

УДК 550.311: 517.984.54

## РЭЛЕЕВСКИЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ ПИКЕРИСА. II. ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА

В.В. Завадский, С.Г. Киселев, О.А. Макеев,  
В.М. Маркушевич

*Международный институт теории прогноза землетрясений  
и математической геофизики Российской академии наук*

В настоящей работе описывается дисперсия рэлеевских волн в средах Пикериса, т.е. в средах с равномерно вращающейся матрицей  $\mathbf{D}$ . Решения уравнений для волн Рэлея в таких средах приведены в предыдущей работе. Множество сред Пикериса включает, как частный случай, однородное полупространство и среды Зволинского. Мы доказываем, что в некоторых средах Пикериса рэлеевские волны не образуются на частотах ниже некоторой частоты отсечки, зависящей от строения среды. При частотах выше частоты отсечки существует единственная рэлеевская мода, если рассматривать идеально упругие среды. С другой стороны, в средах Пикериса с неупругим затуханием могут появиться две моды, а также моды с комплексными волновыми числами.

## RAYLEIGH WAVES IN PEKERIS' MEDIA II. DISPERSION PROPERTIES

V.V. Zavadskii, S.G. Kiselev, O.A. Makeev, and  
V.M. Markushevich

*International Institute of Earthquake Prediction Theory  
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences*

We describe dispersion of Rayleigh waves in Pekeris' media, that is, in media with uniformly rotating  $\mathbf{D}$ -matrix. Solutions of the Rayleigh wave equations for these media were presented earlier. The set of Pekeris' media includes homogeneous half-spaces and Zvolinskii's media as particular cases. We prove that Rayleigh waves do not propagate in a subset of Pekeris' media at frequencies lower than some cutoff frequency. The latter depends on the structure of the medium. A single Rayleigh mode exists in perfectly elastic media at frequencies higher than the cutoff. On the other hand, two modes and modes with complex wavenumbers can exist in Pekeris' media with nonelastic attenuation.

### ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] изучался класс упругих неоднородных полупространств, которые определяются тем, что

- 1) они пуассоновы, т.е.  $\lambda = \mu$ ,
- 2) определители матрицы  $\mathbf{D}$  [2] и ее производной зависят только от частоты, но не от глубины:

$$\det \mathbf{D} = \frac{Q^2}{3}, \quad \sqrt{-\det \mathbf{D}} = \frac{P^2}{3}, \quad (1)$$

где  $Q$  и  $P$  – константы при постоянной частоте. Как и в [1], здесь  $\dot{f} \equiv df/dx$ . При описании этих сред важную роль играет величина

$$Q^2 \pm 2P^2 = R^2. \quad (2)$$

Оказалось, что если  $R^2 > 0$ , то рассматриваемые среды совпадают с пуассоновыми  $\mathbf{D}$ -постоянными средами [3]. Если  $R^2 = 0$ , то среды оказываются квадратичными:

$$\mu = \mu_0(1 + kx)^2, \quad \rho = \rho_0(1 + kx)^2. \quad (3)$$

Они тоже возникали в [3] как частный случай. При  $k = 0$  выражение (3) описывает однородное полупространство.

Вообще говоря [3], на параметры как  $\mathbf{D}$ -постоянных, так и квадратичных сред, накладываются ограничения для того, чтобы выполнялись условия

$$\mu > 0, \quad \rho > 0, \quad 0 \leq x < \infty.$$

В частности, в (3) должно быть  $k \geq 0$ .

С другой стороны, если  $R^2 < 0$ , то в соответствующих средах  $\mu$  обязательно обращается в нуль. Такие среды можно рассматривать как пачку неоднородных твердых слоев, разделенных бесконечно тонкими газовыми прослойками. Их изучение отложено на будущее.

В предлагаемой статье исследуются дисперсионные свойства рэлеевских волн в  $\mathbf{D}$ -постоянных и квадратичных средах.

Заметим (ср. [1, п. 7]), что к исследованию этих сред впервые пришел Х. Пикерис [4]. Однако, описывая дисперсионные свойства рэлеевских волн в таких средах, он пропустил ряд интересных особенностей. Заметим также, что среды Зволинского [5, 6] в пуассоновом случае являются подмножеством  $\mathbf{D}$ -постоянных сред.

В основном в этой работе будут рассматриваться рэлеевские волны в  $\mathbf{D}$ -постоянных средах, т.е. при  $R^2 > 0$ . Волнам в квадратичных средах ( $R^2 = 0$ ) посвящены разд. 5, 6 этой статьи.

## 1. РЕШЕНИЕ МАТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Решение системы Штурма-Лиувилля [2] для  $D$ -постоянной среды было получено в [1] в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{T} \tilde{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma x/2) & -\sin(\gamma x/2) \\ \sin(\gamma x/2) & \cos(\gamma x/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_+ & A_- \\ B_+ & B_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(k_+ x) & 0 \\ 0 & \exp(k_- x) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sqrt{2/(3\gamma)} & 0 \\ \sigma_0/\gamma\sqrt{3\gamma/2} & \sqrt{3\gamma/2} \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 = \frac{\dot{\mu}_0}{\mu_0}, \quad \gamma = \frac{R}{\sqrt{3}},$$

$$k_{\pm} = -R\sqrt{W_{\pm}}, \quad A_{\pm} = \gamma k_{\pm} = -\frac{R^2}{\sqrt{3}}\sqrt{W_{\pm}}, \quad B_{\pm} = \pm R^2 q_{\pm}. \quad (5)$$

Здесь введены безразмерные величины (ср. [5])

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{R^2} \sqrt{-\gamma^2 \left( \xi^2 - \frac{R^2}{3} \right) + \frac{P^4}{9}} = \frac{1}{R^2} \sqrt{-\gamma^2 \zeta^2 + a^2}, \\ t &= \frac{\omega^2}{R^2 b^2}, \quad p_{\pm} = \alpha \mp \frac{t}{3} \pm \frac{1}{6}, \quad q_{\pm} = \alpha \pm \frac{t}{3} \mp \frac{1}{2}, \quad W_{\pm} = -3p_{\pm}q_{\pm}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\xi$  – волновое число,  $\omega$  – круговая частота,  $b$  – скорость сдвиговых волн,

$$b^{-2} = \frac{\rho}{\mu} = \frac{Q^2 \pm P^2}{\omega^2}. \quad (7)$$

$$a = \pm \frac{P^2}{3}.$$

$$\zeta^2 = \xi^2 - \frac{R^2}{3} \quad (8)$$

и  $Q, P, R$  определены в (1), (2).

Знак при  $P^2$  в (7) совпадает со знаком в (2). Заметим также, что в (7) числитель зависит от частоты таким образом, что  $\omega^2$  сокращается. Напротив,  $R^2$  в (2) не зависит от  $\omega$  [1]; если заданы  $\mu_0 = \mu(0)$  и  $\dot{\mu}_0 = \dot{\mu}(0)$ , то  $b$  и  $R^2$  определяют строение D-постоянной среды [1]. При этом  $\mu$  является решением уравнения

$$(\mu^{1/2}) - \frac{R^2}{4} \mu^{1/2} = 0,$$

а  $\rho$  находится из (7).

## 2. КРАЕВОЕ УСЛОВИЕ НА ПОВЕРХНОСТИ

Краевым условием на поверхности [3] является

$$\det(\dot{\mathbf{F}} + \Theta \mathbf{F}) = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad (9)$$

где

$$\Theta = \begin{pmatrix} -\dot{\mu}/\mu & 1/6 \\ 2\xi^2 - \omega^2 \rho/\mu - \mu(\mu^{-1}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Такое условие является общим: оно справедливо для любых пуассоновых сред. Мы выпишем это условие для сред Пикериса. Для таких сред в работе [7] получено соотношение

$$\frac{3}{2} \sigma_0^2 - \mu_0 \left( \frac{\dot{\mu}}{\mu} \right)_0 = \frac{1}{2} R^2 = \frac{1}{2} (Q^2 \pm 2P^2).$$

С помощью этого соотношения и (7) получаем

$$\omega^2 \frac{\rho}{\mu} = Q^2 \pm P^2,$$

и матрица  $\Theta$  преобразуется к виду

$$\Theta = \begin{pmatrix} -\sigma_0 & 1/6 \\ 2\xi^2 - 3\sigma_0^2/4 - Q^2/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из (4) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(0) &= \mathbf{T} \begin{pmatrix} A_+ & A_- \\ B_+ & B_- \end{pmatrix}, \\ \dot{\mathbf{F}}(0) &= \mathbf{T} \left( -\frac{\gamma}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_+ & A_- \\ B_+ & B_- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_+ & A_- \\ B_+ & B_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_+ & 0 \\ 0 & k_- \end{pmatrix} \right) = \\ &= \mathbf{T} \begin{pmatrix} -\gamma B_+/2 + A_+ k_+ & -\gamma B_-/2 + A_- k_- \\ \gamma A_+/2 + B_+ k_+ & \gamma A_-/2 + B_- k_- \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Далее удобно вместо  $\Theta$  ввести  $\tilde{\Theta}$  по формуле

$$\tilde{\Theta} = \mathbf{T}^{-1} \Theta \mathbf{T} = \begin{pmatrix} -3\sigma_0/4 & \gamma/4 \\ -\sigma_0^2/(4\gamma) + 4\xi^2/(3\gamma) - Q^2/(3\gamma) & -\sigma_0/4 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Из соотношений (6), (7) и (2)

$$R^2 t = \frac{w^2}{b^2} = Q^2 \pm P^2 \quad \text{и} \quad R^2 = Q^2 \pm 2P^2,$$

и мы находим, что

$$\frac{Q^2}{R^2} = 2t - 1. \quad (12)$$

Записывая (9) в виде

$$\det(\mathbf{T}^{-1} \dot{\mathbf{F}}(0) + \tilde{\Theta} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{F}(0)) = 0$$

и подставляя сюда (10), (11) и (12), получаем дисперсионное уравнение

$$\det \mathbf{M} = 0, \quad (13)$$

где

$$\mathbf{M} = \frac{1}{R^3} \left[ \begin{pmatrix} -\gamma B_+/2 + A_+ k_+ & -\gamma B_-/2 + A_- k_- \\ \gamma A_+/2 + B_+ k_+ & \gamma A_-/2 + B_- k_- \end{pmatrix} + \tilde{\Theta} \begin{pmatrix} A_+ & A_0 \\ B_+ & B_- \end{pmatrix} \right]$$

или, с учетом (5)

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} -\sqrt{3} q_+ (1/6 + p_+) & \sqrt{3} q_- (1/t - p_-) \\ -(1/6 + q_+) \sqrt{W_+} & (-1/6 + q_-) \sqrt{W_-} \end{pmatrix} + \\ &+ \mathbf{S} \begin{pmatrix} -1\sqrt{W_+/3} & -1\sqrt{W_-/3} \\ q_+ & -q_- \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -3\varphi/4 & 1(4\sqrt{3}) \\ -\sqrt{3}\varphi^2/4 + 4(t^2/3 - 3\alpha^2)\sqrt{3} - (2t - 1)/\sqrt{3} & -\varphi/4 \end{pmatrix}$$

и

$$\varphi \equiv \frac{\sigma_0}{R}. \quad (15)$$

### 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ В МНОГОЧЛЕН

Для того чтобы определить дисперсию волн Рэлея, нам нужно найти из (13)  $\xi$  как функцию  $\omega$  на физическом листе римановой поверхности для уравнения (13). Физический лист соответствует решениям, убывающим на бесконечности. При вычислении дисперсии употребим способ, который был использован еще Рэлеем, мы применим его в [3, 5–6]. Этот способ состоит в сведении дисперсионного уравнения к многочлену последовательными возведениями в квадрат. Такой многочлен содержит корни на всех листах римановой поверхности, поэтому потребуется выделить корни на физическом листе.

Из краевого условия на бесконечности [3]  $\mathbf{F} \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$  и из (5) следует, что  $\operatorname{Re}\sqrt{W_{\pm}} > 0$ . Последнее условие определяет физический лист римановой поверхности, связанной с функцией

$$\det \mathbf{M} = f(\alpha, t).$$

Этот лист мы будем обозначать символом  $(++)$ . Другие листы получаются,

$$\begin{array}{lll} \text{если } \operatorname{Re}\sqrt{W_{\pm}} > 0, & \operatorname{Re}\sqrt{W_{-}} < 0, & \text{лист } (+-), \\ \text{если } \operatorname{Re}\sqrt{W_{+}} < 0, & \operatorname{Re}\sqrt{W_{-}} > 0, & \text{лист } (-+), \\ \text{если } \operatorname{Re}\sqrt{W_{+}} < 0, & \operatorname{Re}\sqrt{W_{-}} < 0, & \text{лист } (--). \end{array}$$

Применим теперь метод Рэлея для того, чтобы получить из (14) такой многочлен, нули которого были бы объединением нулей уравнения

$$\det \mathbf{M} = 0$$

на всех листах этой римановой поверхности. Перепишем (14) в виде

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}q_+(1/6 - p_+) - & \sqrt{3}q_-(1/6 - p_-) - \\ -s_{11}\sqrt{W_+}/\sqrt{3} + s_{12}q_+ & -s_{11}\sqrt{W_-}/\sqrt{3} - s_{12}q_- \\ -(1/6 + q_+)\sqrt{W_+} - & (-1/6 + q_-)\sqrt{W_-} - \\ -s_{21}\sqrt{W_+}/\sqrt{3} + s_{22}q_+ & -s_{21}\sqrt{W_-}/\sqrt{3} - s_{22}q_- \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Определитель этой матрицы записывается в виде

$$\det \mathbf{M} = P_1(\alpha, t) + P_2(\alpha, t)\sqrt{W_+} + P_3(\alpha, t)\sqrt{W_-} + P_4(\alpha, t)\sqrt{W_+W_-},$$

где  $P_i(\alpha, t)$ ,  $i = 1, \dots, 4$  – многочлен от  $\alpha$  и  $t$ .

Приравняв определитель к нулю и записав полученное выражение в виде

$$-(P_1 + P_4\sqrt{W_+W_-}) = P_2\sqrt{W_+} + P_3\sqrt{W_-},$$

возведем обе части полученного выражения в квадрат. Перегруппировав члены, получим

$$P_1^2 + P_4^2W_+W_- - P_2^2W_+ - P_3^2W_- = 2(P_2P_3 - P_1P_4)\sqrt{W_+W_-}.$$

Возведя обе части этого выражения в квадрат и перенеся члены в одну сторону, получим многочлен, который должен быть равен нулю.

Этот многочлен удобно записать, если ввести вместо  $\varkappa$  новую переменную  $y$ , в виде (ср. [5]):

$$y = \varkappa^2 - \frac{t^2}{9} = -\frac{1}{3} \frac{\xi^2}{R^2}. \quad (17)$$

Кроме того, оказывается, что этот многочлен содержит только четные степени  $\varphi$ . Область изменения  $\varphi$  [3]:  $-1 < \varphi < \infty$ . Поэтому введем параметр  $\alpha$ :  $\alpha = \varphi^2 - 1$ . Тогда уравнение, нули которого совпадают с нулями дисперсионного уравнения на всех четырех листах римановой поверхности, принимает вид

$$\begin{aligned} y^4 + \left(\frac{5}{8}\alpha + t\right)y^3 + \left[-\frac{1}{32}\alpha + \frac{21}{256}\alpha^2 + \left(-\frac{1}{24} + \frac{17}{48}\alpha\right)t + \frac{1}{3}t^2\right]y^2 + \\ + [-3\alpha^2 + 12\alpha^3 + (-16\alpha + 88\alpha^2)t + (-16 + 192\alpha)t^2 + 128t^3] \frac{y}{3072} + \\ + \frac{(3\alpha^2 + 16\alpha t + 16t^2)^2}{147456} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Вывод выражения (18) требует простых по сути, но очень громоздких алгебраических преобразований. Они выполнялись программой "Математика" С. Вольфрама [8].

#### 4. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Уравнение (18) для сред Зволинского [5] и для **D**-постоянных сред на характерных частотах [3], которые соответствуют  $t = 1$  (см. (6)), должно совпадать с теми уравнениями, которые рассматривались в указанных работах. Для сред Зволинского  $\varphi = 1$  и, следовательно,  $\alpha = 0$ . Если положить  $\alpha = 0$ , то (18) переходит в

$$y^4 + 3sy^3 + 3s \left(s - \frac{1}{24}\right)y^2 + \frac{9}{8}s^2 \left(s - \frac{1}{24}\right)y + \frac{9}{64}s^4 = 0,$$

совпадающее с уравнением из [5], где  $3s = t$ .

Несколько сложнее сопоставить (18) при  $t = 1$ , которое согласно (6) соответствует характерной частоте, с дисперсионным уравнением из [3]:

$$2(1-m)\eta^2 - 3R(1+m)\eta + \frac{R^2}{3} \frac{2m^2 + 5m + 2}{1-m} = 0,$$

где

$$\eta = \sqrt{\xi^2 - \frac{R^2}{3}}.$$

Так как  $m = \frac{\varphi + 1}{\varphi - 1}$ ,

то последнее уравнение эквивалентно следующему:

$$\eta^2 + \frac{3}{2}R\varphi\eta + \frac{R^2}{24}(9\varphi^2 - 1) = 0.$$

Переходя к переменной  $y$  при помощи соотношения (17)

$$y = -\frac{1}{3} \frac{\xi^2}{R^2} = -\frac{1}{3} \left( \frac{\eta^2}{R^2} + \frac{1}{3} \right)$$

или

$$\frac{\eta}{R} = \sqrt{-3\left(y + \frac{1}{9}\right)}$$

и избавляясь возведением в квадрат от появляющегося при этом корня, получаем

$$y^2 + \frac{1}{4}(2\varphi^2 + 1)y + \frac{1}{64}\varphi^4 + \frac{5}{96}\varphi^2 + \frac{1}{64} = 0.$$

Левая часть этого соотношения совпадает с первым из многочленов – сомножителей в произведении, в которое превращается (27) при  $t = 1$ :

$$\frac{1}{256} [192y^2 + (48 + 96\varphi^2)y + (3 + 10\varphi^2 + 3\varphi^4)] \times \\ \times [768y^2 + (96 + 96\varphi^2)y + (3 + 10\varphi^2 + 3\varphi^4)] = 0.$$

Отметим еще один случай, когда (18) сильно упрощается: случай  $\varphi = 0$  ( $\alpha = -1$ ). Уравнение (18) принимает вид

$$\left[ y^2 + \left( -\frac{5}{16} + \frac{1}{2}t \right) y + \frac{1}{24} \left( t^2 - t + \frac{3}{16} \right) \right]^2 = 0.$$

## 5. ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА РЭЛЕЕВСКИХ ВОЛН ПРИ $\gamma \neq 0$

С помощью уравнений (18) и (14) или (14') мы можем теперь описать дисперсию волн Рэлея в средах Пикериса. Основным ее свойством является существование области низких частот, в которой волны Рэлея не образуются. Исследование дисперсии сводится к заданию  $\alpha$  и  $t$  и определению корней уравнения (18). Эти корни подставляются в четыре варианта (14) или (16), соответствующие четырем листам римановой поверхности. Таким образом, устанавливается, какому листу принадлежит корень. Выясняется зависимость корней от  $t$  на физическом листе ( $++$ ). По формулам (6) и (17) эту зависимость можно пересчитать в дисперсию, т.е. найти функцию  $\xi(\omega)$ .

Это исследование облегчается следующим очевидным свойством (14) или (16).

*Утверждение.* Лист  $(--)$  римановой поверхности для (14) при  $(+\varphi)$  совпадает с листом  $(++)$  римановой поверхности для (14) при  $(-\varphi)$ .

Как и в [5], мы сузим физический лист, потребовав, чтобы напряжение стремилось к нулю при  $x \rightarrow \infty$ . Это условие выполняется, если

$$\operatorname{Re}\sqrt{W_{\pm}} > \frac{1}{2}, \quad (19)$$

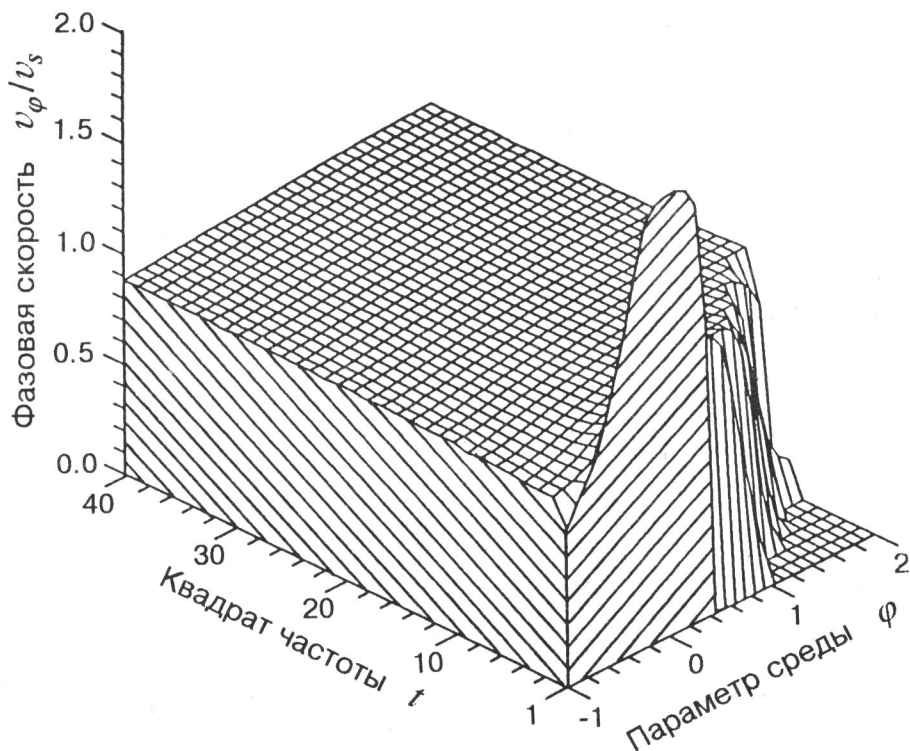


Рис. 1. Зависимость фазовой скорости рэлеевской моды от частоты  $t$  и параметра  $\varphi$ .

По вертикали отложено отношение фазовой скорости рэлеевской волны  $v_\varphi$  к скорости сдвиговых волн  $v_s$ . Нормированная частота  $\sqrt{t}$  определена как отношение частоты  $\omega$  к произведению скорости сдвиговых волн  $v_\varphi$  на характерный размер среды  $R$  (см. (6)). Параметр  $\varphi$  является отношением логарифмической производной  $\mu$  у поверхности к характерному размеру  $R$  (см. (15)). График показывает, что рэлеевская волна возникает лишь когда частота  $\sqrt{t}$  превышает некоторую частоту отсечки  $\sqrt{t_c}$ . С ростом частоты фазовая скорость стремится к константе

а чтобы поток энергии, переносимой вдоль поверхности рэлеевской модой, был конечен, нужно лишь

$$\operatorname{Re}\sqrt{W_\pm} > 0. \quad (20)$$

На рис. 1 приводится зависимость фазовой скорости рэлеевской моды, нормированной к скорости сдвиговых волн, в средах Пикериса от  $\varphi$  и  $t$ :  $v_{\text{норм}} = \sqrt{-t/(3y)} = \omega/(b\xi) = v_\varphi/v_s$ . Так как  $t$  является квадратом нормированной частоты, то рис. 1 отчетливо показывает, что рэлеевская волна возникает лишь при частоте, превышающей некоторую частоту отсечки, которая соответствует  $t = t_c$ . Последняя возрастает с увеличением  $\varphi$ , при  $\varphi = -1$  она равна нулю (рис. 2).



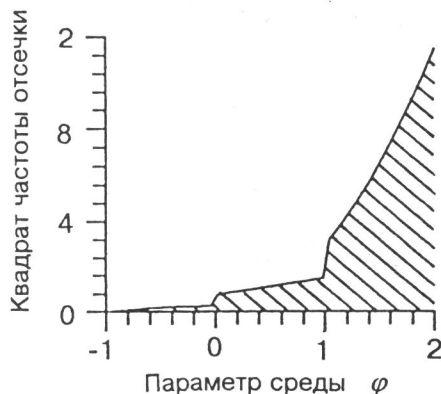


Рис. 2. Зависимость частоты отсечки рэлеевской моды от параметра среды  $\varphi$ . Ниже частоты отсечки  $\sqrt{t_s}$  (заштрихованная область) рэлеевская волна не возникает

## 6. ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА РЭЛЕЕВСКИХ ВОЛН ПРИ $\gamma = 0$

Исследуя дисперсию волн Рэля в средах Пикериса при  $\gamma = 0$ , мы следуем той же схеме, что и при  $\gamma \neq 0$ : преобразуем дисперсионное уравнение в многочлен и выделим корни этого многочлена, соответствующие физическому листу поверхности Римана. Отметим, что в этом случае модуль сдвига растет при больших  $x$  лишь как  $x^2$ , а не экспоненциально, как при  $\gamma \neq 0$ . Поэтому принадлежность физическому листу в этом случае одновременно означает стремление к нулю напряжений при  $x \rightarrow \infty$ . Область низких частот, в которой рэлеевские волны не существуют, сохраняется и при  $\gamma = 0$ . Положим

$$\mu = \mu_0(1 + kx)^2, \quad \rho = \rho_0(1 + kx)^2.$$

Введем величину (ср. [1])  $P^2$  так, чтобы  $\omega^2 \rho_0 / \mu_0 = P^2$ . Тогда  $\det \mathbf{D} = 2P^2/3$ ,  $\det \dot{\mathbf{D}} = -P^4/9$ .

Обозначим

$$\nu = \sqrt{\xi^2 - P^2}, \quad \eta = \sqrt{\xi^2 - \frac{P^2}{3}}, \quad a = -\frac{P^2}{3}. \quad (21)$$

Тогда решение системы Штурма-Лиувилля записывается в виде [1]

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}_1 \mathbf{F}_1,$$

где

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} e^{-\nu x} & -(x - \eta/a)e^{-\eta x/2} \\ 0 & e^{-\eta x} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} & 0 \\ \sigma_0 \sqrt{3/2} & \sqrt{3/2} \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 = \frac{\dot{\mu}}{\mu}(0) = 2k.$$

Матрица  $\Theta$  в краевом условии (9) принимает вид

$$\Theta = \begin{pmatrix} -2k & 1/6 \\ 2\xi^2 - P^2 - 6k^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Само краевое условие (9) переходит в

$$\det(\dot{\mathbf{F}}_1 + \Theta_1 \mathbf{F}_1) = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad (22)$$

где

$$\Theta_1 = \mathbf{T}_1^{-1} \Theta \mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} -3k/2 & 1/4 \\ 2(2\xi^2 - P^2)/3 - k^2 & -k/2 \end{pmatrix}.$$

Так как при  $x = 0$

$$\dot{\mathbf{F}}_1 + \Theta_1 \mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} -\nu & -\zeta^2/(2a) \\ 0 & -\eta \end{pmatrix} + \Theta_1 \begin{pmatrix} 1 & \eta/(2a) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $\zeta^2$  определено в (8), то с учетом (21) получаем, что (22) эквивалентно

$$\det \begin{pmatrix} -\nu - 3k/2 & 3((2\xi^2 - P^2) + 3\eta k)/(4P^2) \\ 2(2\xi^2 - P^2)/3 - k^2 & -2\xi^2 \eta/P^2 - k/2 + 3\eta k^2/(2P^2) \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{2P^2} [-(2\xi^2 - P^2)^2 + 4\xi^2 \eta \nu + (3\eta + \nu)P^2 k + 3(\xi^2 - \eta \nu)k^2] = 0. \quad (23)$$

Рассматривая последнее уравнение на всех листах римановой поверхности и избавляясь в нем от  $\eta$  и  $\nu$  с помощью возведения в квадрат, получаем следующий многочлен:

$$64z^4 - 96(5k^2 + 2P^2)z^3 + 12(63k^4 + 68k^2 P^2 + 16P^4)z^2 - \\ - 72(k^2 + P^2)(2k^2 + P^2)(3k^2 + P^2)z + 9(k^2 + P^2)^2(3k^2 + P^2)^2 = 0, \quad (24)$$

где  $z = \xi^2$ .

(Уравнение (24) получено А.С. Цемахманом с помощью программы "Математика" [8].) Естественно уравнения (23) и (24) переписать в безразмерном виде, введя

$$v = \frac{\xi^2}{P^2} = \frac{z}{P^2} \quad \text{и} \quad s = \frac{k}{P}. \quad (25)$$

Полагая также

$$\nu_1 = \frac{\nu}{P} = \sqrt{v - 1},$$

$$\eta_1 = \frac{\eta}{P} = \sqrt{v - \frac{1}{3}},$$

перепишем (23) в виде

$$-(2v - 1)^2 + 4v\eta_1\nu_1 + (3\eta_1 + \nu_1)s + 3(v - \eta_1\nu_1)s^2 = 0 \quad (26)$$

и (24) в виде

$$64v^4 - 96(5s^2 + 2)v^3 + 12(63s^4 + 68s^2 + 16)v^2 - \\ - 72(s^2 + 1)(2s^2 + 1)(3s^2 + 1)v + 9(s^2 + 1)^2(3s^2 + 1)^2 = 0. \quad (27)$$

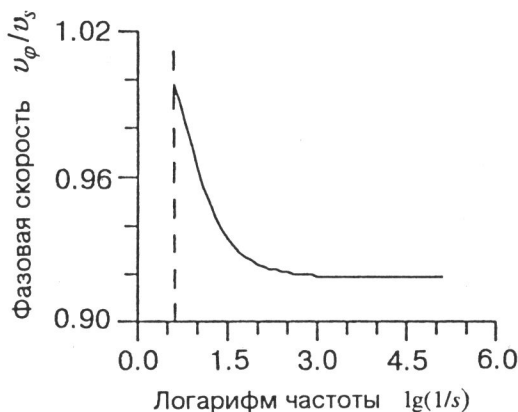


Рис. 3. Дисперсия рэлеевской моды для среды с линейной зависимостью  $\sqrt{\mu}$  от глубины. Смысл отложенной по вертикали переменной объяснен в подписи к рис. 1. Нормированная частота  $1/\sqrt{s}$  определена как отношение частоты  $\omega$  к произведению скорости сдвиговых волн  $v_s$  на характерный размер среды  $k$  (см. (25)). Штриховая линия указывает частоту отсечки

Решая (27) и выделяя из этого решения корни, лежащие на физическом листе, т.е. при  $\text{Re } \nu_1 > 0$ ,  $\text{Re } \eta_1 > 0$ , получаем при различных  $s = b\dot{\mu}(0)/(2\omega\mu(0))$  фазовые скорости, приведенные на рис. 3. Видно, что и в этом случае рэлеевские моды отсутствуют при низких частотах, т.е. при малых  $P$ , или больших  $s$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, нам удалось изучить дисперсионные свойства рэлеевских волн в достаточно широком классе упругих пуассоновых полупространств, который охватывает классический рэлеевский случай однородного полупространства, среды Зволинского и D-постоянные среды. Общим дисперсионным свойством для сред из этого класса, т.е. класса сред Пикериса, является то, что волны Рэля возникают в них, если частота возбуждения выше некоторой частоты отсечки. Исключениями из этого правила являются только однородное полупространство и среда, соответствующая  $\varphi = -1$ , где при любой частоте возбуждается единственная мода. В остальных средах выше частоты отсечки также существует единственная мода, если помимо конечности потока энергии, передаваемой рэлеевскими модами, потребовать стремление к нулю напряжений на бесконечности.

Мы обсуждали в [5], что условие убывания напряжений на бесконечности (19) должно выполняться, если рассматривать волны Рэля в идеально упругих телах, как делается в этой работе. С другой стороны, при напряжениях, превышающих определенный порог, должны проявляться механизмы поглощения энергии: пластичность, упругий гистерезис и т.д. Поэтому в реальных экспериментах, как нам кажется, можно ожидать появления мод, принадлежащих более широкому физическому листу, который определяется условием (20). Эти моды должны экспоненциально затухать при удалении от источника вдоль поверхности в отличие от обычных рэлеевских мод, амплитуда которых убывает обратно пропорционально квадратному корню из расстояния вдоль поверхности. Энергия, переносимая такими модами, должна расходоваться на неупругие эффекты.

На рис. 4 показано поведение рэлеевских мод на расширенном физическом листе.

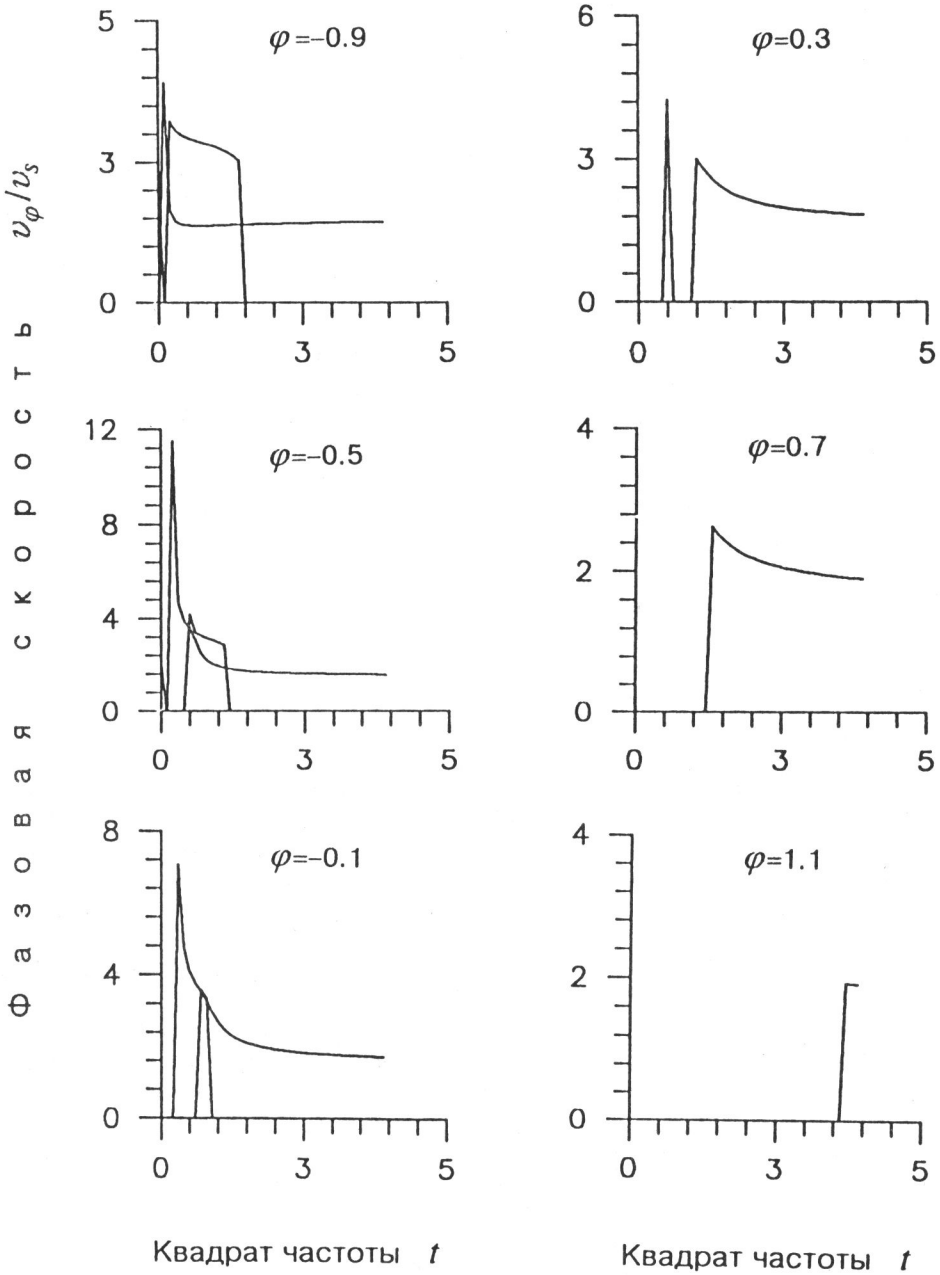


Рис. 4. Дисперсия рэлеевских мод на расширенном физическом листе. Каждый график соответствует фиксированному значению параметра  $\varphi$ . Отрицательным значениям  $\varphi$  соответствуют две рэлеевские моды

Ведут себя они более сложно, чем на листе, задаваемом (19), где существует только одна мода. Здесь их может быть две и в некоторых случаях им соответствуют не вещественные, а комплексные волновые числа.

Заметим также, что в статье [4] Х. Пикерис вообще не исследует поведение собственных функций при  $x \rightarrow \infty$ . Это, возможно, объясняется тем, что его интересовала преимущественно высокочастотная асимптотика, когда все колебания сосредоточены у поверхности. Соответственно основным критерием правильности найденного решения Пикерис считает стремление фазовой скорости с ростом частоты к значению, соответствующему однородному полупространству. Параметры этого полупространства полагаются равными параметрам на поверхности неоднородного полупространства. Это, в частности, объясняет, почему во всех случаях, кроме  $\gamma = 0$ , Пикерис не обращает внимания на исчезновение рэлеевской моды на низких частотах. Однако при  $\gamma = 0$  Пикерис обнаруживает пропадание моды по виду дисперсионного уравнения (26). Это уравнение является квадратичным относительно  $s$ , которое по физическому смыслу должно быть положительным. То, что это требование выполняется лишь при малых  $s$ , позволило Х. Пикерису заключить, что рэлеевская мода при низких частотах не существует.

*Благодарности.* Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (код проекта 94-05-16524).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Маркушевич В.М. Рэлеевские волны в средах Пикериса. I. Исследование системы уравнений и ее решение. Наст. сб. С.145–157.
2. Маркушевич В.М. Представление матричных потенциалов в уравнении для волны Рэля через симметричную матрицу // Компьютерный анализ геофизических полей. М.: Наука, 1990. С.227–234. (Вычисл. сейсмология; Вып. 23).
3. Маркушевич В.М., Цемазман А.С. D-постоянные среды и рэлеевские волны в них на характерных частотах. I. Пуассоновы среды // Современные методы интерпретации сейсмологических данных. М.: Наука, 1991. С.149–157. (Вычисл. сейсмология; Вып. 24).
4. Pekeris C.L. The propagation of Rayleigh waves in heterogeneous media // Physics. 1935. Vol.6. P.133–138.
5. Маркушевич В.М., Найленд Э., Цемазман А.С. Дисперсия волны Рэля в средах Зволинского. Пуассонов случай // Проблемы прогноза землетрясений и интерпретация сейсмологических данных. М.: Наука, 1991. С.224–237. (Вычисл. сейсмология; Вып. 25).
6. Маркушевич В.М., Цемазман А.С. Дисперсия волн Рэля в средах Зволинского при произвольном коэффициенте Пуассона // Геодинамика и прогноз землетрясений. М.: Наука, 1994. С.226–238. (Вычисл. сейсмология; Вып. 26).
7. Маркушевич В.М. Характеризация матрицы  $D$  в пуассоновом случае. Наст. сборник
8. Wolfram S. Mathematica. A system for doing mathematics by computer. N.Y.: Addison-Wesley, 1988. 747 p.