

УДК 550.36

ТЕПЛОВАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ЗАСТЫВАЮЩИХ МАГМАТИЧЕСКИХ КАМЕР

Е.А. Горбылева, В.П. Трубицын

Объединенный институт физики Земли Российской академии наук

Рассчитывается эволюция температурного поля внутри застывающей магматической камеры и в окружающем массиве. Рассматривается теплопроводный массив с геотермическим градиентом температуры, содержащий слой вязкого горячего расплава. В расплаве устанавливается тепловая конвекция и одновременно из-за отвода тепла в окружающий массив происходит остывание магматической камеры. Сначала вещество окружающего массива плавится вблизи камеры, а затем начинает затвердевать вплоть до окончательного перехода всего расплава в твердое состояние. В двумерной модели решаются уравнение тепловой конвекции для расплава и уравнение теплопереноса в массиве. Используется метод сквозного счета с движущейся границей фронта затвердевания. Задача сводится к решению обобщенных уравнений тепловой конвекции, в которые входит эффективная теплоемкость, учитывающая выделение тепла в задаче Стефана. Кроме того, в правую часть уравнения Навье-Стокса вводится дополнительная функция продолжения. Она выбирается такой, чтобы в области расплава используемые уравнения переходили в обычные уравнения тепловой конвекции, а в области массива – сводились к уравнению кондуктивного переноса тепла. Рассчитываются тепловые режимы магматических камер при различных размерах и глубинах залегания, а также изменения во времени тепловых потоков на фронте затвердевания и на дневной поверхности Земли.

THERMAL EVOLUTION OF COOLING MAGMA CHAMBERS

E. A. Gorbylova and V. P. Trubitsyn

United Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences

We calculate the evolution of temperature fields in magma chambers and surrounding material. In a suggested 2-D model, a viscous hot melt occupies a horizontal layer (a magma chamber) within a thicker solid layer. The geometry of this system and a temperature gradient in its solid part are initial conditions. Thermal convection starts in the melt and the magma chamber begins to cool, due to heat loss through conduction in the surrounding solid medium. Melting occurs at liquid/solid interfaces, followed by solidification of the melt. We solve equations of thermal convection and heat conduction in liquid and solid regions, respectively. Numerical solutions are obtained by the "through passage" method where equations are applied to the whole region and the moving phase boundary results from calculations. The problem so formulated reduces to generalized equations of thermal convection with the effective heat capacity which includes heat generation in the Stefan problem. An additional

function enters the right-hand side of the Stokes equation. This function is such that generalized equations reduce to usual equations of thermal convection within the melt and to the heat conduction equation in the solid part of the system. We calculate thermal regimes of magmatic chambers for various geometries. We also obtain time dependence of heat flows at liquid/solid interfaces and at the earth's surface.

ВВЕДЕНИЕ

Изучению процессов, происходящих в магматических камерах, посвящено много исследований, проводившихся в последние 20 лет (см., например, [1-13]). В магматических камерах градиенты температуры и концентрации связаны с остыванием и частичной кристаллизацией расплава. Изменение плотности ведет к дифференциальному движению расплава и кристаллов, и основной задачей является объяснение того, как это может привести к химической дифференциации магмы. До недавних пор проблемы теплопереноса и кристаллизации обсуждались в основном качественно. Достаточно полное описание процесса кристаллизации магматической камеры затрудняется из-за необходимости учета: 1) одновременно протекающих взаимосвязанных процессов переноса тепла теплопроводностью и конвекцией, 2) переноса массы диффузией, седиментацией и композиционной конвекцией, 3) сложной, меняющейся во времени геометрии камеры. Современные физические модели, позволяющие комплексно исследовать магматические процессы, используют упрощенные физические постановки задач для изучения связанных между собой процессов тепломассопереноса, процесса остывания магматической камеры, определения границ жидкой и твердой фаз.

Конвекция, происходящая внутри Земли, на ее поверхности проявляется в виде взаимно перемещающихся плит. Плиты могут двигаться под действием различных сил, одна из которых воздействует на плиту в ее основании. Плюм выносит к поверхности Земли глубинное вещество мантии. Уменьшение давления в веществе плюма приводит к росту содержания в нем расплава, что в еще большей степени ведет к подъему плюма. Этим же объясняется повышенная вулканическая активность в районах горячих точек, в основе которой лежит механизм дифференциации вещества плюма: более легкая расплавленная фаза отделяется от твердого остатка.

В настоящей работе рассматривается одна из стадий общего процесса эволюции магматической камеры, а именно – ее охлаждение после внедрения горячей магмы в литосферу и последующее ее затвердевание. При этом эта задача решается в упрощенной постановке: вещество магматической камеры считается однокомпонентным, для которого температура солидуса и температура ликвидуса совпадают и не учитывается зависимость вязкости от давления и температуры.

Целью работы является исследование влияния вышележащих слоев окружающего массива на скорость застывания и характер конвекции в магматической камере. Часто в работах при исследовании тепловой эволюции магматической камеры не учитывается влияние вышележащих слоев массива, а на верхней границе магматической камеры принимается условие либо фиксированной температуры, либо фиксированного теплового потока. В настоящей работе решается задача остывания магматической камеры внутри теплопроводного массива с учетом тепловой

конвекции внутри самой камеры, в частности определяется изменение температуры на границах камеры и движение верхней и нижней границ расплава по мере его затвердевания.

Для численного решения системы уравнений теплопереноса применяется метод среднего поля, который впервые использовался для изучения конвективных процессов в атмосфере, а затем и для тепловой конвекции в Земле [14, 15]. Этот метод позволяет существенно упростить имеющуюся систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, сведя двумерную постановку задачи к одномерной, и тем самым дает возможность быстро рассчитать много вариантов задачи с различными размерами магматических камер и глубинами их залегания.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Основной задачей является расчет конвекции расплава, внедренного в окружающий массив. При этом в процессе эволюции граница расплав-твердое тело перемещается.

Уравнения тепловой конвекции для слоя вязкой жидкости

Рассмотрим сначала тепловую конвекцию в слое с неподвижными границами. Система уравнений движения нагретой вязкой жидкости в поле силы тяжести, включающая в себя уравнение движения Навье-Стокса, уравнение неразрывности и уравнение переноса тепла, имеет вид

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (1.2)$$

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q}. \quad (1.3)$$

Здесь $\mathbf{V} = \{U, V, W\}$ – поле скоростей, P – давление, η – динамическая вязкость, $\mathbf{g}$ – ускорение силы тяжести, ρ – плотность, T – абсолютная температура, C_p – теплоемкость, $\mathbf{q} = \kappa \nabla T$ – кондуктивный тепловой поток (где $\kappa = \rho C_p k$ – коэффициент теплопроводности, k – коэффициент температуропроводности). К вышеописанным уравнениям нужно добавить уравнение состояния среды

$$\rho = \rho(T, P) = \rho_0(1 - \alpha T), \quad (2)$$

где α – коэффициент теплового расширения.

Будем отсчитывать температуру от адиабатического распределения, давление – от гидростатически равновесного, а плотность считать постоянной во всех членах уравнений, кроме ее температурной зависимости в члене $\rho \mathbf{g}$. Тогда уравнения (1.1)–(1.3), пренебрегая инерционными членами $d\mathbf{V}/dt$ – что соответствует приближению Буссинеска в тепловой конвекции, можно переписать в виде

$$-\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{V} - \alpha T \mathbf{g} = 0, \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (3.2)$$

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) T \right) = \kappa \nabla^2 T, \quad (3.3)$$

где $\nu = \eta/\rho_0$ – кинематическая вязкость, а P и T – указанные выше отклонения.

Уравнения (3.1)–(3.3) вместе с уравнением состояния (2) образуют замкнутую систему для определения $T(t, x, y, z)$, $\mathbf{V}(t, x, y, z)$, $P(t, x, y, z)$, $\rho(t, x, y, z)$.

В качестве граничных условий обычно выбирают либо фиксированную температуру на верхней и нижней поверхностях, либо фиксированный тепловой поток, либо используются более сложные смешанные условия.

Уравнения тепломассопереноса для теплопроводной среды, содержащей расплавленный слой с движущимися фронтами затвердевания

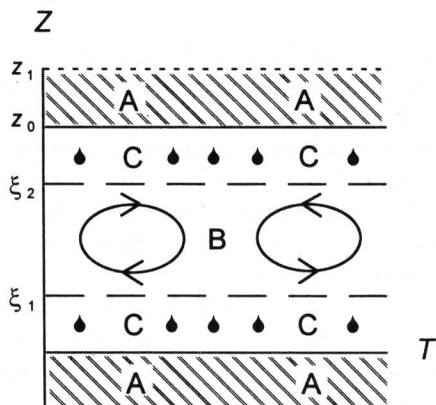
Рассмотрим модель теплопроводного массива толщиной $z_1 = d$, внутри которого находится расплавленный слой вязкой жидкости толщиной $l = \xi_2 - \xi_1$. В этом случае в области пространства, занимаемой расплавом $\xi_1 < z < \xi_2$ (рис. 1), можно использовать уравнения тепловой конвекции (3.1)–(3.3), а в области твердого массива $0 < z < \xi_1$, $\xi_2 < z < d$ – обычное уравнение теплопроводности $\partial T/\partial t = k \nabla^2 T$. При этом на границах расплавленного слоя нужно использовать условие непрерывности температуры

$$T_C|_{z=\xi_1} = T_B|_{z=\xi_1}, \quad T_B|_{z=\xi_2} = T_C|_{z=\xi_2}. \quad (4)$$

Здесь В – область расплава, находящегося в состоянии конвекции, С – область застывшей магмы.

Рис. 1. Схематическое изображение остывающей магматической камеры в произвольный момент времени

В начальный момент расплав занимает всю область от $z = 0$ до $z = z_0$. В – область жидкого расплава, А, С – области твердого окружающего теплопроводного массива и затвердевшей магмы, соответственно



Если граница фронта затвердевания движется, то, кроме переноса тепла теплопроводностью, происходит выделение теплоты плавления и условие непрерывности теплового потока заменяется условием Стефана

$$\left(k_C \frac{\partial T_C}{\partial z} - k_B \frac{\partial T_B}{\partial z} \right) \Big|_{z=\xi_1} \Delta t = \lambda \rho \Delta \xi, \quad (5)$$

где λ – удельная теплота плавления, $\Delta\xi$ – смещение границы.

Левая часть выражения (5) представляет собой количество тепла, подходящего к границе ξ_1 с одной стороны и уходящего с другой за время Δt , а правая часть выражает количество тепла, выделяющееся при затвердевании массы вещества $\rho\Delta\xi$ за время Δt . Здесь $\Delta\xi$ – расстояние, на которое переместился фронт затвердевания за время Δt , а $d\xi/dt$ – скорость его движения.

В такой постановке задача сводилась бы к решению уравнения теплопроводности для слоев А и С и системы уравнений тепловой конвекции для слоя В, а затем к "сшиванию" этих решений на границах $z = \xi_1$, $z = \xi_2$. При численном решении систем уравнений удобнее пользоваться не "сшиванием", а сквозной схемой счета. Для этого вместо условия Стефана вводится эффективная теплоемкость [16], а в уравнение Навье-Стокса вводится эффективный коэффициент продолжения [17]. Выделение тепла при затвердевании можно эффективно описать как аномальное увеличение теплоемкости в области затвердевающего слоя

$$C_{ef} = C_0 + \lambda\delta(T - T_m), \quad (6)$$

где C_0 – удельная теплоемкость, T_m – температура плавления, $\delta(T - T_m)$ – дельта-функция Дирака.

Если проинтегрировать выражение (6) по температуре, то первый член в правой части будет представлять выделение тепла при охлаждении единицы массы вещества, а второй член – выделение тепла, обусловленное фазовым переходом.

Таким образом, после замены в уравнении теплопроводности (3.3) C_p на C_{ef} при сквозном счете автоматически будет выполняться условие Стефана (5) на границе фронта затвердевания.

В теплопроводном массиве конвективное движение отсутствует. Чтобы применить схему сквозного счета часто используют уравнения тепловой конвекции, но вязкость в области теплопроводного массива полагают на несколько порядков более высокой. В этом случае конвективный перенос тепла будет ненулевым, но пренебрежимо малым по сравнению с переносом тепла теплопроводностью. Однако, как показано в работе [17], процедуру можно существенно упростить и вместо использования модели со скачком вязкости видоизменить уравнение Навье-Стокса, формально добавив в правую часть этого уравнения функцию $F(T, W) = \varepsilon W$, где $\varepsilon = 0$ при $T > T_m$ и $\varepsilon = \varepsilon_0$ при $T < T_m$ (здесь T_m – температура плавления, ε_0 – достаточно большая константа). В области расплава ($T > T_m$) $F = 0$ и система уравнений конвекции для вязкой жидкости не изменится. В области теплопроводного массива ($T < T_m$) величину ε_0 можно подобрать достаточно большой настолько, чтобы скорости конвективных течений оказались пренебрежимо малы. В результате в области теплопроводного массива решение рассматриваемой системы уравнений будет близко к решению простого уравнения теплопроводности. При такой процедуре значительно облегчается численное решение задачи, так как не нужно следить за изменяющейся во времени границей затвердевания и "сшивать" решения для области расплава и массива.

Уравнения тепловой конвекции в безразмерных переменных

Введем безразмерные переменные. Мы рассматриваем двумерную модель теплопроводного массива толщиной d , внутри которого находится расплавленный слой вязкой жидкости толщиной $l = \xi_2 - \xi_1$. В качестве единиц измерения выберем:

$z_1 = d$ для координат, $V_0 = k/d$ для скоростей, $t_0 = d^2/k$ для времени, $p_0 = \rho_0 \nu k/d^2$ для давления, $T_0 = 1000^\circ\text{C}$ для температуры, $q_0 = C_0 \rho_0 k T_0/d$ для теплового потока. В этих безразмерных переменных уравнения (3.1)–(3.3) принимают вид

$$-\nabla P + \nabla^2 \mathbf{V} + \text{Ra} T \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} = F(T, W), \quad (7.1)$$

$$C_{\text{ef}} \frac{\partial T}{\partial t} + C_{\text{ef}} \mathbf{V} \nabla T = \nabla^2 T, \quad (7.2)$$

$$\text{div} \mathbf{V} = 0, \quad (7.3)$$

где Ra – число Рэлея массива

$$\text{Ra} = \frac{\alpha g T_0 d^3}{k \nu}, \quad (8.1)$$

$C_{\text{ef}} = 1 + \text{St} \delta(T - T_m)$ – эффективная теплоемкость и $\text{St} = \lambda/C_p T_0$ – число Стефана.

Заметим, что число Рэлея расплава, характеризующее интенсивность тепловой конвекции не совпадает с используемым нами числом Рэлея Ra всего массива. Поскольку верхняя и нижняя границы расплава являются фронтами затвердевания, находящимися при температуре плавления T_m , то в качестве эффективного числа Рэлея Ra^* , характеризующего конвекцию в расплаве, можно взять

$$\text{Ra}^* = \frac{\alpha g (T^* - T_m) l^3}{k \nu}, \quad (8.2)$$

где T^* – температура расплава внутри магматической камеры.

Неизвестными функциями являются: вектор скорости – $\mathbf{V} = \{U(t, x, z), W(t, x, z)\}$, температура $T(t, x, z)$, давление $P(t, x, z)$.

В качестве граничных условий для температуры примем условие $T = 0$ при $z = z_1$ (на верхней границе) и $T = T_b$ при $z = 0$ (на нижней). Для скоростей на обеих границах примем условие непротекания, т.е. равенство нулю вертикальной составляющей скорости $W = 0$ и условие прилипания, т.е. равенство нулю горизонтальной составляющей скорости $U = 0$.

Чтобы исключить давление из системы уравнений (7.1)–(7.3) надо применить к уравнению движения операцию rot rot и спроецировать получившееся векторное уравнение на ось Z , направленную вверх. Тогда получим систему уравнений для нахождения трех неизвестных функций $U(t, x, z)$, $W(t, x, z)$ и $T(t, x, z)$:

$$\nabla^4 W + \text{Ra} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = F(T, W), \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad (9.2)$$

$$C_{\text{ef}} \frac{\partial T}{\partial t} + C_{\text{ef}} U \frac{\partial T}{\partial x} + C_{\text{ef}} W \frac{\partial T}{\partial z} = \nabla^2 T. \quad (9.3)$$

Уравнения среднего поля

Будем решать систему уравнений (9.1)–(9.3) методом среднего поля, т.е. будем искать решение для температуры в виде суммы

$$T(t, x, z) = \bar{T}(t, z) + \theta(t, x, z), \quad (10)$$

где $\bar{T}(t, z)$ – поле температуры, усредненное по горизонтали, $\theta(t, x, z)$ – отклонение (флуктуация) температуры от ее усредненного по горизонтали значения.

После некоторых преобразований (см. Приложение) получим окончательную систему уравнений тепломассопереноса в теплопроводной среде с промежуточным расплавленным вязким слоем для решения методом сквозного счета в одномодовом приближении среднего поля, которая примет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right)^2 W = -k^2 \text{Ra} \theta + \varepsilon W, \quad (11.1)$$

$$\left(C_{\text{ef}} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \bar{T} = -C_{\text{ef}} \frac{\partial}{\partial z} (W \theta), \quad (11.2)$$

$$\left(C_{\text{ef}} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \theta = k^2 \theta - C_{\text{ef}} W \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}. \quad (11.3)$$

Система трех дифференциальных уравнений (11.1)–(11.3) содержит три неизвестные функции: $\bar{T}(z, t)$, $W(z, t)$, $\theta(z, t)$. Граничные условия для температуры в безразмерных переменных имеют следующий вид:

$$\bar{T}(0, t) = T_b, \quad \theta(0, t) = 0, \quad \bar{T}(1, t) = 0, \quad \theta(1, t) = 0. \quad (12)$$

Граничные условия для вертикальной составляющей скорости следуют из отсутствия смещений на жестких границах и записываются в виде

$$W(0, t) = 0, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)_{z=0} = 0, \quad W(1, t) = 0, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)_{z=1} = 0. \quad (13)$$

В качестве начального было принято состояние, возникшее в литосфере после впрыскивания в нее мантийного расплава. Поэтому начальное распределение температуры принималось линейным (с постоянным геотермическим градиентом) во всей рассматриваемой области, кроме слоя, занятого расплавом, в котором бралась постоянная температура (рис. 2, а, кривая $t = t_0$), превышающая температуру плавления. Далее рассчитывалась эволюция распределения температуры в окружающем массиве и в магматической камере с учетом тепловой конвекции и движения фронтов затвердевания на дне и на крыше магматической камеры. Для случая заглубленных магматических камер использовалась расчетная сетка с постоянным шагом. Когда расплав занимает всю область вплоть до поверхности, конвекция очень интенсивна, и в верхнем и нижнем погранслоях происходит резкое изменение неизвестных функций; в этом случае используется расчетная сетка с переменным шагом.

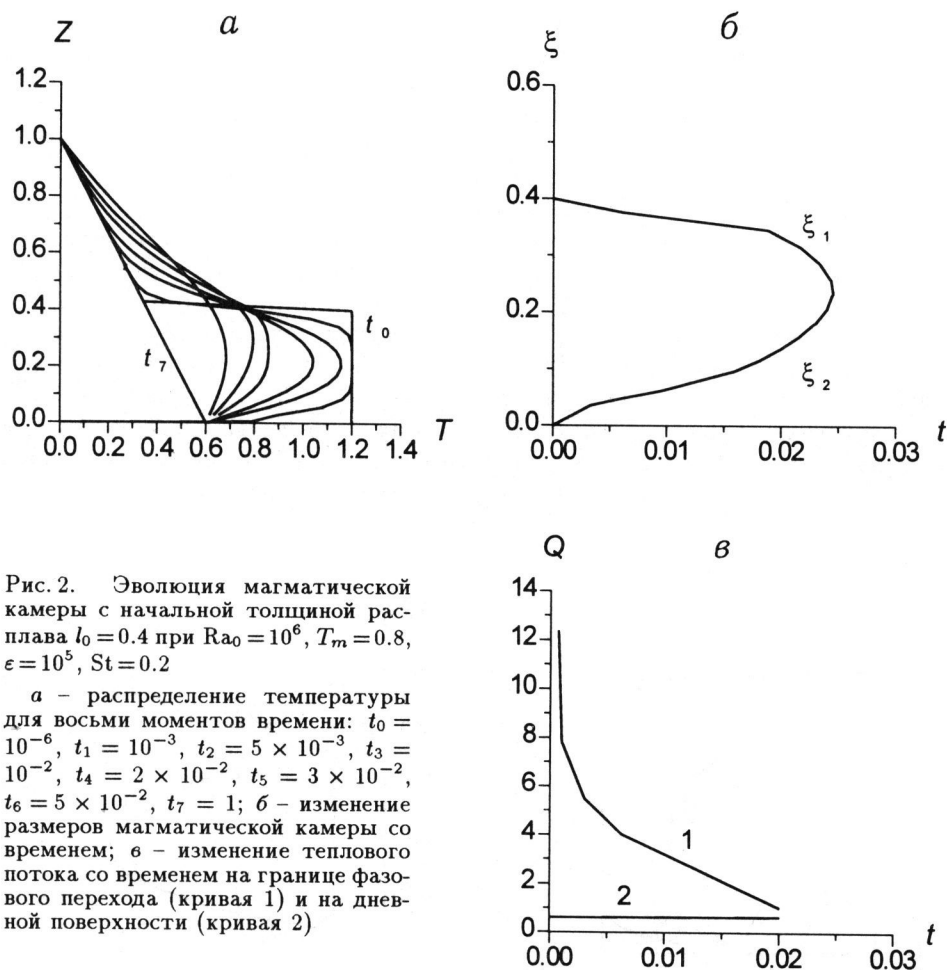


Рис. 2. Эволюция магматической камеры с начальной толщиной расплава $l_0 = 0.4$ при $Ra_0 = 10^6$, $T_m = 0.8$, $\epsilon = 10^5$, $St = 0.2$

а – распределение температуры для восьми моментов времени: $t_0 = 10^{-6}$, $t_1 = 10^{-3}$, $t_2 = 5 \times 10^{-3}$, $t_3 = 10^{-2}$, $t_4 = 2 \times 10^{-2}$, $t_5 = 3 \times 10^{-2}$, $t_6 = 5 \times 10^{-2}$, $t_7 = 1$; б – изменение размеров магматической камеры со временем; в – изменение теплового потока со временем на границе фазового перехода (кривая 1) и на дневной поверхности (кривая 2)

Решение системы нелинейных уравнений в частных производных находится численно методом прямых и методом Гира. Безразмерные переменные рассчитывались для числа Рэлея массива $Ra = 10^6$. Начальная температура расплава принималась равной $T_i = 1.2$, температура плавления 0.8, а геотермический градиент 0.6. Как указывалось выше, интенсивность тепловой конвекции расплава в магматической камере характеризуется не числом Рэлея массива, которое относится к тепловому режиму всего слоя, а эффективным тепловым числом Рэлея, по (8.2) равным

$$Ra^* = \frac{(T^* - T_m)}{T_0} \left(\frac{l}{\bar{d}} \right)^3 Ra, \quad (14)$$

а l и T^* – соответственно изменяющиеся во времени вертикальный размер и температура расплава внутри магматической камеры, T_m – температура плавления. Значение параметра ϵ_0 в определении функции $F(T, W)$ составляло 10^5 .

ТЕПЛОВАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ОСТЫВАЮЩЕЙ МАГМАТИЧЕСКОЙ КАМЕРЫ: РАСЧЕТ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим тепловые режимы магматических камер при некоторых размерах и глубинах залегания, а также изменения во времени тепловых потоков на фронте затвердевания и на поверхности Земли. Принималось, что в начальный момент $\xi_1 = 0$ и $\xi_2 = l_0$, где l_0 – заданная величина.

На рис. 2 представлены результаты расчетов эволюции магматической камеры с начальной толщиной расплава $l_0 = 0.4$. На рис. 2,а изображены изотермы в различные моменты времени. Момент времени t_7 соответствует распределению температур в слое после его полного затвердевания, совпадающему с начальным распределением температур в литосфере до впрыскивания расплава. Точка пересечения этих изотерм со значением температуры $T = T_m$ определяет координаты верхней и нижней границ расплава ξ_2 и ξ_1 , а их вычисленная зависимость от времени показана на рис. 2,б. Как видно на рис. 2,а и 2,б, размеры магматической камеры уменьшаются, и в момент времени $t_s = 0.0245$ весь расплав затвердевает.

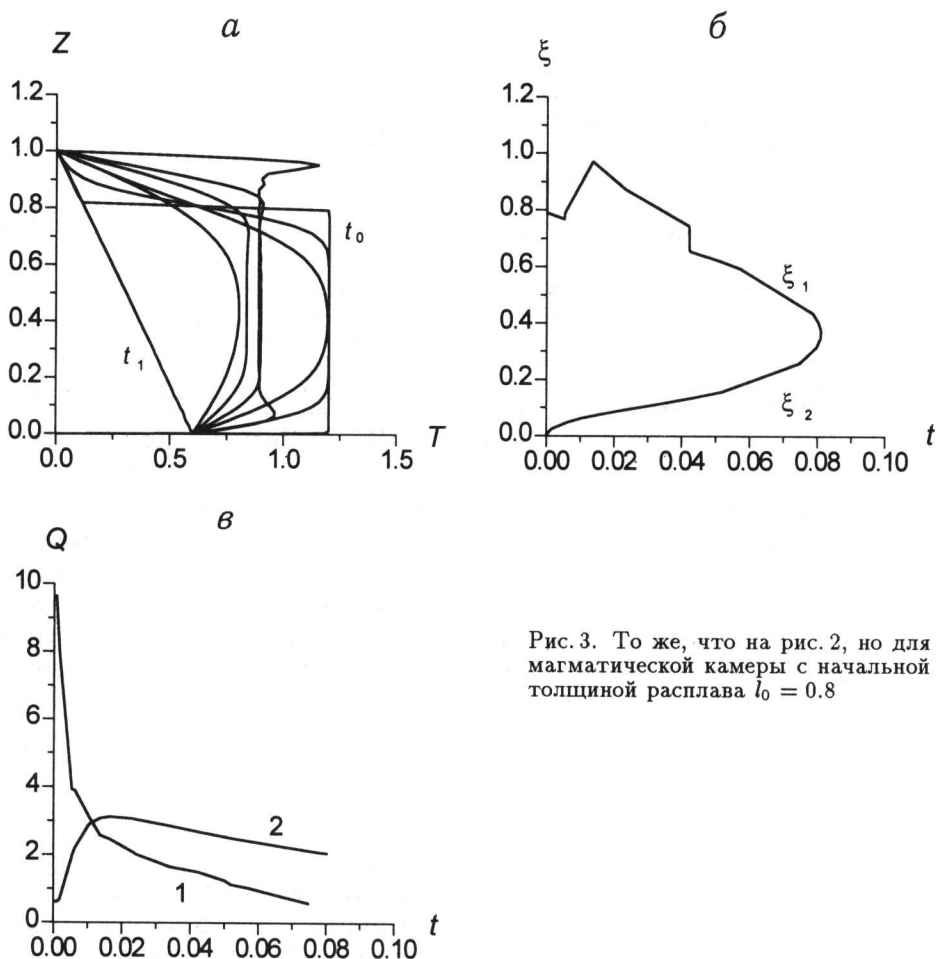


Рис. 3. То же, что на рис. 2, но для магматической камеры с начальной толщиной расплава $l_0 = 0.8$

При изменении толщины расплавленного слоя меняется число Рэлея расплава от начального значения $Ra^*(t=t_0) = Ra_0^* = 0.4 \times (0.4)^3 \times 10^6 = 2.5 \times 10^4$ до нуля.

На рис. 3,а представлено распределение температур для начального размера расплава $l_0 = 0.8$ с числом Рэлея $Ra^*(t=t_0) = 0.4 \times (0.8)^3 \times 10^6 = 2.1 \times 10^5$. По сравнению со случаем $l_0 = 0.4$ (для более глубоко расположенной магматической камеры меньших размеров) расплавленный слой теперь остывает дольше и конвективное перемешивание вещества более интенсивное.

Часто для качественного анализа режимов тепловой конвекции в магматической камере рассматривают случай, когда расплав занимает всю область вплоть до поверхности Земли, что соответствует не погребенной магматической камере, а горячей застывающей лаве, выходящей на поверхность. На рис. 4,а представлено распределение температур для этого случая. Предполагается, что в начальный момент времени лава однородно нагрета до заданной температуры T_i , т.е. либо в ней нет конвекции, либо, если конвективные течения есть, они турбулентные, вещество интенсивно перемешивается, и температура по вертикали остается постоянной. Так как верхняя граница находится при нулевой температуре, остывание

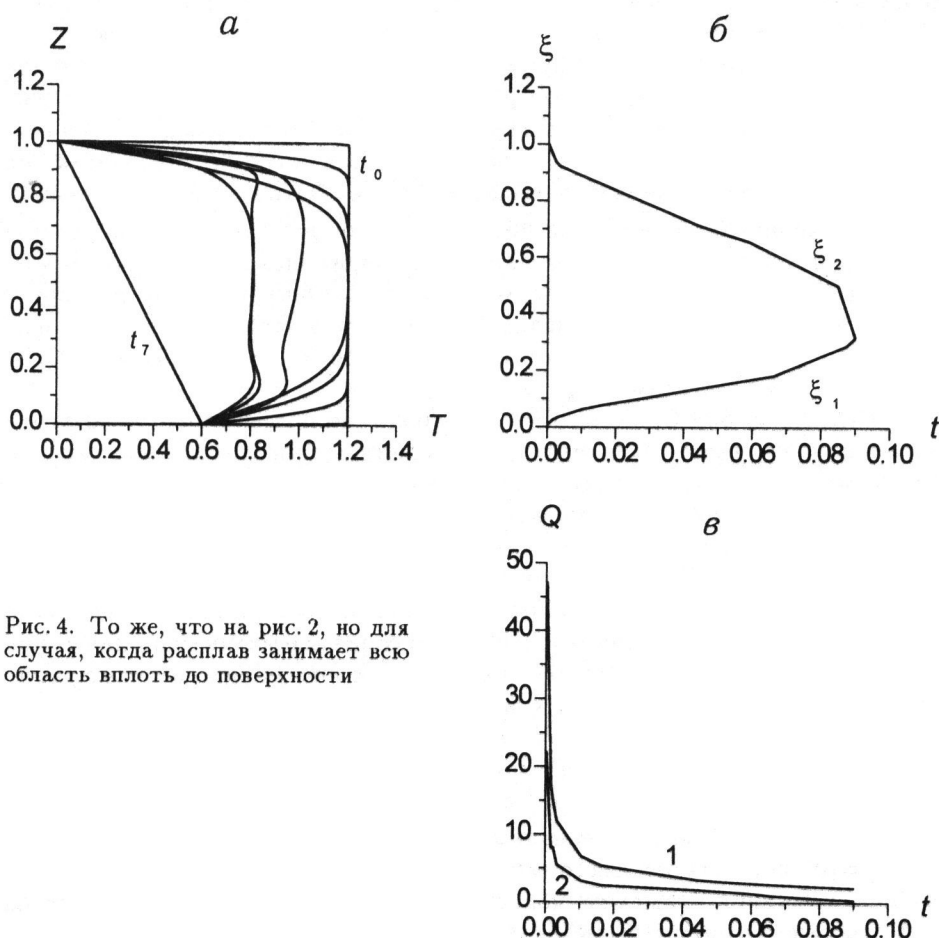


Рис. 4. То же, что на рис. 2, но для случая, когда расплав занимает всю область вплоть до поверхности

происходит в основном сверху. Благодаря возникающему вертикальному градиенту температур в магме начинается тепловая конвекция. Как видно на рис. 4, конвекция устанавливается только к моменту времени t_4 , когда распределение температуры характеризуется погранслоем и изотермическим ядром.

На рис. 2, в, 3, в, 4, в представлены рассчитанные в различные моменты времени значения тепловых потоков на верхней границе фронта затвердевания магматической камеры (кривая 1) и на дневной поверхности Земли (кривая 2). Проведенные численные расчеты тепловой эволюции остывающей магматической камеры выявили ряд закономерностей. При анализе особенностей тепловых режимов остывающих магматических камер часто не учитывается влияние вышележащего теплопроводного массива, но, как видно из сравнения рисунков 4, в с 2, в и 3, в (кривые 2), изменения во времени теплового потока на дневной поверхности существенно различны, особенно на первой стадии остывания магматической камеры. В отсутствие верхнего теплопроводного массива тепловой поток на дневной поверхности (рис. 4, в, кривая 2) монотонно убывает со временем. Благодаря эффекту теплоэкранирования массива тепловой поток на дневной поверхности, поступающий из остывающей магматической камеры в зависимости от времени, имеет максимум, хорошо заметный на рис. 3, в (кривая 2). Этот максимум тем более выражен, чем больше толщина теплопроводного массива, т.е., чем глубже залегает магматическая камера. Проведенные расчеты показывают также, что для рассматриваемых небольших чисел Рэлея время установления тепловой конвекции t_c в расплаве сравнимо со временем его полного затвердевания t_s . Для сильновязких магм небольшого объема время установления t_c может быть достаточно большим.

Расчеты и все предыдущие оценки проводились в безразмерных единицах. Для получения размерных величин необходимо знать характерные параметры реальных магматических камер. Глубина залегания магматических камер варьирует от 20 км до нуля, когда магма доходит до поверхности, а начальная толщина магматических камер может меняться от 100 м до 10 км, $C_p = 1200 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \text{K}^{-1}$, $k = 10^{-6} \text{ м}^2 \text{с}^{-1}$, $k = 3 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \text{K}^{-1}$, $\alpha = 5 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $\lambda = 3.3 \times 10^5 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1}$, $T_i = 1200^\circ \text{C}$, $T_m = 800^\circ \text{C}$, $T_0 = 600^\circ \text{C}$. Наиболее неопределенным параметром является начальная вязкость расплава, для гранитных магм она имеет порядок $\nu = 3 \times 10^3 \text{ м}^2 \text{с}^{-1}$. При этом значении вязкости начальное число Рэлея составляет порядка 10^{12} . При охлаждении магма затвердевает не только с границ, но происходит кристаллизация и в ее объеме. В результате эффективная вязкость расплава увеличивается, а число Рэлея уменьшается от начального значения до нулевого. Расчеты при высоких числах Рэлея требуют больших вычислительных ресурсов. В данной работе рассматривалась тепловая эволюция магматических камер при невысоких числах Рэлея $Ra \leq 10^6$, но даже при этих числах один вариант расчета тепловой эволюции магматической камеры на неравномерной сетке с 51 шагом на АТ 386 требует порядка 10 часов машинного времени. Таким образом, результаты проведенных расчетов относятся только к последней стадии застывания магматической камеры, когда число Рэлея понижается до величины порядка 10^6 .

Если взять $d = 20 \text{ км}$, то единицы измерения для времени будут равны $t_0 = d^2/k = 10^7 \text{ лет}$, для теплового потока $q_0 = 150 \text{ мВт} \cdot \text{м}^{-2}$. В зависимости от глубины залегания магматической камеры наблюдаемый тепловой поток на дневной поверхности может быть меньше теплового потока на фронте затверде-

вания на 1–2 порядка, т.е. меняется от нескольких Вт до 100 мВт. Как видно на рис. 3,б и 4,б, время полного застывания магматической интрузии будет порядка 0.08 в безразмерных переменных, или 8×10^5 лет. Как показывает рис. 3,в, тепловой поток на дневной поверхности Земли над магматической камерой будет равен 3 в безразмерных единицах, или $450 \text{ мВт} \cdot \text{м}^{-2}$. Для расплава, выходящего на поверхность, в начальный момент времени тепловой поток имеет резкий максимум, и через время $t = 0.01 = 10^5$ лет он имеет порядок $q \approx 10$, или $1.5 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2}$. Как указывалось выше, в реальных магматических камерах числа Рэлея более высокие, поэтому там быстрее устанавливается конвекция и, соответственно, резче возрастает тепловой поток и укорачивается стадия охлаждения.

ВЫВОДЫ

Проведенные численные расчеты тепловой эволюции магматических камер показали, что характер остывания магматических камер сильно зависит от глубины их залегания и их размеров.

При сопоставлении процессов, происходящих в магматических камерах, с их поверхностными проявлениями наиболее важным является значение теплового потока, выходящего в данный момент из магматической камеры через границу фронта затвердевания и на дневной поверхности Земли. Часто расчеты и оценки делаются для расплава, верхняя граница которого совпадает с дневной поверхностью, однако наличие теплопроводного массива, теплоэкранирующего магматическую камеру, может существенно менять ее тепловые режимы. Полученные результаты могут быть использованы для анализа эволюции застывающей магматической камеры на конечной стадии перед ее полным затвердеванием.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 95-05-14922) и ИНТАС (грант INTAS 94-1099).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Уравнения теплопереноса в теплопроводном массиве со слоем расплава внутри в одномерном приближении среднего поля

Подставим выражение (10) в уравнение теплопереноса (9.3)

$$C_{\text{ef}} \frac{\partial(\bar{T} + \theta)}{\partial t} + C_{\text{ef}}(\bar{V} \nabla)(\bar{T} + \theta) = \nabla^2(\bar{T} + \theta). \quad (\text{П1})$$

Усредним полученное уравнение по горизонтали, учитывая, что по определению (10) среднее значение флуктуации температуры по оси X равно нулю $\bar{\theta} = 0$, также равна нулю усредненная по горизонтали скорость $\bar{V} = 0$.

$$C_{\text{ef}} \frac{\partial(\bar{T})}{\partial t} + C_{\text{ef}} \bar{V} \bar{\nabla} \bar{\theta} = \nabla^2 \bar{T}. \quad (\text{П2})$$

Вычтем из полного уравнения (11) усредненное

$$C_{ef} \frac{\partial \theta}{\partial t} + C_{ef} V \nabla \bar{T} + C_{ef} (V \nabla \theta - \bar{V} \bar{\nabla} \bar{\theta}) = \nabla^2 \theta. \quad (\text{П3})$$

Поскольку средняя температура зависит лишь от одной пространственной координаты z , второй член в уравнении (П3) можно упростить

$$(V \nabla) \bar{T} = W \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}.$$

Учитывая уравнение неразрывности жидкости и равенство нулю горизонтальной составляющей скорости U на границе области усреднения, получим

$$\begin{aligned} \bar{V} \bar{\nabla} \bar{\theta} &= \int_0^1 \left(U \frac{\partial \theta}{\partial x} + W \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) dx = \int \left(\frac{\partial U \theta}{\partial x} - \theta \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) dx = \\ &= \int \frac{\partial}{\partial x} (U \theta) dx + \int \frac{\partial}{\partial z} (W \theta) dx = \frac{\partial}{\partial z} \bar{W} \bar{\theta}. \end{aligned}$$

В качестве функции F возьмем простое выражение $F = \varepsilon W$, где

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_0, & T < T_m \\ 0, & T > T_m \end{cases}, \quad T_m - \text{температура плавления.}$$

В результате для четырех неизвестных W , U , $\bar{T}$ и θ получим следующую систему уравнений среднего поля:

$$\nabla^4 W + \text{Ra} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \varepsilon W, \quad (\text{П4})$$

$$C_{ef} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla^2 \theta = -C_{ef} W \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + C_{ef} (V \bar{\nabla} \bar{\theta} - V \nabla \theta), \quad (\text{П5})$$

$$C_{ef} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} - \nabla^2 \bar{T} = -C_{ef} \frac{\partial}{\partial z} \bar{W} \bar{\theta}, \quad (\text{П6})$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0. \quad (\text{П7})$$

Решение системы уравнений (П4)–(П7) для функций $W(t, x, z)$ и $\theta(t, x, z)$ будем искать в одномодовом приближении в виде

$$W(t, x, z) = W(t, z) \cos(kx), \quad \theta(t, x, z) = \theta(t, z) \cos(kx), \quad (\text{П8})$$

когда вместо ряда Фурье по оси X берется только одна первая гармоника. Как показано в работе [18], это приближение удовлетворительно описывает все свойства тепловой конвекции при числах Рэлея $\text{Ra} \leq 10^5$. Однако, как показано в [14, 15], для описания интегральных свойств тепловой конвекции одномодовое приближение среднего поля можно применять даже для чисел Рэлея порядка 10^{10} . Из уравнения неразрывности горизонтальная составляющая скорости запишется в виде

$$U(t, x, z) = -\frac{1}{k} \frac{\partial W(z, t)}{\partial z} \sin(kx). \quad (\text{П9})$$

Подставив выражения (П8), (П9) в (П4)–(П7) и пренебрегая членом $(\bar{V} \bar{\nabla} \bar{\theta} - V \nabla \theta)$, который имеет смысл билинейного взаимодействия флуктуаций, получим систему уравнений для амплитуд $W(z, t)$, $\theta(z, t)$ и для усредненной по горизонтали температуры $\bar{T}(z, t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Busse F.H. On the stability of two dimensional convection in a layer heated from below // J. Math. Phys. 1967. Vol.46. P.140-149.
2. Carrigan C.R. The magmatic Rayleigh number and time-dependent convection in cooling lava lakes // Geophys. Res. Lett. 1987. Vol.14. P.915-918.
3. Cashman K.V. Magmatic processes // Rev. Geophys. 1991. Vol.29. P.500-512.
4. Davies G.F. Thermomechanical erosion of the lithosphere by mantle plumes // J. Geophys. Res. 1994. Vol.99. P.15709-15722.
5. Huppert H.E., Sparks R.S.J. Melting the roof of a chamber containing a hot, turbulently convecting fluid // J. Fluid Mech. 1988. Vol.188. P.107-131.
6. Huppert H.E. The fluid mechanics of solidification // J. Fluid Mech. 1990. Vol.212. P.209-240.
7. Marsh B.D. On convective style and vigor in sheet-like magma chamber // J. Petrol. 1989. Vol.30. P.479-530.
8. Marsh B.D. Magma chambers, Annu // Rev. Earth Planet. Sci. 1989. Vol.17. P.439-474.
9. Marsh B.D. On the crystallinity, probability of occurrence, and rheologi of lava and magma // Contrib. Mineral. Petrol. 1981. Vol.78. P.85-98.
10. McKenzie D., Roberts J.M., Weiss N.O. Convection in the earth's mantle: Towards a numerical simulation // J. Fluid Mech. 1974. Vol.62. P.465-538.
11. Spera F.J., Yuen D.A., Kirschvink S.J. Thermal boundary layer convection in silicic magma chambers: Effect of temperature-dependent rheology and implications for thermogravitational chemical fractionation // J. Geophys. Res. 1982. Vol.87. P.8755-8767.
12. Tait S., Jaupart C. Compositional convection in a reactive crystalline mush and melt differentiation // J. Geophys. Res. 1992. Vol.97. P.6735-6756.
13. Yuen D. A., Fleitout L. Thinning of the lithosphere by small-scale convective destabilization // Nature. 1985. Vol.313. P.125-128.
14. Quareni F., Yuen D.A. Time-dependent solutions of mean-field equations with applications for mantle convection // Phys. Earth Planet. Inter. 1984. Vol.36. P.337-363.
15. Quareni F., Yuen D.A. Mean-field methods mantle convection // Math. Geophys. 1988. P.227-264.
16. Самарский А.А., Моисеенко Б.Д. Экономическая схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // Журн. выч.мат. и мат.физ. 1965. Т.5, N 5. С.816-827.
17. Вабищевич П.Н., Илиев О.П. Численное решение сопряженных задач тепло- и массопереноса с учетом фазового перехода // Дифференц.уравнения. 1987. Т.23, N 7.
18. Трубицын В.П., Зацепина О.Е. Многомодовое приближение и метод среднего поля в задачах тепловой конвекции // Физика Земли. 1992. N 12. С.7-11.