УДК 550.310:517.984.54

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ПОТЕНЦИАЛА В УРАВНЕНИИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ПО НЕПОЛНЫМ СПЕКТРАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Н.Н. Новикова
Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук

В последние годы разработаны методы восстановления отрицательного потенциала в уравнении Штурма-Лиувилля по характеристикам дискретного спектра. В настоящей работе выясняются границы применимости этих методов. Представленные вычислительные эксперименты показывают, что, во-первых, по характеристикам отрицательного дискретного спектра уравнения Штурма-Лиувилля можно восстановить лишь отрицательную часть знакопеременного потенциала (при умножении потенциала на подходящий множитель ω^2). Во-вторых, использование спектральных данных для собственных значений, меньших $-B\omega^2$, $B > 0$, приводит к восстановлению потенциала там, где он меньше $-B\omega^2$. В-третьих, когда потенциал имеет разрывы, точность аппроксимации ухудшается с увеличением ω.

ABOUT RECONSTRUCTION OF THE POTENTIAL IN THE STURM-LIOUVILLE EQUATION FROM INCOMPLETE SPECTRAL DATA

N.N. Novikova
International Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences

During past few years methods were developed to reconstruct negative potentials in the Sturm-Liouville equation through characteristics of discrete spectrum. Several numerical tests clarify limitations of these methods. The tests show: 1) only the negative part of a potential having negative and positive parts can be reconstructed through characteristics of negative spectrum of the Sturm-Liouville equation (the potential is multiplied by a suitable factor ω); 2) spectral data for eigenvalues not exceeding $-B\omega^2$, $B > 0$, can be used to reconstruct the potential where it is less then $-B\omega^2$ only; 3) discontinuities of the potential result in deterioration of approximation with the growth of ω.

ТЕОРИЯ

Определение потенциала по функции Вейля

Классическая обратная задача Штурма-Лиувилля состоит [1] в определении вещественного потенциала $q(x)$ в уравнении

$$-y" + q(x)y(x) = ty(x), \qquad t < 0, \tag{1}$$

на полуоси $x \geq 0$ по спектральной функции.

В случае, когда $q(x) \to 0$ достаточно быстро при $x \to \infty$, эта спектральная функция определяется так называемой функцией Вейля уравнения (1) с краевым условием в нуле. Рассмотрим для определенности краевое условие вида

$$y(0) = 0. \tag{2}$$

Такое условие возникает при сведении к задаче Штурма-Лиувилля обратной акустической задачи для горизонтально-однородной среды. Функцией Вейля называется функция вида

$$j(t) = y'(0,t)/y(0,t), \tag{3}$$

где $t \in \mathbf{C} \backslash \mathbf{R}^+$ и $y(x,t)$ – решение уравнения (1), $y(x,t) \to 0$ при $x \to \infty$. Функция $j(t)$ является мероморфной функцией в области $\mathbf{C} \backslash \mathbf{R}^+$ с полюсами $t_1, \ldots, t_n$ на вещественной полуоси, соответствующими собственным значениям задачи (1),(2), и вычетами $C_1, \ldots, C_n$ в этих полюсах.

Вычеты $\{C_k\}$ выражаются через собственные функции $y(x,t_k)$ задачи (1),(2) по формуле

$$C_k = y'_x(0,t_k) / \int_0^\infty y^2(x,t_k)dx$$

(см.[1]).

Спектральной мерой задачи (1),(2) является мера на вещественной оси вида

$$d\sigma(t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} C_k \delta(t-t_k)dt, & t < 0, \\ f(t)dt, & t > 0 \end{cases}$$

где $\delta(t)$ – функция Дирака; $f(t)$ – производная функции $j(t)$ на положительной спектральной полуоси.

Исходные данные в обратных геофизических задачах естественно появляются в виде функции Вейля [2]. В обратной акустической задаче для горизонтально-однородной среды эти данные появляются следующим образом.

Пусть источник гармонических вибраций вблизи поверхности горизонтально-однородного жидкого полупространства $x > 0$ имеет вид $P(+0,r,t) = F(r)e^{i\omega t}$. Тогда вибрации гидростатического давления представляются в виде $P(x,r,t) = P_0(x,r)e^{i\omega t}$ ($\omega = 2\pi f$, f – частота монохроматических колебаний акустической среды) и P_0 удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P_0}{\partial r}\right) + \frac{\partial P_0}{\partial x} + \left(\frac{\omega^2\rho(x)}{\lambda(x)} - \frac{(\sqrt{\rho(x)})''}{\sqrt{\rho(x)}}\right)P_0 = 0$$

с граничными условиями

$$P_0(+0,r) = F(r); \quad P_0(-0,r) = 0; \quad P_0(\infty,r) = 0.$$

Здесь $\rho(x)$ – плотность, $\lambda(x)$ – модуль сжатия. Обратная задача состоит в нахождении функций $\rho(x)$, $\lambda(x)$ через значения $(P_{0x})'$ на поверхности $x = 0$.

С помощью преобразования Фурье-Бесселя нулевого порядка

$$y(x,-s^2)=\int_0^\infty P_0(x,r)rJ_0(sr)dr$$

мы получаем обратную задачу Штурма-Лиувилля: найти потенциал $q(x)$, равный

$$q(x)=-\frac{\omega^2\rho(x)}{\lambda(x)}+\frac{(\sqrt{\rho(x)})''}{\sqrt{\rho(x)}}$$

в уравнении (1), где $t=-s^2$, через функцию вида (3). При этом параметры $\lambda_j=\sqrt{-t_j}$, $j=1,2,\ldots,n$, являются волновыми числами поверхностных волн, а параметры

$$A_j=-\frac{C_j}{2}\int_0^\infty rF(r)J_0(\lambda_j r)dr$$

являются амплитудами этих волн. Эта обратная задача имеет полное математическое решение, основанное на интегральном уравнении Гельфанда-Левитана (см. [1]).

Определение потенциала по дискретной части спектральной функции

В прикладных обратных задачах функция Вейля $j(t)$ и соответственно спектральная функция $\sigma(t)$ известны полностью крайне редко. Имеется ряд постановок, где требуется восстановить потенциал по части спектральных данных. В работах [3, 4] исследовалась задача о возможности восстановления потенциала $q(x)$ по спектральной функции $\sigma(t)$ лишь на отрицательной полуоси, т.е. по характеристикам дискретного спектра. В частности, в приведенной выше обратной акустической задаче для горизонтально-однородной среды эти характеристики дискретного спектра являются волновыми числами и амплитудами поверхностных волн.

Если в нашем распоряжении нет никакой другой информации о спектральной мере, то можно по этим характеристикам дискретного спектра $\{t_k, C_k\}$ найти потенциал $\tilde{q}(x)$, который имеет ровно эти характеристики дискретного спектра, а характеристики непрерывного спектра такие же, как у какого-либо канонического потенциала, например равного константе A. Такие потенциалы допускают явное представление в элементарных функциях; например, если $A=0$, то такой потенциал имеет вид [1,5]

$$\tilde{q}(x)=2\frac{d^2}{dx^2}\ln|\det W(x)|, \tag{4}$$

где элементы $W(x)$ имеют вид

$$W_{sr}=\frac{2sh(\lambda_s+\lambda_r)x}{\lambda_s+\lambda_r}-(1-\sigma_{sr})\frac{2sh(\lambda_s-\lambda_r)x}{\lambda_s-\lambda_r}-\sigma_{sr}\left(2x-\frac{4\lambda_r^2}{C_r}\right),$$

и $\lambda_s = \sqrt{-t_s}$. Вычислительные примеры [3] показали, что для потенциалов $q(x)$, возникающих в соответствующих обратных акустических задачах, выписанное выше приближение $\tilde{q}(x)$ дает неплохие результаты. Объяснение этого заключается в том, что потенциал $q(x)$ в таких задачах имеет вид

$$q(x) = -\frac{\omega^2 \rho(x)}{\lambda(x)} + \frac{(\sqrt{\rho(x)})"}{\sqrt{\rho(x)}}.$$

Если ω достаточно велико, то потенциал $q(x)$ становится большим по модулю и отрицательным, и поэтому в задаче (1),(2) возникает большое число отрицательных собственных значений $n = n(\omega)$, асимптотически равное (по формуле Вейля [6])

$$n(\omega) \approx \int_0^\infty |q_-(x)|^{1/2} dx, \tag{5}$$

где

$$q_-(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } q(x) > 0, \\ q(x), & \text{если } q(x) \leq 0. \end{cases}$$

Это дает основание заключить, что с ростом ω дискретный спектр несет все большую информацию о потенциале. Это предположение подтверждено следующими строгими результатами.

1. Для задачи Штурма-Лиувилля на всей оси из работ Лакса и Ливермура [6] вытекает, что для потенциалов вида

$$q(x) = -\omega^2 p(x), \quad \text{при } p(x) > 0, \tag{6}$$

где $p(x) \to 0$ достаточно быстро при $x \to \infty$, $p(x)$ – дифференцируема и имеет конечное число экстремумов, потенциал $\tilde{q}(x)$, имеющий те же характеристики дискретного спектра $\{t_k\}$ и $\{C_k\}$, что и $q(x)$, и представимый в виде

$$\tilde{q}(x) = 2\frac{d^2}{dx^2} \ln|\det(A_{mn})|,$$

где

$$A_{mn} = \delta_{mn} + \frac{C_n}{\sqrt{-t_n} + \sqrt{-t_m}} \exp(-(\sqrt{-t_n} + \sqrt{-t_m})x),$$

приближается к потенциалу $q(x)$ в L^2-норме

$$\frac{||\tilde{q}(x) - q(x)||L_2[\mathbf{R}]}{\omega^2} \to 0 \qquad \text{при } \omega \to \infty;$$

2. Для задачи Штурма-Лиувилля на полуоси в предположении, что $q(x) = -\omega^2 p(x)$, где $p(x) > 0$, $p(x) \to 0$ достаточно быстро при $x \to \infty$ вместе с двумя производными

$$Q = \int_0^\infty (1+x)|p(x)|dx + \sum_{j=1}^{2} \int_0^\infty |\frac{p^{(j)}(x)}{p(x)}|dx < \infty,$$

имеет место следующая оценка:

$$\left| \int_0^x \left[\frac{\tilde{q}(y) - q(y)}{\omega^2} \right] dy \right| \le \frac{\mathrm{const}(x, Q)}{\omega^2},$$

где $\tilde{q}(x)$ – потенциал, характеристики отрицательного спектра которого совпадают с соответствующими характеристиками потенциала $q(x)$, а характеристики непрерывного спектра – с соответствующими характеристиками постоянного потенциала $q(0)$.

Близкое утверждение сформулировано в [4]. Подробное доказательство будет дано в другой статье. Указанные результаты подтверждены рядом вычислительных экспериментов. Представляет интерес выяснить границы применимости этих результатов.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Настоящая работа посвящена вычислительным экспериментам, связанным с выяснением возможности аппроксимации потенциала $q(x)$ потенциалами $\tilde{q}(x)$, когда не выполнены те или иные условия в сформулированных результатах. Или иначе, что можно восстановить в потенциале $q(x)$ по характеристикам дискретного спектра, если он не полностью удовлетворяет приведенным выше условиям.

Итак, в этой статье мы постарались ответить на следующие вопросы.

1. Как влияют разрывы в потенциале $q(x)$ на возможность его восстановления?
2. Что можно восстановить в потенциале $q(x)$ по характеристикам дискретного спектра, если знак потенциала $q(x)$ изменяется?
3. Что можно восстановить в потенциале $q(x)$, если характеристики дискретного спектра известны лишь для собственных значений $\le (-B\omega^2)$, где $B > 0$?
4. Как влияет размер носителя потенциала на точность его восстановления?
5. Как влияет на возможность восстановления потенциала $q(x)$ использование вместо $\tilde{q}(x)$ вида (4) потенциала со свойствами: характеристики дискретного спектра, как у $q(x)$, а характеристики непрерывного спектра, как у потенциала, равного, например, константе B?

Влияние разрывов потенциала на его восстановление

В сформулированных выше математических результатах сходимость потенциала $\tilde{p}(x)$ к потенциалу $p(x)$ (для положительных потенциалов $p(x)$, или, что то же, для отрицательных потенциалов $q(x) = -\omega^2 p(x)$) обоснована в предположении достаточной гладкости этих потенциалов. Вычислительный опыт (см. [3]) показывает, что сходимость имеет место не только для гладких, но и для кусочно-гладких потенциалов с небольшими разрывами. Согласно вычислениям настоящей работы наличие больших разрывов ставит пределы для точности приближения $\tilde{p}(x)$ к $p(x)$. Действительно, на рис. 1,*a* потенциал $p(x)$, состоящий из трех ступенек, имеет небольшие разрывы и в этом случае аппроксимация улучшается с увеличением ω.

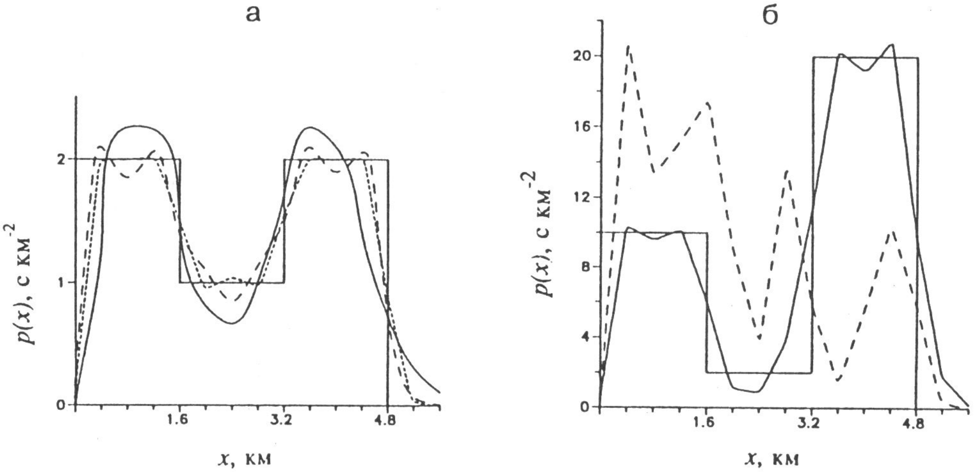


Рис. 1. Аппроксимация (4) потенциала $q(x) = -\omega^2 p(x)$, заданного в виде трехступенчатой функции

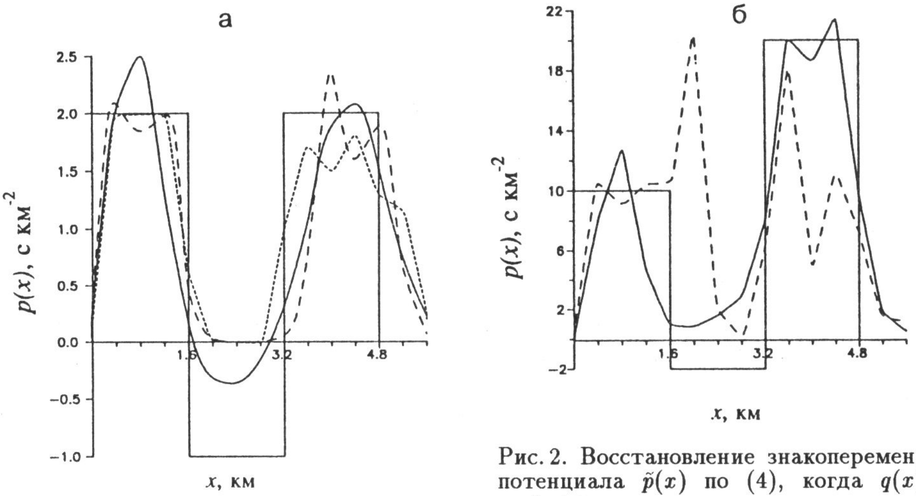
а – улучшение аппроксимации при увеличении ω^2 в случае небольших разрывов, аппроксимирующие потенциалы $\tilde{p}(x)$ рассчитаны при $\omega^2 = 1, 10$ и 20 (соответственно сплошная, штриховая и пунктирная линия); *б* – ухудшение аппроксимации при увеличении ω^2 в случае значительных разрывов потенциала, аппроксимирующие потенциалы $\tilde{p}(x)$ рассчитаны при $\omega^2 = 1$ и 4 (соответственно сплошная и штриховая линия)

В случае, когда разрывы достаточно велики (см. рис. 1,*б*), увеличение ω не только не улучшает, а даже ухудшает точность аппроксимации. Отметим, что в данном эксперименте использовались все характеристики дискретного спектра, найденного для потенциала $q(x) = -\omega^2 p(x)$ методом из [7], в который были внесены необходимые изменения; затем эти характеристики подставлялись в формулу (4) и методом из [8] рассчитывались потенциалы $q(x)$. Эти примеры указывают на существенную зависимость точности приближения $\tilde{p}(x)$ к $p(x)$ от степени гладкости $p(x)$ (например, от введенной выше константы Q). Для выявления сходимости (хотя бы медленной) $\tilde{p}(x)$ к $p(x)$ для сильно разрывных $p(x)$ необходима чрезвычайно высокая точность вычислений в прямой задаче.

В.М. Маркушевич предложил следующее объяснение обсуждаемого феномена. Чем глубже волновод, тем резче контраст между поверхностными волнами и волнами, захваченными волноводом; в этой ситуации очень трудно отличить моды второго типа от мод первого типа. Таким образом, точность вычислений должна быть чрезвычайно высокой, особенно в прямой задаче. Когда точность вычислений достаточно высока, точность восстановления потенциала снова возрастает с увеличением частоты.

Восстановление знакопеременного потенциала

Если потенциал $q(x) > 0$ при всех x, т.е. в формуле (6) $p(x) < 0$ при всех x, то о восстановлении $q(x)$ по характеристикам дискретного спектра говорить не приходится, так как такого спектра просто не существует [9]. В случае знакопеременного потенциала формула Вейля показывает, что число собственных значений



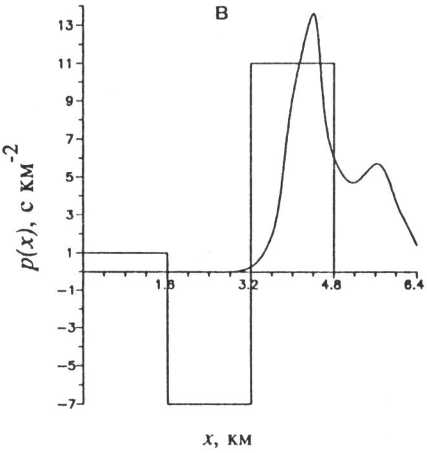


Рис. 2. Восстановление знакопеременного потенциала $\tilde{p}(x)$ по (4), когда $q(x) = -\omega^2 p(x)$ при варьировании параметра ω и при различных значениях разрывов потенциала $p(x)$, заданного в виде трехступенчатой функции

а – восстановление положительной части потенциала и отсутствие восстановления его отрицательной части при небольших разрывах $p(x)$ для $\omega^2 = 1, 10$ и 20 (соответственно сплошная, штриховая и пунктирная линия); *б* – ухудшение восстановления потенциала в случае значительных разрывов $p(x)$ для $\omega^2 = 1$ и 2 (соответственно сплошная и штриховая линия); *в* – отсутствие восстановления отрицательной части $p(x)$ при $\omega^2 = 1$, аппроксимирующий потенциал $\tilde{p}(x)$ изображен сплошной линией

зависит от интеграла отрицательной части $q(x)$ (см. (5)). Возникает естественная гипотеза, что по характеристикам дискретного спектра в общем случае можно восстановить (с точностью, возрастающей с увеличением ω) именно отрицательную часть потенциала $q(x)$ и нельзя восстановить его положительную часть. В подтверждение этой гипотезы проведен следующий эксперимент. Взяты несколько характерных потенциалов $p(x)$, имеющих как положительные, так и отрицательные части. Характеристики дискретного спектра для потенциала $q(x) = -\omega^2 p(x)$, найденные методом, предложенным [7], подставлялись в (4) и по алгоритму из [8] рассчитывались потенциалы $\tilde{q}(x)$.

На рис. 2,*а* изображен потенциал $p(x) = -q(x)/\omega^2$, состоящий из трех ступенек: двух крайних положительных и одной средней отрицательной. С увеличением ω с неплохой точностью реконструируются крайние положительные ступеньки (соответствующие отрицательным частям потенциала $q(x)$) и исчезает какое-бы то ни было восстановление отрицательной ступеньки $p(x)$.

Рис. 2,*б* показывает, что увеличение частоты не только не приводит к восстановлению отрицательной ступеньки $p(x)$, но и ухудшает его на участках, которые должны были бы хорошо реконструироваться, что, на наш взгляд, связано со значительным возрастанием скачков потенциала $q(x) = -\omega^2 p(x)$ при увеличении ω.

Рис. 2,*в* также дает подтверждение высказанной ранее гипотезы о невозможности восстановления отрицательной ступеньки $p(x)$.

Исключение малых волновых чисел при восстановлении потенциала

Представляет значительный интерес исследование следующего вопроса: какую часть потенциала $p(x)$ можно восстановить, если при достаточно большом ω известны характеристики дискретного спектра потенциала $q(x) = -\omega^2 p(x)$ с собственными значениями, не превосходящими $-B\omega^2$, $B > 0$. Графики на рис. 3,*а*

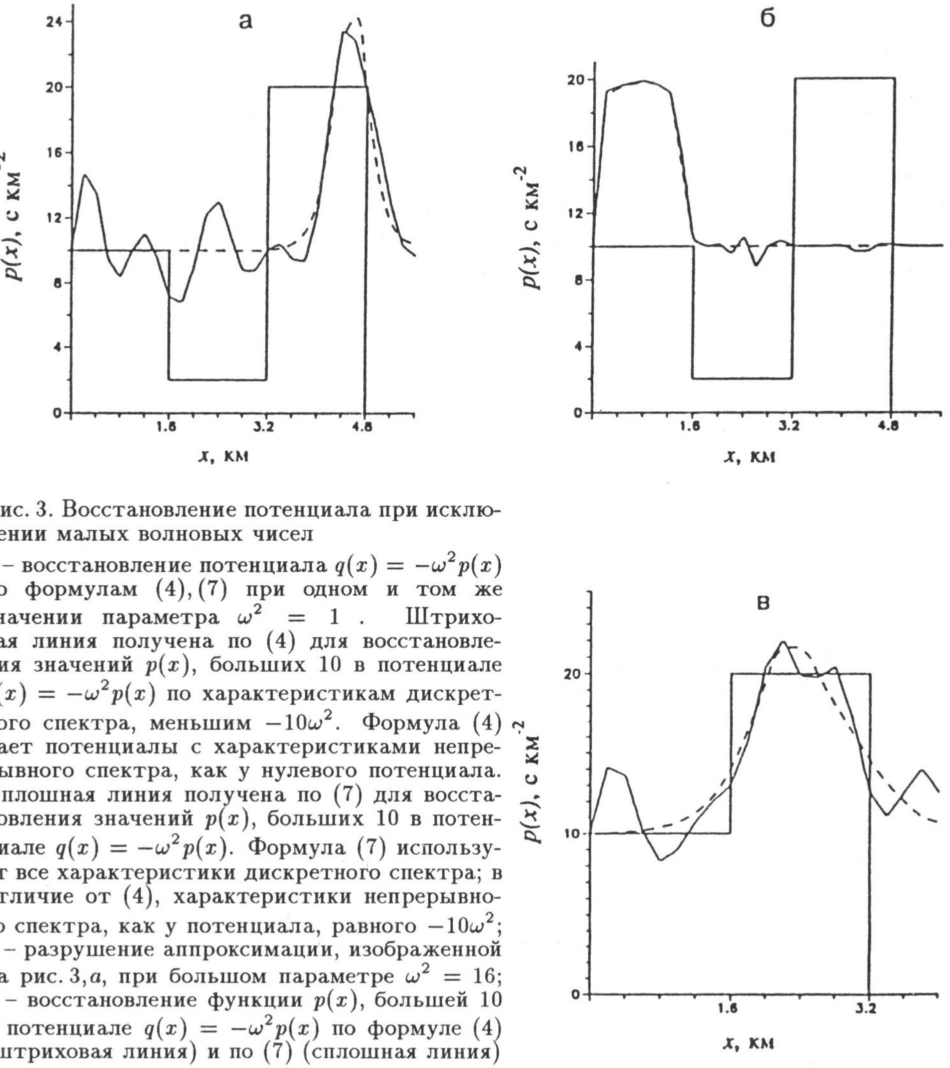


Рис. 3. Восстановление потенциала при исключении малых волновых чисел

а – восстановление потенциала $q(x) = -\omega^2 p(x)$ по формулам (4), (7) при одном и том же значении параметра $\omega^2 = 1$. Штриховая линия получена по (4) для восстановления значений $p(x)$, больших 10 в потенциале $q(x) = -\omega^2 p(x)$ по характеристикам дискретного спектра, меньшим $-10\omega^2$. Формула (4) дает потенциалы с характеристиками непрерывного спектра, как у нулевого потенциала. Сплошная линия получена по (7) для восстановления значений $p(x)$, больших 10 в потенциале $q(x) = -\omega^2 p(x)$. Формула (7) использует все характеристики дискретного спектра; в отличие от (4), характеристики непрерывного спектра, как у потенциала, равного $-10\omega^2$; *б* – разрушение аппроксимации, изображенной на рис. 3,*а*, при большом параметре $\omega^2 = 16$; *в* – восстановление функции $p(x)$, большей 10 в потенциале $q(x) = -\omega^2 p(x)$ по формуле (4) (штриховая линия) и по (7) (сплошная линия) и 3,*б* позволяют сформулировать следующую естественную гипотезу. При подходящих условиях на гладкость потенциала характеристики дискретного спектра на полуоси $t < -B\omega^2$ при больших ω позволяют восстановить потенциал $p(x)$ в точках, где $p(x) > B$ и не позволяют восстановить $p(x)$ в точках, где $p(x) < B$. Это находится в хорошем соответствии с результатами, представленными в предыдущем разделе, где $B = 0$. Такого типа эффект уже был замечен в работах [3,9], где рассматривался монотонно убывающий потенциал. В этом случае при выбрасывании (из всего набора характеристик дискретного спектра) собственных значений, по модулю меньших некоторой константы, не восстанавливался лишь участок потенциала при x, больших соответствующей константы. Действительно, на рис. 3,*а,б* рассмотрены потенциалы $p(x)$ из трех положительных ступенек, из которых две крайние имеют высоту, равную или большую $B = 10$, а средняя ступенька имеет высоту ниже уровня $B = 10$. В этом случае использование в аппроксимационной формуле (4) для $\tilde{q}(x) = -\omega^2\tilde{p}(x)$ спектральных данных $\{t_k\}, \{C_k\}$ на спектральной полуоси $t < -10\omega^2$ приводит к неплохому приближению $\tilde{p}(x)$ к $p(x)$ там, где $p(x) \geq 10$, и к отсутствию приближения $\tilde{p}(x)$ к $p(x)$ там, где $p(x) < 10$ (см. рис. 3,*а*). Интересно, что этот эффект получен для немонотонного потенциала. Рис. 3,*б*, хотя и подтверждает гипотезу об отсутствии приближения $\tilde{p}(x)$ к $p(x)$ на участках, где $p(x) < 10$, но увеличение ω в 4 раза приводит к разрушению приближения $\tilde{p}(x)$ к $p(x)$ и на участках, где $p(x) \geq 10$ из-за увеличения разрывов.

Фактически, приближение $\tilde{p}(x)$ к $p(x)$ по неполным спектральным данным строилось следующим образом. Рассматривался потенциал $q(x) = -\omega^2 p(x)$. Находились собственные значения $t_1 < \cdots < t_n$, соответствующие задаче Штурма-Лиувилля (1),(2), и вычеты функций Вейля $C_1, \ldots, C_n$. Далее брались только собственные значения $t_j < -B\omega^2$, где $j = 1, \ldots, k$, и соответствующие $C_1, \ldots, C_k$. Затем, в формуле (4) использовались $\lambda_j = \sqrt{|t_j + B\omega^2|}$, $j = 1, \ldots, k$, и $C_1, \ldots, C_k$. В качестве $\tilde{p}(x)$ принимались $(-q(x) + B\omega^2)/\omega^2$.

Влияние геометрии носителя

Формула Вейля (5) показывает, что число отрицательных собственных значений зависит от интеграла отрицательной части $q_-(x)$ потенциала $q(x)$. Поэтому может показаться, что для функций с большим интегралом от отрицательной части $q_-(x)$ точность восстановления будет выше. На рис. 4 показано, что удлинение положительной ступеньки $p(x)$, т.е. отрицательной для $q(x)$, хотя и увеличивает число собственных значений, однако не увеличивает точности аппроксимации $p(x)$ по характеристикам дискретного спектра на полуоси $t < -10\omega^2$ (ср. с рис. 3,*а*). На рис. 4 хотя и отсутствует приближение $\tilde{p}(x)$ к $p(x)$ на участках, где $p(x) < 10$, но увеличение ω в 2 раза приводит к ухудшению приближения $\tilde{p}(x)$ к $p(x)$ на участках, где $p(x) \geq 10$ из-за увеличения разрывов (ср. с рис. 3,*в*).

Выбор потенциала, задающего непрерывный спектр

Основная вычислительная формула (4) дает потенциал $q(x)$, имеющий характеристики дискретного спектра, как у потенциала, равного нулю. Условие, что характеристики непрерывного спектра для потенциала $q(x)$ такие же, как у нулевого, принято, во-первых, потому, что исходный потенциал на бесконечности

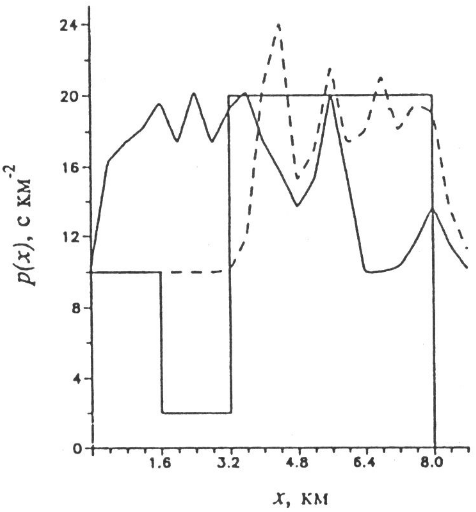


Рис. 4. Влияние геометрии носителя на восстановление потенциала. Удлинение ступеньки в функции $p(x)$ приводит к увеличению числа отрицательных собственных значений для потенциала $q(x) = -\omega^2 p(x)$, но не приводит к улучшению точности аппроксимации $p(x)$ по формуле (4) (штриховая линия). Большое значение параметра ω приводит к разрушению аппроксимации $p(x)$ по формуле (4) (сплошная линия)

стремится к нулю, и, во-вторых, из-за отсутствия информации о непрерывном спектре. Казалось бы, можно для аппроксимации использовать потенциалы $q(x)$, которые имеют характеристики непрерывного спектра, как у любого другого фиксированного потенциала, например равного константе. При этом можно было бы рассчитывать на какой-то наилучший выбор константы. Константа в качестве опорного потенциала удобна тем, что соответствующий потенциал $q(x)$ при любой фиксированной константе может быть найден явной формулой

$$\tilde{q}(x) = \tilde{B} + 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\det|W(x)|, \tag{7}$$

где $\tilde{B} = B\omega^2$.

$$W_{sr}^{11} = \frac{2sh(\lambda_s+\lambda_r)x}{\lambda_s+\lambda_r} - (1-\delta_{sr})\frac{2sh(\lambda_s-\lambda_r)x}{\lambda_s-\lambda_r} - \delta_{sr}\left(2x - \frac{4\lambda_r^2}{C_r}\right),$$

$$W_{sr}^{12} = W_{rs}^{21} = \frac{-4}{\lambda_s^2+\mu_r^2}[\mu_r\cos(\mu_r x)sh(\lambda_s x) - \lambda_s\sin(\mu_r x)ch(\lambda_s x)],$$

$$W_{sr}^{22} = \frac{2\sin(\mu_s+\mu_r)x}{\mu_s+\mu_r} + (1-\delta_{sr})\frac{2\sin(\mu_s-\mu_r)x}{\mu_s-\mu_r} + \delta_{sr}\left(2x - \frac{4\mu_r^2}{D_r}\right),$$

причем

$$\lambda_i^2 = -t_i - B, \qquad i = 1,\dots,k,$$
$$\mu_j^2 = t_j + B, \qquad j = 1,\dots,n-k,$$

где k – такой номер, что $-t_i - B > 0$, $i = 1,\dots,k$, и $t_j + B > 0$, $j = 1,\dots,n-k$. $C_i = C_j$, $i = 1,\dots,k$; $D_j = C_{k+j}$, $j = 1,\dots,n-k$.

Предложение. Потенциал, полученный по формуле (7), имеет характеристики дискретного спектра, как у потенциала $q(x)$, а характеристики непрерывного спектра, как у потенциала, равного константе B.

С вычислительной точки зрения формула (4) потребовала достаточно сложного алгоритма для реализации на компьютере. И даже с таким алгоритмом (см. [8]) счет больших матриц требует заметного времени. Счет же по формуле (7), где количество величины μ_j больше по сравнению с λ_i, требует гораздо меньших затрат времени. Поэтому казалось, что, выбирая опорный потенциал в виде большой отрицательной константы, мы можем пользоваться формулой (7) вместо формулы (4), чтобы получить, по крайней мере, тот же результат, но с меньшей затратой времени. Но результат оказался неожиданным: введение отрицательной константы и, вместе с этим, введение μ_j оказалось практически эквивалентно тому, что мы исключили информацию о части дискретного спектра, поскольку на рис. 3,*а*–*в* результат восстановления по формуле (7) не лучше восстановления по формуле (4) (см. рис. 3,*а*–*в*, где выбрасывалась информация о части дискретного спектра).

Тем самым, искусственные параметры $\mu_j^2 = t_j + B$, играющие роль положительных собственных значений, сказываются только на поведении аппроксимирующего потенциала на бесконечности и не помогают восстановить потенциал $q(x)$ в конечной области.

Итак, наилучшее приближение $\tilde{q}(x)$ к $q(x)$ получается, если строить потенциал $\tilde{q}(x)$, у которого характеристики отрицательного дискретного спектра, как у потенциала $q(x)$, а характеристики положительного и непрерывного спектра, как у потенциала, равного нулю.

Благодарности. Автор выражает благодарность Ж.П. Монтанер, Laboratoire de Seismologie Global Института Физики Земли (Париж) за поддержку этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М: Наука, 1984. 240 с.
2. *Pekeris C.L.* An inverse boundary problem in seismology // Physics. 1934, Vol.5. P.307–316.
3. *Маркушевич В.М., Новикова Н.Н., Повзнер Т.А., Савин И.В., Федоров В.Е.* Метод определения акустического профиля по нормальным монохроматическим волнам. // Математические методы в сейсмологии и геодинамике. М: Наука, 1987. С.174–185. (Вычисл. сейсмология; Вып. 19).
4. *Новикова Н.Н., Хенкин Г.М.* О восстановлении оператора Штурма-Лиувилля по характеристикам дискретного спектра // Численное моделирование и анализ геофизических процессов. М: Наука, 1987. С.174–185. (Вычисл. сейсмология; Вып. 20).
5. *Маркушевич В.М., Новикова Н.Н., Резников Е.Л.* Представление потенциала в явном виде через рациональную функцию Вейля для задачи Штурма-Лиувилля на полуоси // ДАН. 1984 Т. 278, N 5. С.1095–1097.
6. *Lax P.D., Levermore C.D.* The small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation. I. Communication on pure and applied mathematics. 1983, Vol. XXXYI. P.253–290.
7. *Левшенко В.Т., Маркушевич В.М., Резников Е.Л.* О расчете смещений среды при вибрsurvey зондировании крутильными колебаниями // Математические модели строения Земли и прогноза землетрясений. М: Наука, 1982. С.134–147. (Вычисл. сейсмология; Вып. 14).
8. *Маркушевич В.М., Новикова Н.Н.* Метод вычисления потенциалов для некоторых рациональных импедансов М: 1984. 72 с. Деп. в ВИНИТИ 5.11.84. N 7583-84.
9. *Шадан К., Сабатье П.* Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М: Мир, 1980. 408 с.