cos\gamma x & \sin\gamma x \\ -\sin\gamma x & \cos\gamma x \end{pmatrix}.$$

Дифференцируя (25) и подставляя полученное выражение в (24), получим

$$\ddot{\mathbf{F}}_1 - \zeta^2 \mathbf{F}_1 = \pm \frac{P^2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Omega \mathbf{F}_1, \tag{26}$$

где

$$\mathbf{F}_1 = T^{-1} \mathbf{F}.$$

Здесь использованы соотношения

$$\dot{\Omega} = \gamma \mathbf{C} \Omega \ \text{ и } \ \mathbf{C}^2 = -\mathbf{E}. \tag{27}$$

5.2. Сведение уравнения для рэлеевских волн к уравнению с постоянными коэффициентами

Согласно теории Флоке [10] уравнение (26), которое является уравнением с периодическими коэффициентами, приводимо к уравнению с постоянными коэффициентами. Как правило, такое приведение осуществляется лишь численными методами. Однако оказывается, что уравнение (26) можно свести к уравнению с постоянными коэффициентами аналитически. Для приведения используются следующие свойства ортогональной матрицы Ω из (25):

1. $\Omega^{-1}(\gamma) = \Omega(-\gamma)$,
2. $\Omega(\gamma)\Omega(\beta) = \Omega(\gamma + \beta)$,
3. $\dot{\Omega} = \gamma C \Omega = \gamma \Omega C$, (28)
4. $\ddot{\Omega} = -\gamma^2 \Omega$,
5. $\Omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. (5.1)

Будем искать решение уравнения (26), или, что то же самое,

$$\ddot{H} - \zeta^2 H = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Omega H, \tag{29}$$

где $a = \pm P^2/3$, в виде

$$H = \Omega\left(-\frac{\gamma}{2}\right) Y. \tag{30}$$

Подставляя (30) в (29) и используя соотношения 2, 3 и 4 из (28), получаем

$$\Omega\left(-\frac{\gamma}{3}\right)\ddot{Y} - \gamma\Omega\left(-\frac{\gamma}{3}\right)C\dot{Y} - \frac{\gamma^2}{4}\Omega\left(-\frac{\gamma}{3}\right)Y - \zeta^2\Omega\left(-\frac{\gamma}{3}\right)Y = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Omega\left(\frac{\gamma}{2}\right)Y.$$

Умножая это уравнение на $-\gamma\Omega^{-1}/2$ слева и используя соотношения 1 и 5 из (28), получим уравнение

$$\ddot{Y} - \gamma C \dot{Y} - (\frac{\gamma^2}{4} + \zeta^2) Y = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Y, \tag{31}$$

которое является уравнением с постоянными коэффициентами.

5.3. Решение уравнения с постоянными коэффициентами

Характеристическим уравнением для (31) является

$$\det\begin{pmatrix} k^2-(\gamma^2/4+\zeta^2)-a & -\gamma k \\ \gamma k & k^2-(\gamma^2/4+\zeta^2)+a \end{pmatrix}=0$$

или

$$k^4+(\frac{\gamma^2}{2}-2\zeta^2)k^2+(\frac{\gamma^2}{4}+\zeta^2)^2-a^2=0,$$

которое имеет четыре корня

$$k_{1,3}=\mp\sqrt{\zeta^2-\frac{\gamma^2}{4}+\sqrt{-\gamma^2\zeta^2+a^2}},$$

$$k_{2,4}=\mp\sqrt{\zeta^2+\frac{\gamma^2}{4}+\sqrt{-\gamma^2\zeta^2+a^2}},$$

где знак перед корнем совпадает со знаком $\operatorname{Re} k_i$. Так как γ^2, ζ^2 и a связаны с Q^2 и P^2 формулами (14), (24) и (29):

$$\gamma^2=\frac{R^2}{3},\;\; \zeta^2=\xi^2-\frac{Q^2}{3},\;\; a-\pm\frac{P^2}{3},\;\; R^2=Q^2\pm 2P^2,$$

то

$$k_{1,3}=\mp\sqrt{\xi^2-\frac{5Q^2\mp 2P^2}{12}+\sqrt{\frac{-Q^2\pm 2P^2}{3}\xi^2+\frac{(Q^2\pm 2P^2)^2}{9}}},$$

$$k_{2,4}=\mp\sqrt{\xi^2-\frac{5Q^2\mp 2P^2}{12}-\sqrt{\frac{-Q^2\pm 2P^2}{3}\xi^2+\frac{(Q^2\pm 2P^2)^2}{9}}}.$$

Так как из условия убывания энергии на бесконечности следует, что $\operatorname{Re} k_i<0$, то решение (27) представляет собой линейную комбинацию $\exp(k_1x)$ и $\exp(k_2x)$

$$H=\begin{pmatrix} \cos(\gamma x/2) & -\sin(\gamma x/2) \\ \sin(\gamma x/2) & \cos(\gamma x/2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1\exp(k_1x) & A_2\exp(k_2x) \\ B_1\exp(k_1x) & B_2\exp(k_2x) \end{pmatrix}N, \tag{32}$$

где N – постоянная невырожденная матрица,

$$A_{1,2}=\gamma k_{1,2},$$

$$B_{1,2}=k_{1,2}^2-(\frac{\gamma^2}{4}+\zeta^2)-a=-\frac{\gamma^2}{2}-a\pm\sqrt{-\gamma^2\zeta^2+a^2}.$$

Уравнение (32) позволяет исследовать дисперсионные свойства рэлеевских волн в пуассоновых средах с равномерно вращающейся **D**-матрицей. При этом дисперсионные уравнения, полученные в [4–6], должны оказаться частными случаями того уравнения, которое описывает дисперсию в средах Пикериса.

Вывод дисперсионного уравнения в PBD-средах и его исследование описаны в статье [11].

6. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВОЛН РЭЛЕЯ ПРИ $\gamma = 0$

Хотя матрица $\mathbf{D}$ при $\gamma = 0$ определена в (23), нам удобнее будет найти уравнение для рэлеевских волн предельным переходом из (33).

Запишем матрицу $\mathbf{T}$ из (25) в виде

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} & 0 \\ \sigma_0\sqrt{3/2} & \sqrt{3/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\gamma} & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_1 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\gamma} & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma} \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{T_1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} & 0 \\ \sigma_0\sqrt{3/2} & \sqrt{3/2} \end{pmatrix}.$$

Продифференцируем (25) и получим

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{M}} = \frac{1}{3}\mathbf{T}_1 \begin{pmatrix} \cos\gamma x & \gamma^{-1}\sin\gamma x \\ \gamma\sin\gamma x & -\cos\gamma x \end{pmatrix} \mathbf{T}_1^{-1}. \tag{33}$$

Переходя в (33) к пределу при $\gamma \to 0$, получим

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{M}} = \frac{1}{3}\mathbf{T}_1 \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{T}_1^{-1}.$$

Вводя $\mathbf{F}_1 = \mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{F}$, получим матричное уравнение для волн Рэлея в виде

$$\ddot{\mathbf{F}}_1 - \zeta^2\mathbf{F}_1 = -\frac{P^2}{3}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{F}_1.$$

Перепишем его в виде

$$\ddot{\mathbf{F}}_1 - \zeta^2\mathbf{F}_1 = a\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{F}_1$$

и найдем его решение, удовлетворяющее условию убывания на бесконечности:

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} e^{-\nu x} & -(x-\eta/a)e^{-\eta x}/2 \\ 0 & e^{-\eta x} \end{pmatrix} N,$$

где $\nu = \sqrt{\zeta^2 + a}$, $\eta = \sqrt{\zeta^2 - a}$, N – постоянная невырожденная матрица.

7. О РАБОТЕ Х. ПИКЕРИСА ПО РАСПРОСТРАНЕНИЮ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

В работе [12] Пикерис выделяет, в сущности, те же среды (18)–(19), которые рассмотрены здесь. Он также сводит уравнения для волн Рэлея в этих средах к уравнениям с постоянными коэффициентами. При этом его способ сведения значительно более прост и прямолинеен. Вкратце он состоит в следующем. В исходных уравнениях [3]

$$\frac{d}{dx}\left[\mu\left(\frac{dw_1}{dx}-\xi w_2\right)\right]-\xi\mu\frac{dw_2}{dx}+(\omega^2\rho-3\xi^2\mu)w_1=0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[\mu\left(3\frac{dw_2}{dx}+\xi w_1\right)\right]+\xi\mu\frac{dw_1}{dx}+(\omega^2\rho-\xi^2\mu)w_2=0$$

делается подстановка

$$w_1=v_1\mu^{-1/2},\quad w_2=v_2\mu^{-1/2}.$$

Они переходят в

$$\ddot{v}_1+\left(\omega^2\frac{\rho}{\mu}-3\xi^2-\frac{1}{2}\frac{\ddot{\mu}}{\mu}+\frac{1}{4}\left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}\right)^2\right)v_1-2\xi\dot{v}_2=0,$$

$$3\ddot{v}_2+\left(\omega^2\frac{\rho}{\mu}-\xi^2-\frac{3}{2}\frac{\ddot{\mu}}{\mu}+\frac{3}{4}\left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}\right)^2\right)v_2+2\xi\dot{v}_1=0.$$

Положим в них

$$\omega^2\frac{\rho}{\mu}=R^2\pm P^2=const,\quad \frac{\ddot{\mu}}{\mu}-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}\right)^2=\frac{\ddot{\sqrt{\mu}}}{\sqrt{\mu}}=\frac{R^2}{2},$$

тогда эти уравнения превращаются в уравнения с постоянными коэффициентами.

Возникает естественный вопрос, нужно ли было получать тот же результат более сложным образом. Наши аргументы в защиту проведенного исследования таковы.

1. Мы рассматриваем выделенные здесь среды лишь как частный пример применения D-представления для рэлеевских волн. В то же время замечательный метод Пикериса применим только в этом частном случае.

2. Мы характеризуем эти среды с точки зрения поведения **D**-матрицы – равномерного ее вращения.

3. Наш метод совершенно отличается от метода Пикериса. Сравнение этих двух методов полезно для контроля.

4. К сожалению, при исследовании дисперсионных свойств рэлеевских волн в таких средах Пикерис не обратил внимания на ряд важных особенностей. Мы устраняем этот пробел в [11]. Тем не менее, Х. Пикерис, несомненно, является первооткрывателем этих сред. Поэтому в дальнейшем мы предлагаем называть их средами Пикериса (по аналогии со средами Зволинского). При этом иногда мы будем употреблять и термин РВD-среды (среды с равномерно вращающейся **D**-матрицей), показывая место этих сред в D-представлении уравнений для рэлеевских волн.

5. Наконец, мы надеемся использовать эти среды для построения более аккуратного и быстрого, чем метод Томсона-Хаскелла, алгоритма вычисления теоретических сейсмограмм (ср.[13, 14]). В то время, когда появилась работа этого замечательного сейсмолога, потребность в быстром вычислении теоретических сейсмограмм, очевидно, еще не возникла.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (код проекта 94-05-16524). Результаты этого исследования докладывались на семинарах Международного института теории прогноза землетрясений и математической геофизики, а также на семинаре под руководством проф. В.П. Паламодова на механико-математическом факультете МГУ. Всем участникам этих семинаров, и особенно А.Н. Кузнецову и А.В. Ландеру, мы признательны за конструктивную критику.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркушевич В.М.* Вынужденные гармонические колебания рэлеевского типа и матричная задача рассеяния // Математические методы в сейсмологии и геодинамике. М.: Наука, 1986. С.119–135. (Вычисл. сейсмология; Вып. 19).
2. *Маркушевич В.М.* Подстановка Пикериса и некоторые спектральные свойства задачи Рэлея // Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука, 1989. С.117–127. (Вычисл. сейсмология; Вып. 22).
3. *Маркушевич В.М.* Представление матричных потенциалов в уравнении для волн Рэлея через симметричную матрицу // Компьютерный анализ геофизических полей. М.: Наука, 1990. С.227–234. (Вычисл. сейсмология; Вып. 23).
4. *Маркушевич В.М., Цемахман А.С.* D-постоянные среды и рэлеевские волны в них на характерных частотах. I. Пуассоновы среды // Современные методы интерпретации сейсмологических данных. М.: Наука, 1991. С.149–157. (Вычисл. сейсмология; Вып. 24).
5. *Маркушевич В.М., Стеблов Г.М., Цемахман А.С.* D-постоянные среды и рэлеевские волны в них на характерных частотах. II. Непуассоновы среды // Современные методы интерпретации сейсмологических данных. М.: Наука, 1991. С.158–171. (Вычисл. сейсмология; Вып. 24).
6. *Маркушевич В.М., Найленд Э., Цемахман А.С.* Дисперсия волн Рэлея в средах Зволинского. Пуассонов случай // Проблемы прогноза землетрясений и интерпретация сейсмологических данных. М.: Наука, 1992. С.224–237. (Вычисл. сейсмология; Вып. 25).
7. *Маркушевич В.М., Цемахман А.С.* Дисперсия волн Рэлея в средах Зволинского при произвольном коэффициенте Пуассона // Геодинамика и прогноз землетрясений. М.: Наука, 1994. С.226–238. (Вычисл. сейсмология; Вып. 26).
8. *Маркушевич В.М.* Характеризация матрицы **D** в пуассоновом случае. Наст. сб.
9. *Молотков Л.А.* О дисперсионных уравнениях для сложных сред с нежестким контактом на некоторых границах раздела // Математические вопросы теории распространения волн. V. Л.: Наука, 1973. С.103–116.
10. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
11. *Завадский В.В., Киселев С.Г., Макеев О.А., Маркушевич В.М.* Рэлеевские волны в средах Пикериса. II. Дисперсионные свойства // Наст. сб.
12. *Pekeris C.L.* The propagation of Rayleigh waves in heterogeneous media // Physics. Vol.6, April. 1935. P.133–138.
13. *Маркушевич В.М., Стеблов Г.М., Цемахман А.С.* Быстрый алгоритм матричного пропагатора на основе формы Штурма-Лиувилля для уравнений рэлеевских волн. ДАН. 1992. Т.325, N4. С.724–729.
14. *Маркушевич В.М., Стеблов Г.М., Цемахман А.С.* Быстрый метод матричного пропагатора в пуассоновом случае // Геодинамика и прогноз землетрясений. М.: Наука, 1994. С.202–211. (Вычисл. сейсмология; Вып. 26).