УДК 550.310:517.984 54

ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА И РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

А.Н. Кузнецов

Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук

В весьма распространенной ситуации изотропной слоистой и, вообще говоря, неоднородной среды классические методы упругого потенциала и разделения переменных в линейных уравнениях распространения сейсмических волн не всегда применимы, и поэтому возникает задача отыскания случаев, допускающих разделение переменных. Для движений, симметричных относительно поворотов вокруг оси, разделение переменных в уравнениях поля было найдено в случаях сферической, цилиндрической и плоской слоистости, а также предлагались достаточные условия его существования. Известно также, что для однородного тела согласованное с его формой разделение переменных существует лишь в конечном количестве случаев. В настоящей работе доказано, что в осесимметричном случае разделение переменных классическим методом даже локально существует только тогда, когда среда является сферически, цилиндрически или плоско слоистой. Таким образом, в этих случаях можно упростить постановку прямых и, главное, обратных задач, так как система уравнений упругости сводится к системе обыкновенных уравнений. В доказательстве использованы методы дифференциальной геометрии и тензорного исчисления. Предложены правила, которые позволяют проводить разделение переменных в функции Лагранжа, если она существует. При этом результат разделения может не обладать функцией Лагранжа. Но в трех указанных случаях слоистости этот результат будет иметь функцию Лагранжа и, значит, после разделения переменных снова получается самосопряженная система уравнений. Это открывает дополнительные возможности исследования: например, можно найти вариационные симметрии и, следовательно, законы сохранения. Обнаружены также случаи сред, близких к слоистым, когда разделение переменных возможно, но уравнения движения не являются самосопряженными и, следовательно, не могут быть получены как уравнения Эйлера-Лагранжа какой-либо функции.

THE LAGRANGIAN FUNCTION AND SEPARATION OF VARIABLES FOR ELASTIC VIBRATIONS IN AXIALLY SYMMETRIC LAYERED MEDIA

A.N. Kuznetsov

International Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences

In frequently encountered cases of isotropic and, generally, inhomogeneous media, classical separation of variables in equations of linear elastodynamics is generally not applicable. Thus it is important to distinguish special cases where variables can be separated. The separation of variables was carried out previously for axially symmetric motions in cases of spherical, cylindrical, and plane-parallel layered media. Sufficient conditions for such separation of variables were also suggested. It is also known that a finite number of cases exists where separation of variables for a homogeneous body is compatible with its geometry. It is proved here that the classical separation of variables exists, even locally, in axially symmetric cases only for bodies with spherical, cylindrical, or plane-parallel layering. The statement of direct and inverse problems can be simplified in these cases, because relevant equations of elastodynamics are reducible to sets of ordinary differential equations. The proof is based on methods of differential geometry and tensor calculus. Simple rules are deduced from basic properties of the Lagrangian function and Euler operator to separate variables in the Lagrangian function when this exists. In general, the result of the separation does not have a Lagrangian function. However, in the three cases mentioned above the result has a Lagrangian function, hence the separation results in a selfadjoint system of equations. That offers additional opportunities to investigate, among other items, variational symmetries and hence conservation laws. Also found are cases of media close to layered where the separation of variables is possible, but the equations of motion are not selfadjoint, hence cannot be deduced as the Euler-Lagrange equations for a Lagrangian function.

ВВЕДЕНИЕ

Распространение сейсмических волн в земной коре описывается системой уравнений линейной теории упругости. Среда при этом чаще всего считается изотропной и слоистой или же составленной из областей такого рода. В частном случае, когда среда однородна, для решения возникающих задач можно с успехом применить классические методы подвижного репера и разделения переменных. Представляется естественным начать исследование прямых и, главное, обратных задач сейсмологии неоднородных сред с изучения возможностей применения этих методов в более общей ситуации. Осуществляя эту программу, в статье [1] были предложены достаточные условия, позволяющие провести разделение переменных в системе уравнений линейной упругости для случая изотропной осесимметричной слоистой среды и осесимметричных решений. Там же было выяснено, что эти условия выполняются только в случаях плоской, цилиндрической и сферической слоистости. Вопрос о возможности разделения переменных в других случаях остался открытым.

В настоящей статье доказано, что эти случаи исчерпывают возможности классического метода разделения переменных. Доказано также, что разделение переменных в этих случаях можно провести в функции Лагранжа, наличие которой у линейной системы уравнений, как известно [2], эквивалентно самосопряженности этой системы. Приведены также случаи не совсем слоистых сред, когда разделение переменных возможно, но уравнения движения оказываются не самосопряженными и, следовательно, не могут быть получены как уравнения Эйлера-Лагранжа какой-либо функции.

Поясним терминологию. В геологии слоистой средой называют обычно дискретно слоистую среду, т.е. среду, составленную из однородных по физическим свойствам слоев, которые разделены слабо искривленными поверхностями. Здесь, как и в [1], слоистой будет называться непрерывно слоистая среда, которую можно рассматривать как предельный случай дискретно слоистой среды, когда толщина слоя становится бесконечно малой. Точное определение можно сформулировать так: изотропная среда слоиста, если ее параметры, т.е. плотность ρ и коэффициенты Ламе λ, μ, имеют коллинеарные градиенты в каждой точке пространства. В этом случае в окрестности каждой точки, где градиенты функций ρ, λ, μ не все равны нулю, можно выбрать функцию f (например, взять ту функцию из ρ, λ, μ, градиент которой отличен от нуля), и функции одной переменной ρ_1, λ_1, μ_1 такие, что параметры среды представятся композициями: $\rho = \rho_1(f(x_1, x_2, x_3))\ldots$. Отметим, что дискретно слоистая среда тоже удовлетворяет этому условию, если ρ, λ и μ постоянны не только внутри, но и на границах слоев: в качестве f можно взять гладкую функцию, постоянную на границах слоев, функции ρ_1, λ_1 и μ_1 окажутся в этом случае кусочно постоянными.

В ситуации изотропной слоистой среды классическую процедуру разделения переменных в уравнениях линейной теории упругости можно описать следующим образом.

(а) Выбираются новые ортогональные координаты y_1, y_2, y_3 (имеется в виду, что в каждой точке ортогональны градиенты этих функций).

(б) При этом ρ, λ и μ становятся функциями одной координаты, скажем y_1.

(в) Смещение U преобразуется как контравариантный вектор посредством якобиевой матрицы: $U_i = S_{ij}u_j$, $i, j = 1, 2, 3$.

(г) Получившаяся система обладает частными решениями вида $u_i(t, y_1, y_2, y_3) = v_i(t, y_1)w_i(y_2, y_3)$, где аргументы всех функций обозначены явно (в правой части суммирования по i не производится, так как левая часть зависит от i). Вектор-функция v удовлетворяет системе, зависящей от параметров среды, которая моделирует уравнения движения в пространстве меньшей размерности. Вектор-функция w удовлетворяет системе, решения которой являются, как правило, либо элементарными, либо специальными функциями. На эти функции обычно накладывается условие полноты и граничные условия, связанные с условиями рассматриваемой краевой задачи; этого вопроса мы здесь касаться не будем.

(д) Наконец, говорят, что разделение переменных осуществляется в общем случае, если на ρ, λ и μ не накладывается никаких условий типа уравнений (за исключением того, конечно, что они зависят только от y_1). Таким образом, при постановке прямой задачи для системы уравнений с неизвестным v параметры среды могут быть тремя произвольными функциями одной переменной.

В [1] задача о разделении переменных ставилась именно в этих предположениях и названный выше наш результат о единственности содержит их в своем условии. Ослабление ограничивающих условий (а)–(г) или отказ от некоторых из них ведет к резкому усложнению задачи прямого поиска возможностей разделения переменных. Естественный путь решения этой задачи (вернее, задачи о нахождении частных решений) – искать инфинитезимальные симметрии [2]. Возможно на этом пути нас ожидает много нового, но не исключено, что условия ортогональности (а) и (в) не являются искусственными, а диктуются структурой внутренних симметрий уравнений упругих колебаний (по крайней мере необобщенных симметрий [2]). В работах, посвященных симметриям и законам сохранения теории упругости, рассматривается либо самый общий нелинейный случай, либо случаи изотропной и однородной или только однородной среды ([2], [3] и библиография в [3]). Исследования слоистой среды с этой точки зрения нам не известны. В монографии [4] собраны результаты по разделению переменных в криволинейных системах ортогональных координат для случая однородного тела, форма которого согласуется с выбираемой системой координат.

В случае осевой симметрии среды (под которой понимается симметрия относительно поворотов вокруг оси) всегда можно выбрать координаты, удовлетворяющие условиям (а) и (б). Если решение ищется тоже осесимметричное, что означает инвариантность векторного поля U относительно поворотов, то после перехода в цилиндрическую систему координат (с условием (в)) смещение u не будет зависеть от угловой координаты φ и, кроме того, система распадается на систему из двух уравнений с двумя неизвестными $u_1(r,z)$, $u_2(r,z)$ и одно уравнение относительно третьей компоненты $u_3(r,z)$. После этого вопрос о возможности разделения переменных, т.е. возможности выполнения условия (г), ставится, как и в [1], для первой системы. Интерес к ней мотивируется тем, что именно она описывает поверхностные волны, аналогичные волнам Рэлея. Отметим, что отделившееся третье уравнение исследовалось в этом направлении [5], правда функция Лагранжа там не выписывалась.

Разделение переменных осуществляется в функции Лагранжа. Благодаря большей компактности этой функции по сравнению с уравнениями движения, такой подход снижает объем вычислений по сравнению с преобразованием самих уравнений, хотя при этом требуется формулировка несложных правил преобразования функции Лагранжа. Как известно, наличие у системы уравнений функции Лагранжа или эквивалентное ему свойство самосопряженности [2] предоставляет дополнительные возможности исследования: например, можно найти вариационные симметрии и выписать соответствующие им законы сохранения, в связи с чем такие функции имеет смысл предъявлять, когда это возможно.

1. УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ

Функция Лагранжа для линейной теории упругости и изотропной среды имеет вид [6]

$$L = \frac{1}{2}\rho \dot{U}_i^2 - \frac{1}{2}\lambda (U_{i,i})^2 - \frac{1}{4}\mu (U_{i,j} + U_{j,i})^2, \tag{1}$$

где ρ – плотность; λ, μ – коэффициенты Ламе; U_1, U_2, U_3 – компоненты вектора смещения. Производная по времени обозначена точкой над символом функции, производные по пространственным координатам x_1, x_2, x_3 обозначаются индексами, отделенными запятой, так что $U_{i,j} = U_{i,x_j} = \partial U_i / \partial x_j$. Для функции, которая определена как сложная функция, зависящая от координат, функций и частных производных этих функций любого порядка, индексами после запятой или буквой D с индексами обозначается полная производная, например:

$$f(x_1, x_2, u, u_2, u_{12}, v)_{,2} = f_{,2} = D_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial u} u_{,2} + \frac{\partial f}{\partial u_2} u_{2,2} + \frac{\partial f}{\partial u_{12}} u_{12,2} + \frac{\partial f}{\partial v} v_{,2}.$$

По повторяющимся индексам производится суммирование. Возведение в квадрат приводит к повторению индексов, если они не "немые":

$$U_i^2 = U_i U_i = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2,$$

но

$$(U_{i,i})^2 = (U_{1,1} + U_{2,2} + U_{3,3})^2.$$

Уравнения линейной упругости получаются из функции Лагранжа применением оператора Эйлера, который в случае произвольной функции Лагранжа определяется формулой [2]

$$\mathrm{E}_i(L) = \sum_J (-D)_J \frac{\partial L}{\partial U_{i,J}},$$

где J пробегает множество мультииндексов. В случае функции (1) уравнения Эйлера могут быть записаны в виде

$$D_t \frac{\partial L}{\partial U_{i,t}} = \frac{\partial L}{\partial U_i} - D_j \frac{\partial L}{\partial U_{i,j}}. \tag{2}$$

Подставляя сюда L из (1), получим известные уравнения движения для линейной изотропной среды:

$$\rho \ddot{U}_i = (\lambda U_{k,k})_{,i} + (\mu U_{i,j})_{,j} + (\mu U_{j,i})_{,j}.$$

2. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Цилиндрические координаты r, φ, z определяются формулами: $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, $x_3 = z$. При этом смещение U преобразуется как вектор: $U_i(x_1, x_2, x_3) = S_{ij} u_j(r, z, \varphi)$, где S – ортогональная матрица преобразования касательного репера $D_i = S_{ij}\nabla_j$,

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial r \\ \partial/\partial z \\ r^{-1}\partial/\partial\varphi \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для функций, зависящих от r, z, φ, индексом после запятой обозначается применение соответствующей компоненты ∇, так что $u_{,i} = \nabla_i u$, но $U_{,i} = D_i U$, т.е. в каждой системе координат градиент определяется по-своему. Отметим, что здесь употребляется нетрадиционная нумерация цилиндрических координат, чтобы в уравнениях осесимметричной задачи остались индексы 1 и 2, а не 1 и 3.

В цилиндрических координатах функция Лагранжа (1) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{1}{2}\rho r \dot{u}_i^2 + \frac{1}{2}\rho r \dot{u}_3^2 - \frac{1}{2}\lambda r (u_{i,i} + r^{-1}u_1)^2 - \lambda r (u_{i,i} + r^{-1}u_1) u_{3,3} - \\ & - \frac{\lambda r}{2} u_{3,3}^2 - \frac{\mu r}{4}(u_{i,j} + u_{j,i})^2 - \mu r^{-1} u_1^2 - \frac{\mu r}{2}(u_{3,j} + u_{j,3})^2 - \\ & - \mu r u_{3,3}^2 + \mu u_{3,1} u_3 + \mu u_{1,3} u_3 - \frac{\mu}{2} r^{-1} u_3^2 - 2\mu u_{3,3} u_1, \end{aligned} \tag{3}$$

где i, j принимают значения 1 и 2.

Здесь ρ, λ и μ считаются зависящими от цилиндрических координат. Условие осевой симметрии среды сводится к тому, что ρ, λ и μ не зависят от φ. Осесимметричность постановки задачи означает, что ищется решение u уравнений Эйлера-Лагранжа, также не зависящее от φ и что краевые и начальные условия, если они есть, тоже осесимметричны. Последние, впрочем, в этой статье не понадобятся. Сопоставляя формулы (2) и (3), легко видеть, что в этом случае система трех уравнений распадается на систему для первых двух компонент и уравнение для третьей компоненты. При этом первая система обладает следующей функцией Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2}\rho r\dot{u}_i^2 - \frac{1}{2}\lambda r(u_{i,i} + r^{-1}u_1)^2 - \frac{\mu r}{4}(u_{i,j} + u_{j,i})^2 - \mu r^{-1}u_1^2, \qquad i,j = 1,2. \quad (4)$$

Действительно, помешать этому могли бы смешанные члены вида $au_{i,j}u_{3,k}$, где $i < 3$, а j,k либо < 3, либо вообще отсутствуют, но таких членов в (3) нет. Применение первых двух компонент $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ оператора Эйлера-Лагранжа к L из (3) оставит в уравнениях только члены, содержащие u_1 и u_2, так как u_3 входит лишь в мономы вида $au_{i,j}u_{k,3}$, а применение оператора $\mathbf{E}_l$, $l = 1,2,3$, к такому моному приводит к сохранению производной по φ либо от a, либо от u:

$$\mathbf{E}_l = (au_{i,j}u_{k,3}) = a_{,j}\delta_{li}u_{k,3} + a_{,3}u_{i,j}\delta_{lk} + a\delta_{li}u_{k,3j} + au_{i,j3}\delta_{lk}.$$

Правая часть этого выражения обращается в нуль, так как $a_{,3} = 0$, $u_{i,3} = 0$.

Таким же образом устанавливается, что третье уравнение также допускает функцию Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}\rho r\dot{u}_3^2 - \frac{\mu r}{2}u_{3,j}^2 + \mu u_{3,1}u_3 - \frac{\mu}{2}r^{-1}u_3^2.$$

3. ЕДИНСТВЕННОСТЬ

Неформально результат этого раздела можно сформулировать так. В слоистой осесимметричной среде единственными общими случаями, в которых возможно разделение переменных в системе уравнений Эйлера-Лагранжа функции (4), являются случаи плоской, цилиндрической и сферической слоистости.

Сформулированные во введении условия (а)–(д), по существу, представляют собой формализацию этого утверждения, которая, очевидно, необходима, чтобы можно было работать с ним. Остается только конкретизировать эти условия.

Пусть $r(x,y)$, $z(x,y)$ – ортогональная замена переменных в окрестности точки x_0, y_0, т.е. якобиан $J = \partial(r,z)/\partial(x,y)$ отличен от нуля и векторы $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ ортогональны в метрике $dr^2 + dz^2$. Тогда существуют функции $a(x,y), b(x,y), \vartheta(x,y)$, такие что

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial r \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} \nabla_x \\ \nabla_y \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} \sin\vartheta & \cos\vartheta \\ \cos\vartheta & -\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\nabla_x = a\frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_y = b\frac{\partial}{\partial y},$$

$$a(x, y_0) = 1, \quad b(x_0, y) = r(x_0, y). \tag{6}$$

Действительно, a и b – это просто множители, нормирующие градиент $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$. Связывающая градиент $\partial/\partial r$, $\partial/\partial z$ и вектор-оператор ∇_x, ∇_y матрица S окажется после определения a и b ортогональной. Ее можно представить в виде (5) с некоторой функцией $\vartheta(x, y)$, если ее определитель равен -1, а этого можно добиться, изменив порядок координат x, y. Отрицательная ориентация координат x, y выбирается для того, чтобы согласовать вид формул (5) с формулами перехода к сферическим координатам. После того, как выбраны a и b и зафиксирован порядок x, y, можно добиться выполнения условия (6), заменяя координаты x и y каждую отдельно и независимо от другой. Отметим, что эта процедура, как и выбор ориентации, не ограничивает общности ортогональной замены переменных, так как линии уровня $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ при этом не меняются. Отметим, что независимость существования разделения переменных от выбора координатных функций при фиксированных их линиях уровня не очевидна, а следует из леммы 2 (см. ниже) и связана, в конечном итоге, с точной определенностью как исходной системы уравнений, так и результирующей.

Предложение 1. Пусть замена переменных, удовлетворяющая (5) и (6), разделяет переменные в системе Эйлера-Лагранжа функции (4). Иначе говоря, $\forall \rho(x), \lambda(x)$ и $\mu(x)$, определенных в окрестности точки x_0, y_0, подстановка в систему $u = SV$, $V_i(t, x, y) = v_i(t, x) w_i(y)$, $i = 1, 2$, приводит к правильно определенной (т.е. представляющейся в форме Коши-Ковалевской) системе уравнений для v.

Тогда либо $r = (x - x_1)\sin\vartheta$, $z = z_0 + (x - x_1)\cos\vartheta$, либо $\sin\vartheta\cos\vartheta = 0$.

Замечания

а. Первый случай, очевидно, означает сферическую слоистость: $r^2 + (z - z_0)^2 = (x - x_1)^2$, второй соответствует плоской или цилиндрической слоистости, в зависимости от того $\sin\vartheta$ или $\cos\vartheta = 0$.

б. Плоско слоистая среда допускает не только осесимметричное разделение переменных, но и общее, когда решение не обязательно осесимметрично.

4. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В ФУНКЦИИ ЛАГРАНЖА

Предложение 2. В случае слоистой осесимметричной задачи линейной теории упругости, определенной функцией Лагранжа (4), все системы уравнений движения, получающиеся в результате процедуры разделения переменных, обладают функциями Лагранжа.

Следствие. В условиях предложения 2 системы уравнений движения являются самосопряженными относительно скалярного произведения $(u, v) = \int (u_1 v_1 + u_2 v_2) dx dt$, где x обозначает пространственную переменную, оставшуюся после разделения переменных, а функции u и v имеют компактный носитель в области изменения переменных x, t.

Приведем список этих функций Лагранжа.

1. Сферически слоистая среда:

$$L = R^2 \Big[\frac{\rho}{2}(\eta \dot{v}_1^2 - \xi \dot{v}_2^2) - \frac{\lambda\eta}{2}(v_{1,1} + 2R^{-1} v_1 + \xi R^{-1} v_2)^2 -$$

$$-\frac{\mu}{2}\left(\eta(2v_{1,1}^2 + R^{-2}(4-\xi\eta)v_1^2) - 2\xi\eta R^{-1}v_1v_{2,1} + \right.$$

$$\left. + 6\xi\eta R^{-2}v_1v_2 - \xi(v_{2,1}^2 - 2R^{-1}v_{2,1}v_2 - R^{-2}(1+2\xi\eta)v_2^2)\right)\Bigg].$$

Здесь $v = v(t,R)$; $(\cdot)_{,1} = \partial(\cdot)/\partial R$; ρ, λ и μ зависят от R; ξ,η – константы разделения переменных. От этих констант как от параметров зависит множитель w частного решения; подробнее: $u = SV$, $V_i(t,R,\vartheta) = v_i(t,R)w_i(\vartheta)$, $i = 1,2$, $r = R\sin\vartheta$, $z = R\cos\vartheta$,

$$\begin{cases} w_{1,\vartheta} = \eta w_2, \\ w_{2,\vartheta} = -\mathrm{ctg}\vartheta\, w_2 + \xi w_1. \end{cases} \tag{7}$$

При $\xi\eta = n(n+1)$ решения этой системы выражаются через полиномы Лежандра от $x = \cos\vartheta$, так как w_1 удовлетворяет уравнению Лежандра: $((1-x^2)w_{1,x})_{,x} + +\xi\eta w_1 = 0$.

2. Цилиндрически слоистая среда:

$$L = r\left[\frac{\rho}{2}(\dot v_1^2 - \dot v_2^2) - \frac{\lambda}{2}\left((v_{1,1} + r^{-1}v_1 + \xi v_2)^2 + \xi^2 v_2^2\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{\mu}{2}\left(2v_{1,1}^2 - \xi^2 v_1^2 - 2r^{-2}v_1^2 - 2\xi v_1 v_{2,1} - v_{2,1}^2 + 2\xi^2 v_2^2\right)\right].$$

Здесь $v = v(t,r)$; $(\cdot)_{,1} = \partial(\cdot)/\partial r$; ρ,λ и μ зависят от r; ξ – константа разделения переменных, определенная соотношением

$$u_i(t,r,z) = v_i(t,r)\exp(\xi z), \qquad i = 1,2.$$

3. Плоско слоистая среда, случай осевой симметрии:

$$L = \frac{\rho}{2}(\xi\dot v_1^2 - \eta\dot v_2^2) - \frac{\lambda\eta}{2}(\xi v_1 + v_{2,2})^2 - \frac{\mu}{2}(\xi v_{1,2}^2 - 2\xi^2\eta v_1^2 + 2\xi\eta v_{1,2}v_2 - 2\eta v_{2,2}^2).$$

Здесь $v = v(t,z)$; $(\cdot)_{,2} = \partial(\cdot)/\partial z$; ρ,λ и μ зависят от z; ξ,η – константы разделения переменных. Как и в сферическом случае, они входят в уравнения для $w:\ u_i(t,r,z) = v_i(t,z)w_i(r)$, $i = 1,2$,

$$\begin{cases} w_{1,r} + r^{-1}w_1 = \xi w_2, \\ w_{2,r} = \eta w_1. \end{cases}$$

Решения этой системы выражаются через функции Бесселя:

$$w_1 = -\eta^{-1}\zeta J_1(\zeta r),\ \ w_2 = J_0(\zeta r),$$

где $\zeta^2 = \xi\eta$.

Очевидные свойства однородности функций Лагранжа (1), (3), (4) позволяют сформулировать еще ряд случаев возможного разделения переменных.

Предложение 3. 1) в системе с функцией Лагранжа (1) разделение переменных возможно, если ρ, λ и μ не зависят от одной или двух декартовых координат. В частности, всегда возможно отделение времени, т.е. разложение волны на волны разных частот. Результирующие системы уравнений обладают функциями Лагранжа;

2) разделение переменных в системе с функцией Лагранжа (3) и симметричной относительно сдвигов вдоль оси z постановкой задачи возможно, если $\rho = r^{-2+c}\rho_0(\varphi)$, $\lambda = r^c\lambda_0(\varphi)$, $\mu = r^c\mu_0(\varphi)$;

3) разделение переменных в системе с функцией Лагранжа (4) возможно, если $\rho = r^{-2+c}\rho_0(y)$, $\lambda = r^c\lambda_0(y)$, $\mu = r^c\mu_0(y)$, *где* $y = z/r$ *(почти конически слоистая среда).*

В утверждениях *2)* и *3)* c – произвольное число, ρ_0, λ_0, μ_0 – произвольные функции одного переменного. Системы уравнений, которые здесь получаются после разделения переменных, не имеют функции Лагранжа.

Отметим, что утверждение *1)* хорошо известно и получается преобразованием Фурье.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1

Пусть $M(t,x,y,v_1,v_2)$ – функция Лагранжа, которая получается из L (4) путем подстановки в нее $u = SV$, $V_i(t,x,y) = v_i(t,x,y)w_i(y)$ и умножения на J. Неизвестной в M считается вектор-функция $v(t,x,y)$. Рассмотрим два способа получения систем уравнений относительно $v(t,x)$ и $w(y)$; в этих системах v не зависит от y, но компоненты v и w входят в одни и те же уравнения.

1. Совершить подстановку в уравнениях Эйлера-Лагранжа $\mathbf{E}(L) = 0$, полагая что v не зависит от y.

2. Применить оператор $\mathbf{E}$ относительно v к M, то есть считая w известной, после чего положить $v_{,y} = 0$.

Лемма 1. Способы 1 и 2 эквивалентны, т.е. приводят к одной и той же системе.

Доказательство очевидным образом вытекает из первого и четвертого свойств функций Лагранжа и оператора $\mathbf{E}$ [2], которые мы перечисляем здесь для дальнейшего использования.

1. Операция обратимой замены неизвестных функций перестановочна с оператором $\mathbf{E}$.

2. Если функция Лагранжа $L(x, U_{.,.})$ не зависит от $U_{i,K}$ при всех мультииндексах K, содержащих индекс k, то $\mathbf{E}_i L$ тоже не будет содержать $U_{i,K}$ при $k \in K$ и $\mathbf{E}_i(f(x_k)\,L) = f(x_k)\mathbf{E}_i(L)$ для всякой функции f, зависящей только от x_k.

3. Если $L(x, U_{.,.})$ не зависит от $U_{i,K}$ при всех K, то $\mathbf{E}_i L \equiv 0$.

4. Операция замены независимых переменных в функции Лагранжа с одновременным умножением ее на якобиан замены коммутирует с оператором $\mathbf{E}$. Это значит, что естественнее рассматривать форму Ldx, чем функцию L.

5. Еще естественнее рассматривать класс этой формы по модулю точных форм, что соответствует определению функции L по модулю дивергенций. Иначе говоря, $\mathbf{E}(D_i M_i(x, U_{.,.})) \equiv 0$.

Будем говорить, что многочлен от v и производных v по t, x, y с коэффициентами – функциями от x и y – *факторизуется* с некоторым множителем $f(x,y)$, если все коэффициенты этого многочлена являются произведениями $f(x,y)$ на функции, зависящие только от x.

Лемма 2. Если переменные разделяются в уравнениях $\mathbf{E}(M) = 0$, *то каждый многочлен* $\mathbf{E}_i(M)$ *факторизуется.*

Доказательство. Обозначим через M_ρ, M_λ и M_μ слагаемые в M, зависящие, соответственно, от ρ, λ и μ, так что $M = M_\rho + M_\lambda + M_\mu$.

Вычислим M_ρ. Имеем $\dot{u}_i^2 = (\dot{V}_j S_{ij})^2 = \dot{V}_j S_{ij} \dot{V}_k S_{ik} = \dot{V}_i^2$ в силу ортогональности S. Поэтому

$$M_\rho = JL_\rho = \frac{1}{2} J\rho r \dot{u}_i^2 = \frac{1}{2} J\rho r \dot{V}_i^2 = \frac{1}{2} J\rho r (\dot{v}_1^2 w_1^2 + \dot{v}_2^2 w_2^2).$$

Отсюда

$$\mathbf{E}_1(M_\rho) = J\rho r V_1 w_1^2, \ \mathbf{E}_2(M_\rho) = J\rho r V_2 w_2^2.$$

Следовательно, $\mathbf{E}_1(M_\rho)$ факторизуется с множителем Jrw_1^2, а $\mathbf{E}_2(M_\rho)$ факторизуется с множителем Jrw_2^2. Из условия, что система уравнений относительно $v(t,x)$ должна быть точно определенной (т.е. число уравнений равно числу неизвестных функций), вытекает, что $\mathbf{E}_1(M)$ факторизуется с множителем Jrw_1^2. Действительно, в противном случае можно было бы найти по крайней мере два значения y: y_1 и y_2, в которых уравнения $\mathbf{E}_1(M)(y_1)$ и $\mathbf{E}_1(M)(y_2)$ независимы, и тогда вместе с $\mathbf{E}_2(M)$ получилась бы переопределенная система. Точно так же доказывается факторизация $\mathbf{E}_2(M)$.

Чтобы иметь возможность проводить разделение переменных в функции Лагранжа, установим связь факторизации уравнений Эйлера-Лагранжа с факторизацией самой функции.

Лемма 3. Пусть $L = \nu(x)(a_0 u_1^2 + a_1 u_{1,x} u_1 + a_2 u_{1,x}^2 + a_3 u_1 u_{2,x} + a_4 u_1 u_2 + a_5 u_{1,x} u_{2,x} + a_6 u_{1,x} u_2)$. *Если* $\mathbf{E}_1(L)$ *факторизуется с множителем* $w(x,y)$ *при фиксированных* $a_\alpha(x,y), a_{2,x} \not\equiv 0$ *и произвольной* $\nu(x)$, *то факторизуются* L *и* $w_{,x}$ *с тем же множителем.*

Заметим, что для выписанного вида L характерно отсутствие производных u по y и членов, на которых $\mathbf{E}_1$ обращается в нуль. Ограничение на порядок производных по x не существенно, однако более общий случай здесь не потребуется.

Доказательство. Согласно (2) $\mathbf{E}_1(L) = \nu(2a_0 u_1 + a_1 u_{1,x} + a_3 u_{2,x} + a_4 u_2) - \nu(a_1 u_1 + 2a_2 u_{1,x} + a_5 u_{2,x} + a_6 u_2)_{,x} - \nu_{,x}(a_1 u_1 + 2a_2 u_{1,x} + a_5 u_{2,x} + a_6 u_2)$. Рассматривая одночлены, содержащие $u_{1,xx}$ и $u_{2,xx}$, убеждаемся в факторизации a_2 и a_5. Коэффициент при $\nu u_{1,x}$ равен $-2a_{2,x}$, значит $a_{2,x}$ и, следовательно, $w_{,x}$ факторизуются. Коэффициент при u_1 равен $\nu 2a_0 - \nu a_{1,x} - \nu_{,x} a_1$, следовательно, a_0 и a_1 факторизуются, так как ν – произвольно. Аналогичным образом должны факторизоваться $a_3 - a_6$ и $\nu a_4 - \nu a_{6,x} - \nu_{,x} a_6$, откуда следует факторизация a_6, a_3 и a_4.

Вычислим M_λ. Имеем $u_{i,i} = (V_j S_{ij})_{,k} S_{ik} = V_{i,i} + V_j S_{ij,k} S_{ik}$. Очевидно, $S_{ij,k} = S_{ij,\vartheta} \vartheta_{,k}$, а так как

$$S_{ij,\vartheta} S_{ik} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}_{ij} S_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_{jk} = \delta_{12}^{jk} - \delta_{21}^{jk}, \tag{8}$$

то $u_{i,i} = V_{i,i} + V_1 \vartheta_{,2} - V_2 \vartheta_{,1}$ ($\delta_{ij} = \delta_i^j$ – символ Кронекера, $\delta_{ik}^{jl} = \delta_i^j \delta_k^l$). Из (4) находим

$$\begin{aligned} M_\lambda &= -\frac{1}{2} J\lambda r (V_{i,i} + V_1 \vartheta_{,2} - V_2 \vartheta_{,1} + r^{-1} S_{1i} V_i)^2 = \\ &= -\frac{1}{2} J\lambda r \left(V_{i,i} + V_1 (r^{-1} \sin\vartheta + \vartheta_{,2}) + V_2 (r^{-1} \cos\vartheta - \vartheta_{,1}) \right)^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Положим $\beta = r^{-1}\sin\vartheta + \vartheta_{,2}$, $\gamma = r^{-1}\cos\vartheta - \vartheta_{,1}$, тогда

$$M_\lambda = -\frac{1}{2}J\lambda r\left((V_{1,1}+\beta V_1)^2 + (V_{2,2}+\gamma V_2)^2 + 2(V_{1,1}+\beta V_1)(V_{2,2}+\gamma V_2)\right).$$

И окончательно:

$$\begin{aligned} M_\lambda = &-\frac{1}{2}J\lambda r\left((av_{1,x}+\beta v_1)^2 w_1^2 + (bv_{2,y} + (bw_2^{-1}w_{2,y}+\gamma)v_2)^2 w_2^2 + \right.\\ &\left. + 2(av_{1,x}+\beta v_1)(bv_{2,y}+(bw_2^{-1}w_{2,y}+\gamma)v_2)w_1w_2\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Из леммы 3 теперь следует (роль ν играет λ), что a не зависит от y, поэтому в силу (6) $a \equiv 1$, β не зависит от y и

$$bw_{2,y} + \gamma w_2 = \varepsilon_1 w_1. \tag{11}$$

$$(Jr)_{,x} = \varepsilon_2 Jr. \tag{12}$$

Буквой ε с индексами здесь и далее будут обозначаться различные функции, зависящие только от x.
Вычислим J:

$$J = a^{-1}b^{-1}\det\begin{pmatrix}\nabla_x r & \nabla_y r\\ \nabla_x z & \nabla_y z\end{pmatrix} = a^{-1}b^{-1}\det S^{-1} = -b^{-1}.$$

Интегрируя (12) и используя (6), получим

$$b = rc(x) \tag{13}$$

с некоторой функцией $c(x)$.
Следовательно, $Jr = -c^{-1}$, так что Jr не зависит от y.

Рассмотрим теперь действие на M_λ оператора $\mathbf{E}_2$. Смысл последующих преобразований заключается в том, чтобы, основываясь на свойстве 5 функции Лагранжа, с помощью формулы Лейбница избавиться от вхождения $v_{2,y}$ в M_λ. Опуская в (10) члены из ядра $\mathbf{E}_2$ и используя найденные соотношения, получим

$$M_{\lambda 2} = -\frac{1}{2}J\lambda r\left((bv_{2,y}w_2 + \varepsilon_1 w_1 v_2)^2 + 2(v_{1,x}+\beta v_1)(bv_{2,y}w_2+\varepsilon_1 w_1 v_2)w_1\right).$$

Будем обозначать знаком $\sim$ отношение эквивалентности на функциях Лагранжа по модулю ядра композиции оператора $\mathbf{E}$ и подстановки $v_{,y} = 0$. Тогда $v_{2,y}^2 \sim 0$, $v_{2,y}f \sim -v_2 f_{,y}$. Раскрывая скобки, найдем

$$\begin{aligned} M_{\lambda 2} \sim &-\frac{1}{2}J\lambda r\left(2bv_{2,y}w_2\varepsilon_1 w_1 v_2 + \varepsilon_1^2 w_1^2 v_2^2 + 2(v_{1,x}+\beta v_1)bv_{2,y}w_2w_1 + \right.\\ &\left. + 2(v_{1,x}+\beta v_1)\varepsilon_1 w_1^2 v_2\right) \sim, \end{aligned}$$

интегрируя по частям в первом и третьем слагаемых, продолжим эквивалентность $\sim$

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}J\lambda r(-b_{,y}v_2^2 w_2\varepsilon_1 w_1 - bv_2^2 w_{2,y}\varepsilon_1 w_1 - \\ &- bv_2^2 w_2\varepsilon_1 w_{1,y} + \varepsilon_1^2 w_1^2 v_2^2 - 2(v_{1,x}+\beta v_1)b_{,y}v_2w_2w_1 - \\ &- 2(v_{1,x}+\beta v_1)bv_2w_{2,y}w_1 - 2(v_{1,x}+\beta v_1)bv_2w_2w_{1,y} + 2(v_{1,x}+\beta v_1)\varepsilon_1 w_1^2 v_2) \sim, \end{aligned}$$

подставив сюда $w_{2,y}$ из (11) получим $\sim$

$$-\frac{1}{2}J\lambda r\left(-b_{,y}v_2^2w_2\varepsilon_1w_1+v_2^2\gamma w_2\varepsilon_1w_1-bv_2^2w_2\varepsilon_1w_{1,y}-2(v_{1,x}+\beta v_1)b_{,y}v_2w_2w_1+\right.$$
$$\left.+2(v_{1,x}+\beta v_1)v_2\gamma w_2w_1-2(v_{1,x}+\beta v_1)bv_2w_2w_{1,y}\right).$$

А это выражение легко разлагается на множители, так что

$$M_{\lambda 2}=-\frac{1}{2}J\lambda r(-b_{,y}w_1+\gamma w_1-bw_{1,y})(v_2^2w_2\varepsilon_1+2(v_{1,x}+\beta v_1)v_2w_2).$$

Отсюда по лемме 3 получаем

$$-b_{,y}w_1+\gamma w_1-bw_{1,y}=\varepsilon_3w_2.$$

Этой формулой заканчивается список соотношений, которые можно вывести из условия,что разделение переменных существует в ситуации, когда $\rho(x)$ и $\lambda(x)$ произвольны, а $\mu=0$. Нетрудно показать, что их недостаточно для вывода заключения предложения 1.

Рассмотрим теперь M_μ. В последующих вычислениях используется свойство матрицы S : $S=S'=S^{-1}$. Имеем

$$\begin{aligned}
&u_{i,j}=(V_kS_{ik})_{,l}S_{jl}=V_{k,l}S_{ik}S_{jl}+V_mS_{im,\vartheta}S_{jn}\vartheta_{,n},\\
&u_{ji}=V_{l,k}S_{ik}S_{jl}+V_mS_{jm,\vartheta}S_{in}\vartheta_{,n},\\
&(u_{i,j}+u_{j,i})^2=(V_{k,l}+V_{l,k})^2+2(V_{k,l}+V_{l,k})V_mS_{ik}S_{im,\vartheta}\vartheta_{,l}+2(V_{k,l}+V_{l,k})\times\\
&\times V_mS_{jl}S_{jm,\vartheta}\vartheta_{,k}+V_m\vartheta_{,n}(S_{im,\vartheta}S_{jn}+S_{jm,\vartheta}S_{in})V_p\vartheta_{,q}(S_{ip,\vartheta}S_{jq}+S_{jp,\vartheta}S_{iq})=L_1,
\end{aligned}$$

где последнее равенство служит обозначением. После раскрытия скобок в последнем слагаемом L_1, с помощью формулы

$$S_{im,\vartheta}S_{in,\vartheta}=S_{,\vartheta}^2=\begin{pmatrix}\cos\vartheta & -\sin\vartheta\\ -\sin\vartheta & -\cos\vartheta\end{pmatrix}^2_{mn}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}_{mn}=\delta_{11}^{mn}+\delta_{22}^{mn}$$

и формулы (8) получим

$$\begin{aligned}
L_1 &= (V_{k,l}+V_{l,k})^2+4(V_{k,l}+V_{l,k})V_m(\delta_{12}^{mk}-\delta_{21}^{mk})\vartheta_{,1}+\\
&\quad+2V_m^2\vartheta_{,n}^2+2V_m^2(\delta_{12}^{mn}-\delta_{21}^{mn})^2\vartheta_{,n}^2-4V_1V_2\vartheta_{,1}\vartheta_{,2}=\\
&= (V_{k,l}+V_{l,k})^2+4(V_{2,l}+V_{l,2})V_1\vartheta_{,l}-4(V_{1,l}+V_{l,1})V_2\vartheta_{,l}+\\
&\quad+2V_m^2\vartheta_{,n}^2+2V_1^2\vartheta_{,2}^2+2V_2^2\vartheta_{,1}^2-4V_1V_2\vartheta_{,1}\vartheta_{,2}.
\end{aligned}$$

Полагая $\nu=-\mu Jr/4$ и используя соотношение подстановки $u_1=V_1\sin\vartheta+V_2\cos\vartheta$, получим из (4) выражение M_μ через V

$$M_\mu=\nu(L_1+4r^{-2}(V_1\sin\vartheta+V_2\cos\vartheta)^2). \tag{14}$$

Прямая подстановка $V_i=v_iw_i$ в M_μ приводит к весьма громоздким вычислениям; к счастью, имеется возможность их обойти.

Лемма 4. Пусть $L=\nu(x)L_2$, где L_2 – многочлен от v и производных v по t,x,y с коэффициентами – функциями от x и y. Если при произвольной ν многочлен

$\mathbf{E}_i(L)$ факторизуется с множителем $w(x,y)$, от ν не зависящим, то факторизуется с тем же множителем сумма слагаемых $\mathbf{E}_i(L)$, которые содержат множитель $\nu_{,x}$, иначе говоря $\partial L_2/\partial v_{i,x}$.

Для доказательства достаточно сначала положить $\nu = 1$, а затем $\nu = x$. Применим лемму 4 к M_μ, пользуясь тем, что $\partial M_\mu/\partial v_{i,x} = w_i \partial M_\mu/\partial V_{i,x}$, полагая $M_{\mu 2} = \nu^{-1} M_\mu$.

$$\frac{\partial M_{\mu 2}}{\partial V_{1,x}} = 8V_{1,1} - 8V_2 \vartheta_{,1} = 8v_{1,1}w_1 - 8v_2 w_2 \vartheta_{,1}.$$

Эта величина факторизуется с множителем w_1, следовательно,

$$w_2 \vartheta_{,1} = \varepsilon_4 w_1.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_{\mu 2}}{\partial V_{2,x}} &= 4V_{2,1} + 4V_{1,2} + 4V_1\vartheta_{,1} - 4V_2\vartheta_{,2} = \\ &= 4v_{2,1}w_2 + 4v_{1,2}w_1 + 4v_1 w_{1,2} + 4v_1 w_1 \vartheta_{,1} - 4v_2 w_2 \vartheta_{,2}\end{aligned}$$

и условие факторизации с множителем w_2 влечет

$$\begin{aligned} &w_{1,2} + w_1\vartheta_{,1} = \varepsilon_6 w_2, \\ &\vartheta_{,2} = \varepsilon_5. \end{aligned} \tag{15}$$

Полученные соотношения достаточны для завершения доказательства. Отсюда следует, что оставшиеся невыведенными соотношения факторизации являются следствием полученных уравнений.

Выразим элементы матрицы S через элементы якобиевой матрицы в соответствии с (5):

$$r_{,x} = \sin\vartheta, \tag{16}$$
$$br_{,y} = \cos\vartheta, \tag{17}$$
$$z_{,x} = \cos\vartheta, \tag{18}$$
$$bz_{,y} = -\sin\vartheta. \tag{19}$$

Умножая (16) на равенство $r^{-1}\sin\vartheta = \beta - \varepsilon_5$, которое вытекает из определения β и (15), и интегрируя, получим, так как β не зависит от y, что

$$r = \varepsilon_7 p(y) \tag{20}$$

с некоторой функцией p, не зависящей от x.

Используя то же равенство и (13) в (19), получим: $rcz_{,y} = -r(\beta - \varepsilon_5)$, откуда после сокращения на r и интегрирования получаем

$$z = \varepsilon_8 + \varepsilon_9 y. \tag{21}$$

После подстановки r и z в (16) и (18) имеем

$$\cos\vartheta = \varepsilon_{8,x} + \varepsilon_{9,x} y, \tag{22}$$
$$\sin\vartheta = \varepsilon_{7,x} p. \tag{23}$$

Следовательно,

$$\varepsilon_{8,x}^2 + \varepsilon_{9,x}^2 + 2\varepsilon_{8,x}\varepsilon_{9,x}y + \varepsilon_{7,x}^2 p^2 = 1.$$

Лемма 5. Пусть $f_i(x)$ и $g_i(y)$, где i пробегает конечное множество $\{1, \ldots, I\}$, – числовые функции переменных x и y, принимающих значения в произвольных множествах. Пусть $\{a_k\}$, $k \in \{1, \ldots, K\}$, и $\{b_l\}$, $l \in \{1, \ldots, L\}$ – базисы линейных оболочек $\{f_i\}$ и $\{g_i\}$ соответственно, так что $f_i = \alpha_{ik} a_k$, $g_i = \beta_{il} b_l$, где α_{ik} и β_{il} – числа. Тогда тождество $f_i(x) g_i(y) \equiv 0$ эквивалентно выполнению равенства $\alpha_{ik}\beta_{il} = 0$ для всех k и l и из него следует, что $K + L \leq I$.

Доказательство не сложно, мы его опустим.

Так как функции 1, y, y^2 линейно независимы, то по лемме 5 из полученного равенства вытекает, что среди множителей, зависящих от x, линейно независимых может быть не более одного. Поэтому для некоторой ε_{10} найдутся числа ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, такие что

$$\varepsilon_{7,x} = \xi_1 \varepsilon_{10}, \quad \varepsilon_{9,x} = \xi_2 \varepsilon_{10}, \quad \varepsilon_{8,x} = \xi_3 \varepsilon_{10}, \quad \varepsilon_3^2 \varepsilon_{10}^2 - 1 = \xi_4 \varepsilon_{10}.$$

Из последнего равенства следует, что $\varepsilon_{10} = \mathrm{const}$, так что можно положить $\varepsilon_{10} = 1$. Тогда, дифференцируя (22) и (23) по x, получим

$$\vartheta_{,x} = 0.$$

Значит (16) можно проинтегрировать: $r = x \sin\vartheta + q(y) = \varepsilon_7 p(y)$, где q – некоторая не зависящая от x функция, а второе равенство получено из (20). Отсюда по лемме 5, так как функции 1 и x линейно независимы, получаем, что либо $\sin\vartheta = \mathrm{const}$, либо $q = -x_1 \sin\vartheta$ с некоторой постоянной x_1. Рассмотрение первого случая отложим, во втором получаем

$$r = (x - x_1)\sin\vartheta. \tag{24}$$

Таким же образом, интегрируя (18) и используя (21), получаем: $z = x\cos\vartheta + z_1(y) = \varepsilon_8 + \varepsilon_9 y$, следовательно, либо $\cos\vartheta = \mathrm{const}$, либо $\cos\vartheta$ и 1 образуют базис в линейном пространстве функций ($\cos\vartheta$, 1, $z_1(y)$, y). В последнем случае получаем

$$z = (x - x_2)\cos\vartheta + z_0$$

и $\cos\vartheta = \varepsilon_5 y + \varepsilon_6$ с некоторыми постоянными x_2, z_0, ε_5, ε_6. Отсюда согласно (19), (13) и (24) находим

$$bz_{,y} = rcz_y = (x - x_1)\sin\vartheta\, c\,(x - x_2)\,\varepsilon_5 = -\sin\vartheta,$$

а согласно (17), (13) и (24) имеем

$$br_{,y} = (x - x_1)\sin\vartheta\, c\,(x - x_1)\cos\vartheta\,\vartheta_{,y} = \cos\vartheta,$$

и сравнение с предыдущим равенством дает $x_2 = x_1$. Это доказывает предложение 1 в случае $\vartheta \neq \mathrm{const}$.

Пусть $\vartheta = \mathrm{const}$. Тогда из определения β вытекает, что либо $\sin\vartheta = 0$, либо r не зависит от y и тогда по (17) $\cos\vartheta = 0$.

Предложение 1 доказано.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПРЕДЛОЖЕНИЙ 2 И 3

6.1. Сферически слоистая среда

Чтобы написать выражение функции Лагранжа, воспользуемся уже найденными формулами. В обозначениях предложения 1 положим $r = R\sin\vartheta$, $z = R\cos\vartheta$, $x = R$, $y = \vartheta$. Обратим внимание, что начальные условия (6) теперь другие. Действительно, из (16) и (17) вытекает, что $a = 1$, $b = R^{-1}$. Очевидно, $J = -R$, $\vartheta_{,1} = 0$, $\vartheta_{,2} = R^{-1}$, $\beta = 2R^{-1}$, $\gamma = R^{-1}\mathrm{ctg}\,\vartheta$. Искомая формула для функции Лагранжа осесимметричной задачи в сферических координатах получится теперь подстановкой этих значений в формулы M_ρ, M_λ (9) и M_μ (14):

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2}R^2\sin\vartheta \Big[&\rho\dot{V}_i^2 - \lambda(V_{i,i} + 2R^{-1}V_1 + R^{-1}\mathrm{ctg}\vartheta V_2)^2 - \\ &- \frac{\mu}{2}\left((V_{k,l}+V_{l,k})^2 + 8R^{-1}V_{2,2}V_1 - 4R^{-1}(V_{1,2}+V_{2,1})V_2 + \right. \\ &\left. + 2R^{-2}V_2^2 + 8R^{-2}V_1^2 + 8R^{-2}\mathrm{ctg}\vartheta V_1V_2 + 4R^{-2}\mathrm{ctg}^2\vartheta V_2^2\right)\Big]. \end{aligned} \tag{25}$$

Программа дальнейших вычислений такова. В (25) нужно подставить $V_i(t,R,\vartheta) = v_i(t,R,\vartheta)w_i(\vartheta)$. Пусть $L_i, L_{\rho i}, \ldots$, $i = 1,2$, обозначает соответствующую функцию Лагранжа, когда она рассматривается по модулю ядра оператора $\mathbf{E}_i$ с последующим положением $v_{,\vartheta} = 0$. Кроме этого, в выражениях для $L_{.i}$ будет опущен общий множитель, стоящий перед первой скобкой в (25). Каждую $L_{\alpha i}$, $\alpha = \rho, \lambda, \mu$, следует освободить от вхождений $v_{i,\vartheta}$ путем интегрирования по частям и по возможности упростить. В результате этого функция $L_{\alpha i}$ будет факторизоваться с множителем, зависящим только от ϑ. После деления $L_{\alpha i}$ на этот множитель чудесным образом окажется, что мономы, содержащие и v_1 и v_2, одни и те же в $L_{\alpha 1}$ и $L_{\alpha 2}$, если только эти последние умножить на подходящие числа. Это обстоятельство позволяет склеить из двух частей функцию Лагранжа.

$$\begin{aligned} &L_{\rho i} \sim \rho\dot{v}_i^2 w_i^2, \\ &L_\lambda \sim -\lambda(v_{1,1}w_1 + v_{2,2}w_2 + v_2w_{2,2} + 2R^{-1}v_1w_1 + R^{-1}\mathrm{ctg}\vartheta v_2w_2)^2 = \\ &\quad = \text{согласно (7)} = \\ &\quad = -\lambda(v_{1,1}w_1 + v_{2,2}w_2 + \xi R^{-1}v_2w_1 + 2R^{-1}v_1w_1)^2, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} &L_{\lambda 1} \sim \lambda\left((v_{1,1}+2R^{-1}v_1)^2w_1^2 + 2(v_{1,1}+2R^{-1}v_1)\xi R^{-1}v_2w_1^2\right), \\ &L_{\lambda 2} \sim -\lambda\left(2v_{2,2}v_2\xi R^{-1}w_1w_2 + \xi^2R^{-2}v_2^2w_1^2 + 2v_{2,2}w_2(v_{1,1}+2R^{-1}v_1)w_1 + \right. \\ &\quad \left. + 2\xi R^{-1}v_2w_1^2(v_{1,1}+2R^{-1}v_1)\right). \end{aligned}$$

Помня о множителе $\sin\vartheta$ в (25), получим для произвольной функции f: $f_{,\vartheta}w_1w_2 \sim -f\mathrm{ctg}\vartheta w_1w_2 - fw_{1,\vartheta}w_2 - fw_1w_{2,\vartheta} \sim$ по (7) $\sim -f\eta w_2^2 - f\xi w_1^2$.

Следовательно, имеем правило

$$f_{,2}w_1w_2 \sim -f\eta R^{-1}w_2^2 - f\xi R^{-1}w_1^2.$$

Пользуясь им, получаем

$$L_{\lambda 2} \sim -\lambda \left((-v_2^2 \eta R^{-1} w_2^2 - v_2^2 \xi R^{-1} w_1^2) \xi R^{-1} + \xi^2 R^{-2} v_2^2 w_1^2 + \right.$$
$$\left. + 2(-v_2 \eta R^{-1} w_2^2 - v_2 \xi R^{-1} w_1^2)(v_{1,1} + 2R^{-1} v_1) + 2\xi R^{-1} v_2 w_1^2 (v_{1,1} + 2R^{-1} v_1) \right),$$

и после сокращения

$$L_{\lambda 2} \sim -\lambda \left(-v_2^2 \eta R^{-1} w_2^2 \xi R^{-1} - 2 v_2 \eta R^{-1} w_2^2 (v_{1,1} + 2R^{-1} v_1) \right).$$

Преобразования L_μ особенно сложны.

$$(V_{k,l} + V_{l,k})^2 = 4V_{1,1}^2 + 4V_{2,2}^2 + 2V_{1,2}^2 + 2V_{2,1}^2 + 4V_{1,2}V_{2,1}.$$

Подставим это выражение в L_μ и заменим $\operatorname{ctg}\vartheta$, используя (7):

$$L_\mu \sim -\frac{\mu}{2} \left(4v_{1,1}^2 w_1^2 + 4v_2^2 w_{2,2}^2 + 8v_{2,2} w_2 v_2 w_{2,2} + 4v_{1,2} w_1 v_1 w_{1,2} + \right.$$
$$+ 2v_1^2 w_{1,2}^2 + 2v_{2,1}^2 w_2^2 + 4(v_{1,2} w_1 + v_1 w_{1,2}) v_{2,1} w_2 + 8R^{-1} v_{2,2} w_2 v_1 w_1 +$$
$$+ 8R^{-1} v_2 w_{2,2} v_1 w_1 - 4R^{-1}(v_{1,2} w_1 + v_1 w_{1,2} + v_{2,1} w_2) v_2 w_2 + 2R^{-2} v_2^2 w_2^2 +$$
$$\left. + 8R^{-2} v_1^2 w_1^2 - 8R^{-1}(w_{2,2} - \xi R^{-1} w_1) v_1 w_1 v_2 + 4(w_{2,2} - \xi R^{-1} w_1)^2 v_2^2 \right).$$

Рассмотрим третье слагаемое

$$8v_{2,2} w_2 v_2 w_{2,2} = \text{ по (7)} = -8v_{2,2} w_2 v_2 R^{-1} \operatorname{ctg}\vartheta w_2 + 8v_{2,2} w_2 v_2 R^{-1} \xi w_1 \sim$$

после интегрирования по частям с учетом множителя $\sin\vartheta$ и подстановки котангенса из (7) $\sim$

$$-8v_2^2 (w_{2,2} - \xi R^{-1} w_1) w_{2,2} - 4v_2^2 R^{-2} w_2^2 - 4v_2^2 \eta \xi R^{-2} w_2^2 - 4v_2^2 \xi^2 R^{-2} w_1^2.$$

Мы видим, что члены в L_μ, содержащие $w_{2,2}$, сокращаются. Подставляя $w_{1,2}$ из (7) и приводя подобные члены, получим

$$L_\mu \sim -\frac{\mu}{2} (4v_{1,1}^2 w_1^2 - 2v_2^2 R^{-2} w_2^2 - 4v_2^2 \eta \xi R^{-2} w_2^2 + 4v_{1,2} w_1 v_1 R^{-1} \eta w_2 +$$
$$+ 2v_1^2 R^{-2} \eta^2 w_2^2 + 2v_{2,1}^2 w_2^2 + 4(v_{1,2} w_1 + v_1 R^{-1} \eta w_2) v_{2,1} w_2 + 8R^{-1} v_{2,2} w_2 v_1 w_1 -$$
$$- 4R^{-1}(v_{1,2} w_1 + v_1 R^{-1} \eta w_2 + v_{2,1} w_2) v_2 w_2 + 8R^{-2} v_1^2 w_1^2 + 8\xi R^{-2} v_1 w_1^2 v_2).$$

Отсюда

$$L_{\mu 1} \sim -\frac{\mu}{2} (4v_{1,1}^2 w_1^2 + 4v_{1,2} w_1 v_1 R^{-1} \eta w_2 + 2v_1^2 R^{-2} \eta^2 w_2^2 +$$
$$+ 4(v_{1,2} w_1 + v_1 R^{-1} \eta w_2) v_{2,1} w_2 - 4R^{-1}(v_{1,2} w_1 + v_1 R^{-1} \eta w_2) v_2 w_2 +$$
$$+ 8R^{-2} v_1^2 w_1^2 + 8\xi R^{-2} v_1 w_1^2 v_2) \sim$$

Согласно правилу интегрирования по частям $\sim$

$$-\frac{\mu}{2} (4v_{1,1}^2 w_1^2 - 2v_1^2 (\eta R^{-1} w_2^2 + \xi R^{-1} w_1^2) R^{-1} \eta + 2v_1^2 R^{-2} \eta^2 w_2^2 -$$
$$- 4v_1 v_{2,1} (\eta R^{-1} w_2^2 + \xi R^{-1} w_1^2) + 4v_1 R^{-1} \eta w_2 v_{2,1} w_2 + 4R^{-1} (\eta R^{-1} w_2^2 + \xi R^{-1} w_1^2) v_1 v_2 -$$
$$- 4R^{-2} v_1 \eta w_2 v_2 w_2 + 8R^{-2} v_1^2 w_1^2 + 8\xi R^{-2} v_1 w_1^2 v_2) \sim$$

и после приведения подобных членов $\sim$

$$-\frac{\mu}{2}(4v_{1,1}^2 - 2v_1^2\xi\eta R^{-2} - 4v_1v_{2,1}\xi R^{-1} + 8R^{-2}v_1^2 + 12\xi R^{-2}v_1v_2)w_1^2.$$

Аналогично:

$$L_{\mu 2} \sim -\frac{\mu}{2}(-2v_2^2R^{-2}w_2^2 - 4v_2^2\eta\xi R^{-2}w_2^2 + 2v_{2,1}^2w_2^2 + 4v_1R^{-1}\eta w_2v_{2,1}w_2 + \\ + 8R^{-1}v_{2,2}w_2v_1w_1 - 4R^{-1}(v_1R^{-1}\eta w_2 + v_{2,1}w_2)v_2w_2 + 8\xi R^{-2}v_1w_1^2v_2) \sim$$

после интегрирования по частям в пятом слагаемом, приведения подобных членов и вынесения w_2^2 $\sim$

$$-\frac{\mu}{2}(-2v_2^2R^{-2} - 4v_2^2\eta\xi R^{-2} + 2v_{2,1}^2 + 4v_1R^{-1}\eta v_{2,1} - 12R^{-2}\eta v_2v_1 - 4R^{-1}v_{2,1}v_2)w_2^2.$$

Нетрудно заметить, что $\eta L_{\alpha 1}w_1^{-2}$ и $-\xi L_{\alpha 2}w_2^{-2}$ при каждом $\alpha = \rho, \lambda, \mu$ имеют одинаковую смешанную часть, обозначим ее $L_{\alpha 3}$. В самом деле, при $\alpha = \rho$ она просто равна нулю, при $\alpha = \mu$

$$L_{\mu 3} = -\frac{\mu}{2}(-4v_1v_{2,1}\xi\eta R^{-1} + 12\xi\eta R^{-2}v_1v_2).$$

Поэтому искомую функцию Лагранжа L можно взять в виде

$$L = \frac{1}{2}R^2(\eta L_1w_1^{-2} - \xi L_2w_2^{-2} - L_{\lambda 3} - L_{\mu 3}).$$

Тем самым пункт 1 предложения 2 доказан. В остальных двух случаях преобразования значительно проще, мы их опустим.

6.2. Пункт 2 предложения 3

Как уже отмечалось, случай первого пункта хорошо известен, поэтому мы приступаем ко второму. Инвариантность относительно сдвигов означает, что $u_{,2} = 0$ в (3). Полагая $r = \exp(s)$, получим для $i, j = 1, 2$

$$u_{i,i} + r^{-1}u_1 = (u_{1,s} + u_1)\exp(-s),$$
$$(u_{i,j} + u_{j,i})^2 = (4u_{1,s}^2 + 2u_{2,s}^2)\exp(-2s),$$
$$(u_{3,j} + u_{j,3})^2 = ((u_{3,s} + u_{1,\varphi})^2 + u_{2,\varphi}^2)\exp(-2s).$$

Подставив эти выражения в (3), получим

$$L = \exp(-2s + cs)\left(\frac{1}{2}\rho_0\dot{u}_i^2 + \frac{1}{2}\rho_0\dot{u}_3^2 - \frac{1}{2}\lambda_0(u_{1,s} + u_1)^2 - \lambda_0(u_{1,s} + u_1)u_{3,\varphi} - \right. \\ - \frac{1}{2}\lambda_0u_{3,\varphi}^2 - \frac{1}{4}\mu_0(4u_{1,s}^2 + 2u_{2,s}^2) - \mu_0u_1^2 - \frac{1}{2}\mu_0((u_{3,s} + u_{1,\varphi})^2 + u_{2,\varphi}^2) - \\ \left. - \mu_0u_{3,\varphi}^2 + \mu_0u_{3,s}u_3 + \mu_0u_{1,\varphi}u_3 - \frac{1}{2}\mu_0u_3^2 - 2\mu_0u_{3,\varphi}u_1\right).$$

Так как эта функция Лагранжа является суммой функции, зависящей от u_1 и u_3, и функции, зависящей от u_2, то соответствующая система уравнений распадается на систему с неизвестными u_1 и u_3 и уравнение с u_2. А поскольку и сама функция L, и обе эти ее компоненты факторизуются с множителем $\exp(-2s + cs)$, то разделение переменных можно осуществить преобразованием Фурье-Лапласа: $u_i = v_i(t,\varphi)\exp(\eta s)$. Покажем, что его нельзя провести в функции Лагранжа. Опуская множитель $\exp((-2+c+2\eta)s)$ и слагаемые, зависящие только от v_1 или только от v_3, обозначим через M смешанную часть L:

$$M = -\lambda_0(v_{1,s} + (1+\eta)v_1)v_{3,\varphi} - \mu_0(v_{3,s}\eta v_3)v_{1,\varphi} + \mu_0 v_{1,\varphi}v_3 - 2\mu_0 v_{3,\varphi}v_1.$$

Действуя как в предыдущем разделе, обозначим через M_i функцию, для которой $\mathbf{E}_i(M_i - M) = 0$ при $v_{,s} = 0$, и преобразуем M_1 и M_3 к виду, в котором отсутствуют производные по s.

$$M_1 \sim \lambda_0(-1+c+\eta)v_1 v_{3,\varphi} + \mu_0(1-\eta)v_{1,\varphi}v_3 - 2\mu_0 v_{3,\varphi}v_1,$$
$$M_3 \sim -\lambda_0(1+\eta)v_1 v_{3,\varphi} + \mu_0(-1+c+\eta)v_3 v_{1,\varphi} - 2\mu_0 v_{3,\varphi}v_1.$$

Очевидно, функции $-(1+\eta)M_1$ и $(-1+c+\eta)M_3$ имеют одинаковые члены с λ_0, но члены с μ_0 у них разные. Воспользуемся теперь вышеупомянутым результатом [2], что существование функции Лагранжа для линейной системы эквивалентно ее самосопряженности.

Для функций $K_1 = \alpha\mu_0 v_{1,\varphi}v_3 + \beta\mu_0 v_{3,\varphi}v_1$, $K_3 = \gamma\mu_0 v_3 v_{1,\varphi} + \delta\mu_0 v_{3,\varphi}v_1$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – числа, условие самосопряженности системы $\mathbf{E}_1 K_1 = 0$, $\mathbf{E}_3 K_3 = 0$ записывается следующим образом:

$$-\alpha(\mu_0 v_3)_{,\varphi}w_1 + \beta\mu_0 v_{3,\varphi}w_1 + \gamma\mu_0 w_3 v_{1,\varphi} - \delta(\mu_0 v_1)_{,\varphi}w_3 \sim$$
$$-\alpha(\mu_0 w_3)_{,\varphi}v_1 + \beta\mu_0 w_{3,\varphi}v_1 + \gamma\mu_0 v_3 w_{1,\varphi} - \delta(\mu_0 w_1)_{,\varphi}v_3,$$

где имеется в виду эквивалентность по модулю полной производной по φ, v и w – произвольные функции с компактными носителями. Интегрируя по частям, получим

$$\alpha\mu_0 v_3 w_{1,\varphi} + \beta\mu_0 v_{3,\varphi}w_1 + \gamma\mu_0 w_3 v_{1,\varphi} + \delta\mu_0 v_1 w_{3,\varphi} \sim$$
$$\alpha\mu_0 w_3 v_{1,\varphi} + \beta\mu_0 w_{3,\varphi}v_1 + \gamma\mu_0 v_3 w_{1,\varphi} + \delta\mu_0 w_1 v_{3,\varphi},$$

откуда следует, что система самосопряжена для общей μ_0 только в том случае, когда $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$.

Так как числовые векторы $(-1+c+\eta,\ 1-\eta,\ -2)$ и $(-1-\eta,\ -1+c+\eta,\ -2)$ не коллинеарны в общем случае, то тем самым доказано, что из полученных разделением переменных уравнений $\mathbf{E}_1 M_1 = 0$, $\mathbf{E}_3 M_3 = 0$ нельзя получить систему Эйлера-Лагранжа путем умножения их на ненулевые числа. Отсюда, разумеется, не следует, что этого нельзя добиться каким–либо другим путем, например заменой неизвестных v_1, v_3 и преобразованием уравнений. Известно [2], что этот вопрос сложен.

6.3. Пункт 3 предложения 3

Снова положим $r = \exp(s)$ и перейдем в (4) к координатам s, y. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial r} = \exp(-s)\frac{\partial}{\partial s} - y\exp(-s)\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \exp(-s)\frac{\partial}{\partial y},$$

и

$$L = \exp(-2s + cs)\left(\frac{1}{2}\rho_0 \dot{u}_i^2 - \frac{1}{2}\lambda_0(u_{1,s} - yu_{1,y} + u_{2,y} + u_1)^2 - \right.$$
$$\left. - \mu_0(u_{1,s} - u_{1,y})^2 - \mu_0 u_{2,y}^2 - \frac{1}{2}\mu_0(u_{1,y} - \dot{y}u_{2,y} + u_{2,s})^2 - \mu_0 u_1^2\right).$$

Как и в предыдущем разделе мы видим, что разделение переменных можно осуществить преобразованием $u_i = v_i(t, y)\exp(\eta s)$, и опять его нельзя провести в функции Лагранжа по той же причине; соответствующие подробности мы опускаем.

Предложение 3 доказано.

Благодарности. Автор признателен В.М. Маркушевичу и участникам семинара МИТП РАН за полезные обсуждения предмета исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киселев С.Г., Маркушевич В.М.* О разделении переменных в уравнениях для рэлеевских колебаний слоистых сред // ДАН. 1993. Т.332, N 3. С.297–300.
2. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальныи уравнениям. М.: Мир, 1989. 638 с.
3. *Maugin G. A., Trimarco C.* Pseudo-quantité de mouvment et milieux élastiques inhomogénes // Comte Rendus de L'academie des Sciences. 1991. Paris: T.313, Série II, N 8. P.851–856.
4. *Pao Y.-H., Mow C.-C.* Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations. N.-Y.: Grane Russak. 1973. 472 p.
5. *Маркушевич В. М., Резников Е. Л.* Применение метода Фурье к уравнению стоячих SH-волн в полупространстве // Теория и анализ сейсмологических наблюдений. М.: Наука, 1979. С.59–69. (Вычисл. сейсмология; Вып. 12).
6. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.