

УДК 550.341

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УСТОЙЧИВЫХ ЗАКОНОВ В МОДЕЛЯХ СЕЙСМИЧНОСТИ

В.Ф. Писаренко, Т.В. Голубева

*Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук*

Предложена новая модель распределения сейсмичности (числа землетрясений) по пространству, выведенная на основании предположения о самоподобии этого распределения. Пуассоновские интенсивности потоков землетрясений на непересекающихся площадках оказываются распределенными в соответствии с некоторым законом из семейства устойчивых законов. Выведены рекуррентные формулы для распределения числа землетрясений на некоторой площадке и изложена методика статистической оценки параметров устойчивого закона, которому подчиняется распределение интенсивности. Методика проиллюстрирована на каталогах Памира–Тянь-Шаня, Японии, Калифорнии. Значения характеристического параметра α устойчивых законов получились равными приблизительно 0.6–0.7. Подчеркивается необходимость аккуратной статистической обработки данных, поскольку для указанных значений α математическое ожидание и дисперсия устойчивого закона равны бесконечности.

APPLICATION OF STABLE LAWS IN SEISMICITY MODELING

V.F. Pisarenko and T.V. Golubeva

*International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences*

A new model for space distribution of seismicity (number of earthquakes) is proposed. It is derived from self-similarity of this distribution. Poisson intensities of earthquake sequences for non-overlapping areas turn out to be distributed in accordance with a law belonging to the family of stable laws. Recurrent formulas for distribution of earthquakes occurring in an area are derived. A statistical technique for parameter estimation of the stable law is presented. This technique is illustrated by processing earthquake catalogs of Pamir–Tien Shan, Japan, and California. The α -parameters of stable laws were found to be approximately 0.6–0.7. The necessity of correct statistical treatment of data is stressed, since for these α -values there exist no expectation and variance for intensity.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что распределение сейсмичности по пространству проявляет самоподобные свойства, которые, по крайней мере в некотором диапазоне, не зависят от масштаба. Так, в работах [1–9] было показано, что распределение эпицентров

и гипоцентров землетрясений в пространстве обладает свойствами мультифрактала, т.е. самоподобной меры с неоднородным распределением массы по некоторому фрактальному множеству. В то же время известно, что автомодельные случайные поля при некоторых ограничениях приводят к устойчивым распределениям [10, 11]. В частности, доказано [10], что если однородное случайное поле в дискретном n -мерном пространстве Z^n обладает свойством автомодельности (т.е. сохраняет распределение при "укрупнении", сопровождаемом перенормировкой) и если значения поля независимы в разных точках (белый шум), то его распределение является устойчивым законом, характеристическая функция которого $\varphi(t)$ имеет вид

$$\ln \varphi(t) = -c^\alpha |t|^\alpha \exp\left(-\frac{\pi i \theta \alpha}{2} \operatorname{sign} t\right), \quad (1)$$

где параметры α , c и θ меняются в пределах $0 < \alpha \leq 2$; $c > 0$; $|\theta| \leq \theta(\alpha) = \min(1, \frac{2}{\alpha} - 1)$. Самым существенным параметром является α . Случай $\alpha = 2$ соответствует гауссовскому закону, случай $\alpha = 1$ – закону Коши; при $\alpha < 2$ дисперсия распределения равна бесконечности, а при $\alpha \leq 1$ в бесконечность обращается и математическое ожидание.

Характеристическое свойство устойчивых законов состоит в их самовоспроизведении при сложении: если для каждого n сумма n независимых, одинаково распределенных случайных величин x_1, \dots, x_n после некоторой перенормировки остается распределенной как одно из слагаемых x_i , то распределение этих случайных величин будет устойчивым, а его характеристическая функция $\varphi(t)$ имеет вид (1).

Если свойства поля сейсмичности в некотором диапазоне не зависят от масштаба, то хотелось бы, используя характеристическое свойство устойчивых законов, получить для сейсмичности устойчивый закон. К сожалению, непосредственно реализовать эту идею невозможно, так как сейсмичность описывается точечным, маркированным процессом, а все устойчивые законы непрерывны. Однако можно слегка видоизменить постановку вопроса и использовать устойчивые законы не для непосредственного моделирования потока землетрясений, а для некоторого непрерывно распределенного параметра, характеризующего сейсмичность. В качестве такого параметра выберем интенсивность пуассоновского процесса λ , определяющего поток землетрясений. Если принять, что этот параметр λ является случайной величиной, распределенной по поверхности (в данной работе мы не будем учитывать глубину землетрясения из-за сложностей, связанных с ее определением) и что выполняется принцип самоподобия – вид распределения λ не зависит от масштаба, по крайней мере в некотором диапазоне, то мы можем ожидать, в силу приведенных выше аргументов, что параметр λ распределен по устойчивому закону. Здесь существенно предположение о независимости значений, принимаемых параметром λ на разных площадках. Оно, очевидно, несправедливо для очень малых смежных площадок из-за определенной непрерывности свойств среды. Однако для достаточно больших площадок их смежные участки будут составлять лишь малую часть и непрерывность среды не препятствует предположению о независимости (ниже мы уделим внимание этому вопросу).

Предполагая, что значения пуассоновской интенсивности λ на непересекающихся площадках случайны, независимы и имеют, с точностью до нормирующего мно-

жителя, одно и то же распределение, мы немедленно получаем следствие: это распределение должно быть устойчивым законом.

Приняв такое распределение (зависящее от трех неизвестных параметров), введем дискретное распределение для числа возможных землетрясений, происходящих на данной площадке.

Пользуясь тем, что изучаемая нами случайная величина λ неотрицательна, нетрудно показать, что для таких величин устойчивые законы могут иметь параметр α только в диапазоне $0 < \alpha < 1$. Кроме того, семейство законов зависит уже только от двух неизвестных параметров: α и масштабного параметра c . Это сильно облегчает задачу статистической оценки параметров.

Отметим, что несмотря на то, что аналитический вид плотности устойчивого закона при $\alpha < 1$ известен только в одном случае (закон Леви с $\alpha = 0.5$), нам удалось получить явные рекуррентные формулы для дискретных вероятностей, характеризующих число происходящих землетрясений.

Основные свойства устойчивых законов кратко изложены в разд. 1. Статистические методы обработки устойчивых случайных величин с $\alpha < 1$ весьма специфичны, так как эти величины не имеют даже первого момента, а такие стандартные характеристики, как выборочное среднее и выборочное среднеквадратичное отклонение с ростом n ни к чему не сходятся. В разд. 2 изложена методика оценки параметров устойчивого закона распределения λ по наблюдениям дискретных значений – чисел землетрясений на разных площадках. В разд. 3 представлены результаты применения предложенной методики для нескольких сейсмоактивных регионов.

1. УСТОЙЧИВЫЕ ЗАКОНЫ

Отдельные устойчивые законы распределения случайных величин встречались еще в работах Пуассона и Коши, а затем позднее, в начале нашего века, в работах Хольцмарка и Пойа. Однако лишь после фундаментальных работ Леви 1925 г. [12], а также Хинчина 1938 г. [13] можно считать, что окончательно сформулировалось понятие устойчивого закона и выяснены основные свойства.

Современное состояние исследований по устойчивым распределениям отражено в монографии Золотарева [11], а также в книге Феллера [10].

Значение устойчивых законов для физических задач и для некоторых других областей исследования (экономики, радиотехники, механики и др.), на наш взгляд, чрезвычайно велико. Это обусловлено тем, что (как видно из записи логарифма характеристической функции $\varphi(t)$ устойчивого закона в форме (1)) он является инвариантным относительно группы масштабных преобразований: умножение случайной величины на масштабный множитель $\sigma > 0$ можно компенсировать умножением (1) на множитель $1/\sigma^\alpha$. Это свойство самоподобия (независимости от масштаба) присуще лишь степенным функциям (см. [14]).

Отметим, что геометрические объекты с самоподобной структурой часто так же описываются с помощью степенных характеристик. По существу, дробные размерности фракталов представляют собой степенную зависимость от масштаба каких-то свойств объекта. Поэтому устойчивые законы часто возникают в таких физических задачах, где функция Грина для изучаемого физического поля имеет степенной характер: гравитационное, тепловое, магнитное поля, поле

механических напряжений и т.п. (см. подробнее [11, гл. 1]).

К сожалению, устойчивые распределения весьма редко встречаются в прикладных исследованиях, за исключением, разумеется, гауссовского распределения при $\alpha = 2$, которое можно рассматривать как, в некотором смысле, исключительный случай устойчивых распределений.

Основное характеристическое свойство устойчивых случайных величин – их самоподобие – можно записать следующим образом: пусть ξ_1, \dots, ξ_n – независимые, одинаково распределенные случайные величины и S_n – их сумма:

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n. \quad (2)$$

Распределение величины ξ_i называется устойчивым, если существует нормирующий множитель c_n (зависящий от n), такой, что

$$\frac{1}{c_n} S_n \stackrel{d}{=} \xi_1, \quad (3)$$

где знак равенства с буквой d наверху обозначает эквивалентность распределений правой и левой частей, но не их равенство в буквальном смысле.

Для того чтобы излишне не усложнять изложение, мы не будем здесь рассматривать возможность "сноса" распределения S_n на постоянное слагаемое, которое следовало бы добавить в (3). Распределения, удовлетворяющие (3), называются строго устойчивыми. Мы видим, что в соответствии с (3) суммирование устойчивых величин можно компенсировать некоторым масштабным множителем c_n . Оказывается, что масштабные множители имеют очень простую, степенную форму:

$$c_n = n^{1/\alpha}, \quad (4)$$

где показатель α может принимать значение только в интервале $0 < \alpha \leq 2$.

Случай $\alpha = 2$ соответствует гауссовскому закону и привычной нормировке на \sqrt{n} . Во всех остальных случаях при $\alpha < 2$ нормировка должна быть более сильной:

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n^{1/\alpha}}. \quad (5)$$

Из (5), в частности, видно, что при $\alpha = 1$ среднеарифметическое значение n величин имеет в точности то же распределение, что и каждое отдельное слагаемое. Это противоречит наивному, интуитивному представлению о всеобщей применимости закона больших чисел, когда среднеарифметическое сходится к среднему значению – математическому ожиданию. Закон больших чисел в этом случае неприменим, так как математическое ожидание равно бесконечности.

Суммирование и перенормировку одинаковых слагаемых в (2), (3) можно обобщить на случай взвешенных слагаемых. При этом соотношения (2)–(4) перейдут в следующие:

$$S_n = \sigma_1 \xi_1 + \dots + \sigma_n \xi_n, \quad (6)$$

$$\frac{1}{c_n} S_n \stackrel{d}{=} \xi_1, \quad (7)$$

$$c_n = \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^\alpha \right)^{1/\alpha}. \quad (8)$$

Как мы уже упоминали, в явном виде плотности устойчивого закона известны лишь для двух частных случаев, не считая, конечно, гауссовского распределения. Эти два распределения называются законами Коши и Леви. Их плотности вероятности имеют вид

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \alpha = 1 \quad - \text{закон Коши},$$

$$f(x) = \frac{1}{x^{3/2}(2\pi)^{1/2}} \exp(-1/2x), \quad x \geq 0, \quad \alpha = 0.5 \quad - \text{закон Леви}.$$

Случайные величины, распределенные по законам Коши и Леви, можно получить из независимых гауссовских величин ξ_1 и ξ_2 . Так, по закону Леви будет распределена случайная величина $1/\xi_1$, а по закону Коши – случайная величина ξ_1/ξ_2 .

Характеристические функции для всего семейства устойчивых законов записываются в явном виде:

$$\ln \varphi(t) = c^\alpha (it\gamma - |t|^\alpha + it\omega(t, \alpha, \beta)), \quad (9)$$

где параметры меняются в следующих пределах:

$$0 < \alpha \leq 2, \quad -1 \leq \beta \leq 1, \quad -\infty < \gamma < \infty, \quad c > 0 \quad \text{и}$$

$$\omega(t, \alpha, \beta) = \begin{cases} |t|^{\alpha-1} \beta \operatorname{tg}(\pi/2\alpha), & \text{если } \alpha \neq 1 \\ -\beta \frac{2}{\pi} \ln |t|, & \text{если } \alpha = 1. \end{cases} \quad (10)$$

Будем рассматривать так называемое строго устойчивое распределение, у которого "снос" γ равен нулю. Отметим, что параметризация этого семейства может быть выбрана различным образом, например как в формуле (1). В зависимости от этого выбора характеристические функции могут иметь различный вид (см. [11]), но, конечно, они описывают одно и то же семейство. Устойчивое распределение может быть сосредоточено на полуоси $(0, \infty)$, в этом случае в формулах (9), (10) $\alpha < 1, \beta = 1$. Если изменить знак случайной величины на противоположный, то получим устойчивые распределения, сосредоточенные на полуоси $(-\infty, 0)$, в этом случае $\alpha < 1, \beta = -1$. Если же $\alpha \geq 1$ либо $\alpha < 1, \beta \neq -1, \beta \neq 1$, то устойчивое распределение занимает всю ось $(-\infty, \infty)$. Если исключить из рассмотрения гауссовское распределение, то плотность устойчивого закона будет убывать очень медленно при увеличении аргумента: либо в обе стороны при $x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$; либо в одном из направлений. А именно: скорость убывания (с точностью до членов порядка $\ln |x|$, которые могут появиться при $\alpha = 1$)

$$f(x) \sim 1/|x|^{1+\alpha}, \quad x \rightarrow \infty, \quad \text{либо } x \rightarrow -\infty, \quad 0 < \alpha < 2.$$

Таким образом, второй момент при $\alpha \neq 2$ равен бесконечности, а при $\alpha \leq 1$ и первый момент (математическое ожидание) бесконечен. Параметр β характеризует симметричность распределения. Значение $\beta = 0$ соответствует симметричным относительно нуля распределениям. Положительные β соответствуют распределениям большей части массы на положительной полуоси, отрицательные β – на отрицательной полуоси.

Отметим еще раз, что положительные устойчивые случайные величины могут быть только при $\beta = 1$, $\alpha < 1$. Этот случай как раз имеет место в нашей задаче, поскольку, по смыслу интенсивности пуассоновского потока, этот параметр не может быть отрицательным.

Заметим еще, что в результате операций умножения и деления, производимых с независимыми устойчивыми величинами, могут возникать устойчивые величины с другим параметром α . А именно: если взять устойчивую величину ξ_1 с характеристическим показателем α_1 и независимую от нее устойчивую положительную случайную величину ξ_2 с характеристическим показателем α_2 (в соответствии со сказанным выше при этом обязательно должно выполняться неравенство $\alpha_2 < 1$), то произведение

$$\xi_1 \xi_2^{1/\alpha_1} \quad (11)$$

будет устойчивой случайной величиной с показателем $\alpha_1 \alpha_2$ [10].

Так, например, произведение гауссовской случайной величины $\alpha_1 = 2$ на квадратный корень из величины, распределенной по закону Леви ($\alpha = 0.5$), даст величину, распределенную по закону Коши:

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 = 2 \cdot 0.5 = 1.$$

Взяв в качестве величины ξ_1 в (11) одну из трех устойчивых величин с явной формулой для плотности (Гаусс, Коши, Леви), а в качестве ξ_2 – положительную величину, распределенную по Леви, и последовательно применяя формулу (11) n раз, можно положительную устойчивую величину с $\alpha = 1/2^n$ выразить через исходные величины. Так, например, если $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ – независимые гауссовские величины, то величина

$$\eta = \frac{\xi_0}{|\xi_1| \xi_1^2} \frac{1}{\xi_3^4} \dots \frac{1}{\xi_n^{2^{n-1}}}$$

будет устойчивой, с показателем $\alpha = 1/2^{n-1}$.

Аналогичные выражения для положительных устойчивых величин с $\alpha = 1/n$ ($n = 2, 3, \dots$) можно получить через случайные величины, имеющие гамма-распределение с показателем $\alpha = 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n$ (см. [11]). Эти соотношения могут оказаться полезными для моделирования выборок устойчивых случайных величин, поскольку вычисление их плотностей и функций распределения сопряжено с большими вычислительными трудностями.

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЯ, КОГДА ПУАССОНОВСКИЙ ПАРАМЕТР ЯВЛЯЕТСЯ УСТОЙЧИВОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНОЙ

Пусть сейсмоактивная область S разделена на непересекающиеся площадки A_k :

$$S = \bigcup_{k=1}^n A_k,$$

имеющие одинаковую площадь. Предположим, что на каждой из площадок A_k поток землетрясений является стационарным пуассоновским процессом с интенсивностью λ_k . Предположим далее, что $\{\lambda_k\}$ являются независимыми случайными

величинами, распределенными в соответствии с некоторым законом $F(x)$. Если принять гипотезу самоподобия распределения сейсмичности по пространству в данном регионе (а такая гипотеза имеет веские подтверждения [1-7]), то естественно считать, что вид закона $F(x)$ при изменении размера одиночной площадки A_k останется тем же, а изменится лишь масштабный, нормирующий множитель этого распределения. Если мы, например, удвоим площадку, объединив две случайно выбранные площадки A_k и A_j , то, в силу изложенных выше аргументов, естественно предположить, что

$$C_2(\lambda_1 + \lambda_2) \stackrel{d}{=} \lambda_1, \quad (12)$$

где C_2 – некоторый нормирующий множитель.

Если объединить n площадок, то вместо (12) будем иметь

$$C_n(\lambda_{k1} + \dots + \lambda_{kn}) \stackrel{d}{=} \lambda_1. \quad (13)$$

Мы видим, что предположение о самоподобии распределения сейсмичности привело к характеристическому свойству устойчивых законов (3). Таким образом, из предположения (13) вытекает, что распределение величин λ_k является устойчивым, а нормирующая константа имеет вид

$$C_n = 1/n^{1/\alpha}. \quad (14)$$

Весьма важным условием того, что из самоподобия (13), (14) будет следовать устойчивость распределения интенсивностей λ_k , является независимость слагаемых в (13). Ясно, что при достаточно малых площадях смежные площадки могут иметь зависимые значения интенсивностей. Однако при увеличении площади можно ожидать, что эта зависимость будет ослабевать. Остановимся подробнее на вопросе о возможной зависимости интенсивностей на смежных площадках и предложим некоторые способы уменьшения влияния такой зависимости.

Будем считать, что случайные интенсивности λ_k в нашей модели получаются как значения случайной меры μ , имеющей устойчивое распределение с некоторым $0 < \alpha < 1$, и при этом значения меры $\mu(A_1) = \lambda_1$, $\mu(A_2) = \lambda_2$ на любых непересекающихся множествах A_1 и A_2 независимы [15, 16].

Посмотрим, как изменяется нормирующая константа C в такой модели в том случае, когда множества A_1 и A_2 пересекаются. Зависимость C от площади пересечения множеств $A_1 \cap A_2$ будет служить аналогом ковариации устойчивых величин $\mu(A_1)$ и $\mu(A_2)$. Заметим, что обычной ковариации в данном случае не существует, так как дисперсии случайных величин $\mu(A_1)$, $\mu(A_2)$ равны бесконечности. Кстати, данная модель может служить примером случайного процесса с медленно убывающими "хвостами" одномерного распределения и с быстро убывающей ковариацией (точнее, аналогом ковариации). Вопрос о существовании таких процессов был поставлен Вере-Джонсом [17]. Из (6)–(8) следует, что случайную величину $\mu(S)$, относящуюся к ячейке с площадью S , можно с помощью перенормировки свести к случайной величине $\lambda_0 = \mu(S_0)$, относящейся к ячейке с площадью S_0 :

$$\mu(s) \stackrel{d}{=} \left(\frac{S}{S_0} \right)^{1/\alpha} \lambda_0. \quad (15)$$

Рассмотрим случайные величины $\lambda_1 = \mu(A_1)$, $\lambda_2 = \mu(A_2)$, соответствующие двум пересекающимся множествам A_1 , A_2 с одинаковой площадью S , имеющим площадь пересечения S_1 . Имеем

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= \mu(A_1) + \mu(A_2) = \\ &= \mu(A_1 \setminus A_1 \cap A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_2 \setminus A_1 \cap A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) = \\ &= \mu(A_1 \setminus A_1 \cap A_2) + \mu(A_2 \setminus A_1 \cap A_2) + 2\mu(A_1 \cap A_2). \end{aligned} \quad (16)$$

В правой части (16) случайная мера μ берется на непересекающихся множествах, поэтому все три величины независимы. Используя (15), получаем

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \setminus A_1 \cap A_2) &\stackrel{d}{=} \left(\frac{S - S_1}{S} \right)^{1/\alpha} \lambda_1, \\ \mu(A_2 \setminus A_1 \cap A_2) &\stackrel{d}{=} \left(\frac{S - S_1}{S} \right)^{1/\alpha} \lambda_1, \\ \mu(A_1 \cap A_2) &\stackrel{d}{=} \left(\frac{S_1}{S} \right)^{1/\alpha} \lambda_1. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (16), (17) с учетом формул (6)–(8) имеем

$$\lambda_1 + \lambda_2 \stackrel{d}{=} \left(\frac{2(S - S_1)}{S} + 2^\alpha \frac{S_1}{S} \right)^{1/\alpha} \lambda_1 \equiv R\lambda_1. \quad (18)$$

Константу перенормировки R можно переписать в виде

$$R = R(S_1/S; \alpha) = 2^{1/\alpha} [1 - S_1/S (1 - 2^{\alpha-1})]^{1/\alpha}. \quad (19)$$

Отметим, что для непересекающихся множеств A_1 и A_2 $R(0; \alpha) = 2^{1/\alpha}$, а для совпадающих множеств $R(1; \alpha) = 2$.

Используя приведенную модель для случайных интенсивностей λ_k , можно вернуться к вопросу о возможной зависимости этих интенсивностей на смежных площадках. Мы уже отмечали, что для больших площадок смежные участки, дающие вклад в интенсивность обеих площадок (смежные участки играют роль пересекающихся частей двух множеств), будут иметь относительно малую площадь, а для малых площадок относительная площадь смежных участков может быть значительной. В первом приближении можно считать, что "общая" относительная площадь двух смежных квадратов площади S обратно пропорциональна длине стороны квадрата, т.е. Δ/\sqrt{S} , где Δ – некоторая константа, характеризующая, так сказать, "ширину общей полосы" смежных участков. Таким образом, выбирая достаточно большое значение S , можно уменьшить эффект зависимости интенсивностей λ_1 и λ_2 на смежных площадках. Для того чтобы ослабить этот эффект при исследовании изменения нормирующей константы, вызванного укрупнением ячеек, мы суммировали землетрясения не в смежных клетках, а в разнесенных.

Так как величины λ_k являются положительными, то их распределение зависит только от двух параметров: характеристического показателя α и масштабного

параметра c . При этом выполняется неравенство $0 < \alpha < 1$. Параметры α и c нам нужно оценить по имеющимся каталогам землетрясений.

Задача оценки осложняется тем, что мы непосредственно не наблюдаем интенсивности λ_k на разных площадках, а наблюдаем лишь случайное число землетрясений, которое имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda_k T$, где T – время наблюдения. Иными словами, условное распределение числа землетрясений N_k на площадке A_k при заданном λ_k определяется законом Пуассона:

$$\mathcal{P}\{N_k = m | \lambda_k\} = \frac{(\lambda_k T)^m \exp(-\lambda_k T)}{m!}. \quad (20)$$

Безусловное распределение числа землетрясений N обозначим Π_m :

$$\Pi_m = \mathcal{P}\{N = m\} = 1/m! \int_0^\infty (\lambda T)^m \exp(-\lambda T) p(\lambda | c, \alpha) d\lambda/c, \quad (21)$$

где $p(\lambda | c, \alpha)$ – плотность вероятности устойчивого закона с параметрами c и α ($\alpha < 1$).

Выведем выражение для Π_m , которое даст возможность эффективно проводить процедуру оценивания параметров c , α методом максимального правдоподобия. Воспользовавшись тем, что для $\alpha < 1$, $\beta = 1$ можно получить явное выражение преобразования Лапласа от $p(\lambda | c, \alpha)$ (см. [11, с. 139]), которое пропорционально e^{-x^α} , нетрудно вывести, дифференцируя это преобразование, явные формулы для Π_m :

$$\Pi_m = (-1)^m c T / m! d/dx^r \exp(-x^\alpha)|_{x=cT}, \quad m = 0, 1, 2 \dots \quad (22)$$

В частности, имеем:

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \exp(-(cT)^\alpha), \\ \Pi_1 &= \alpha (cT)^\alpha \exp(-(cT)^\alpha), \\ \Pi_2 &= \alpha/2 [\alpha (cT)^{2\alpha} + (1-\alpha)(cT)^\alpha] \exp(-(cT)^\alpha). \end{aligned} \quad (23)$$

Определим функции $H_k(x)$ следующим образом:

$$\frac{d^k}{dx^k} \exp(-x^\alpha) = \exp(-x^\alpha) H_k(x). \quad (24)$$

Легко проверить, что функция $H_k(x)$ удовлетворяет следующему рекуррентному уравнению:

$$H_{k+1}(x) = \alpha x^{\alpha-1} H_k(x) + H'_k(x). \quad (25)$$

Функция $x^k H_k(x)$ является многочленом степени k относительно переменной x^α , причем свободный член этого многочлена оказывается равным нулю. Обозначим коэффициенты этих многочленов через $p_{k,1}$; $p_{k,2}$; ...; $p_{k,k}$:

$$x^k H_k(x) = p_{k,1} x^\alpha + p_{k,2} x^{2\alpha} + \dots + p_{k,k} x^{k\alpha}. \quad (26)$$

Для нахождения коэффициентов $p_{k,j}$ из (21) можно вывести следующие рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} p_{k+1,k+1} &= -\alpha p_{k,k}, \\ p_{k+1,j} &= -\alpha p_{k,j-1} + (ja - k)p_{k,j}, \quad 2 \leq j \leq k, \\ p_{k+1,1} &= (\alpha - k)p_{k,1}, \quad k \geq 2. \end{aligned} \quad (27)$$

Начальные коэффициенты $p_{k,j}$ при $k = 1, 2, 3$ имеют вид

$$\begin{aligned} p_{1,1} &= -\alpha; \quad p_{2,2} = \alpha^2; \quad p_{1,2} = \alpha(1 - \alpha); \\ p_{3,1} &= -\alpha(1 - \alpha)(2 - \alpha); \quad p_{3,2} = -3\alpha^2(1 - \alpha); \quad p_{3,3} = -\alpha^3. \end{aligned} \quad (28)$$

Нужные нам вероятности Π_m (22) выражаются через коэффициенты $p_{k,j}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi_m &= \Pi_m(\alpha; cT) = (-1)^m \exp[-(cT)^\alpha] / m! [p_{m,1}(cT)^\alpha + p_{m,2}(cT)^{2\alpha} + \dots \\ &\dots + p_{m,m}(cT)^{m\alpha}] = (-1)^m \exp[-(cT)^\alpha] / m! (cT)^m H_m(cT), \quad m \geq 3. \end{aligned} \quad (29)$$

Начальные значения Π_m при $m = 0, 1, 2$ задаются формулами (23). Таким образом, с помощью рекуррентных формул (27), (28) возможно реализовать вычисление Π_m на компьютере с достаточной точностью. Можно показать, что в отличие от пуассоновских вероятностей (20) вероятности Π_m убывают с ростом m весьма медленно, а именно:

$$\Pi_m \sim 1/m^{(1+\alpha)}.$$

Этот порядок убывания следует учитывать при статистической оценке параметров α, c .

Функции $H_k(x)$ (25), (26) можно рассматривать как обобщение полиномов Эрмита, поскольку при $\alpha = 2$ соотношение (24) служит определением таких полиномов.

3. ПРИМЕНЕНИЕ ОПИСАННОЙ МЕТОДИКИ К СЕЙСМОАКТИВНЫМ РЕГИОНАМ

Рассмотрим некоторый регион, сейсмическая активность которого в фиксированном интервале времени описана однородным каталогом землетрясений. Выделим представительный диапазон магнитуд. Покрыв сейсмический регион сеткой, состоящей из n непересекающихся прямоугольных ячеек площади S , получим выборку

$$m_1, \dots, m_n,$$

где m_i — число эпицентров в i -й ячейке.

В соответствии с методикой, изложенной в разд. 2, m_i являются случайными целочисленными величинами, причем

$$P\{m_i = k\} = \Pi_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где Π_k выражается в виде (29). Тогда логарифмическая функция правдоподобия $\ln L(\alpha; c)$ имеет вид

$$\ln L(\alpha; c) = \sum_{j=1}^n \ln \Pi_{m_j}. \quad (30)$$

Оценки максимального правдоподобия $\hat{\alpha}$, \hat{c} параметров α , c находятся из системы уравнений:

$$0 = \frac{\partial \ln L(\alpha; c)}{\partial \alpha} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\Pi_{m_j}} \frac{\partial \Pi_{m_j}}{\partial \alpha}, \quad 0 = \frac{\partial \ln L(\alpha; c)}{\partial c} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\Pi_{m_j}} \frac{\partial \Pi_{m_j}}{\partial c}. \quad (31)$$

Далее, для получения асимптотической дисперсии оценок $(\hat{\alpha}, \hat{c})$, вычисляем матрицу Фишера Φ :

$$\Phi = \left\{ \begin{array}{cc} E \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} \right)^2 & E \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} \frac{\partial \ln L}{\partial c} \\ E \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} \frac{\partial \ln L}{\partial c} & E \left(\frac{\partial \ln L}{\partial c} \right)^2 \end{array} \right\}. \quad (32)$$

Из (30), (31) получаем

$$\begin{aligned} E \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} \right)^2 &= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Pi_k} \left(\frac{\partial \Pi_k}{\partial \alpha} \right)^2, \\ E \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} \frac{\partial \ln L}{\partial c} &= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Pi_k} \left(\frac{\partial \Pi_k}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{\partial \Pi_k}{\partial c} \right), \\ E \left(\frac{\partial \ln L}{\partial c} \right)^2 &= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Pi_k} \left(\frac{\partial \Pi_k}{\partial c} \right)^2. \end{aligned} \quad (33)$$

При $n \rightarrow \infty$ распределение случайного вектора $(\hat{\alpha} - \alpha, \hat{c} - c)$ сходится к двумерному нормальному закону с нулевым средним и ковариационной матрицей Φ^{-1} . При практическом использовании формул (32), (33) для определения этой ковариационной матрицы мы подставляем вместо неизвестных (α, c) в (32), (33) их оценки $(\hat{\alpha}, \hat{c})$. Дифференцирование выполнялось численно.

Изучим вопрос о том, какой объем выборки нужен для достаточно представительной оценки параметров распределения на искусственном примере со случайными пуассоновскими интенсивностями, распределенными по закону Леви, имеющему плотность вероятности:

$$f(x) = \frac{1}{x^{3/2}(2\pi)^{1/2}} \exp(-1/2x); \quad x \geq 0, \quad \alpha = 0.5.$$

Мы моделируем случайные пуассоновские интенсивности $\{\lambda_k\}$, распределенные по закону Леви с заданным параметром c .

Если в реальном каталоге M ячеек, то мы повторим эксперимент M раз, используя датчик случайных чисел. Таким образом, получим выборку, состоящую из набора M чисел, которая будет подчинена предполагаемому распределению с заданными нами параметрами $\alpha = 0.5$ и c . На данной модели мы можем оттестировать методы оценки параметров и определить оптимальное соотношение числа клеток и числа рассматриваемых в них точек для оценки параметров α и c .

Результаты проверки для $n = 50, 100$ и 200 с соответствующими оценками $(\hat{\alpha}, \hat{c})$ и стандартными отклонениями, полученными из ковариационной матрицы Φ^{-1} , приведены в табл. 1, значения параметра c выбирались: $c = 0.5, 5$ и 30 .

ТАБЛИЦА 1

Заданный параметр	$\alpha \pm \sqrt{\text{var } \alpha}, \quad c \pm \sqrt{\text{var } c}$		
	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$
$\alpha = 0.5$	0.59 ± 0.11	0.56 ± 0.08	0.60 ± 0.06
$c = 0.5$	0.50 ± 0.22	0.40 ± 0.16	0.60 ± 0.11
$\alpha = 0.5$	0.54 ± 0.08	0.52 ± 0.06	0.51 ± 0.04
$c = 5.0$	6.00 ± 1.62	5.20 ± 1.14	5.50 ± 0.80
$\alpha = 0.5$	0.50 ± 0.07	0.50 ± 0.05	0.51 ± 0.03
$c = 0.3$	35.1 ± 10.8	31.8 ± 7.65	33.5 ± 5.40

Из табл. 1 видно, что параметры хорошо оцениваются уже при объеме выборки $n = 50$, однако при малых величинах c , как следует из рис. 1, параметр α оценивается менее устойчиво, поскольку значения Π_k , соответствующие разным α (0.2, 0.5 и 0.9), различаются очень мало, а асимптотическая дисперсия параметра α возрастает с уменьшением c (это отражено в табл. 1). Поэтому для анализа предпочтительнее брать большие выборки, для которых значение масштабного параметра c не меньше 2. Но при этом не следует брать и слишком большие выборки – тогда будет высокий процент ячеек с числом точек больше, скажем, 150, а определение Π_k при k больше 150 сопряжено с большими вычислительными трудностями. В результате большого числа модельных экспериментов мы пришли к выводу, что для эффективной оценки оптимально брать около 2000 точек и покрывать их системой из 100 ячеек.

ТАБЛИЦА 2

Регион	Период наблюдения, годы	Координаты выбранных участков	Минимальная представительная энергия	Количество землетрясений на участке
К а т а л о г 1				
Памир-Тянь-Шань	1955–1979	38.6–39.3°N; 70–71°E	7-й класс	10 882
К а т а л о г 2				
Япония	1901–1993	30–39°N; 138–142.5°E	Магнитуда 4	4 210
К а т а л о г 3				
Южная Калифорния	1932–1974	33–36.5°N; 116–120°W	Магнитуда 3.3	3 228

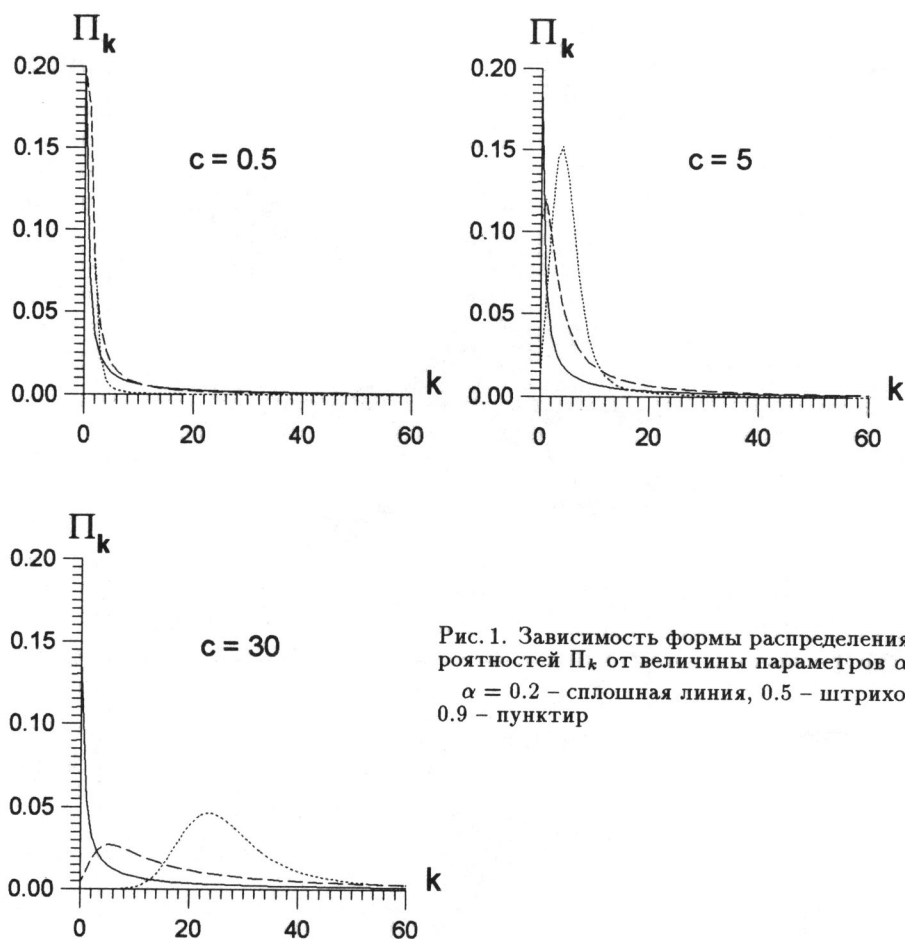
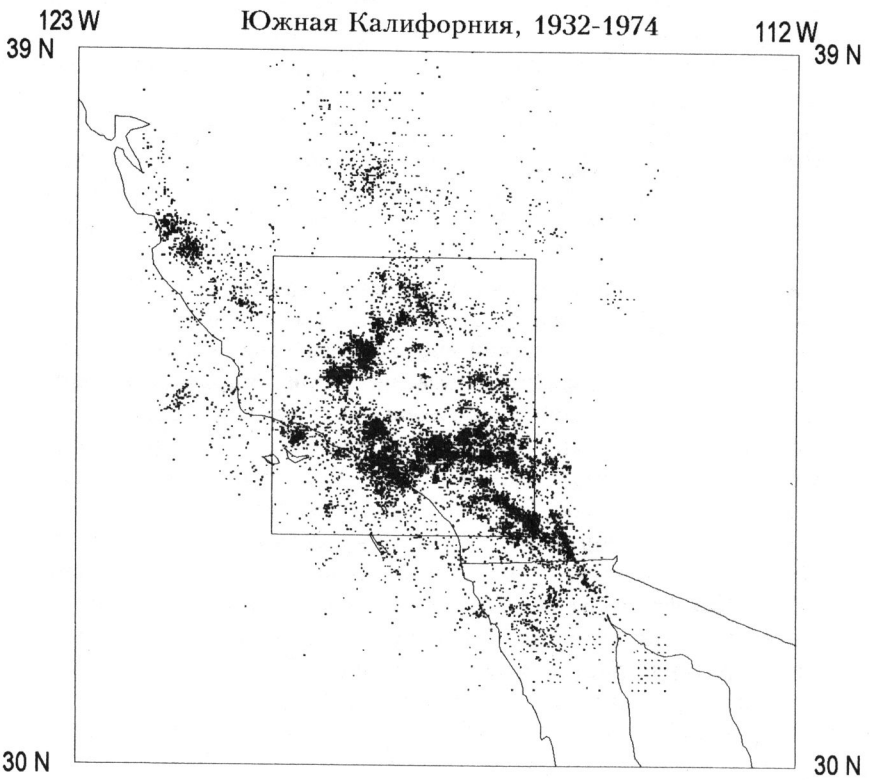
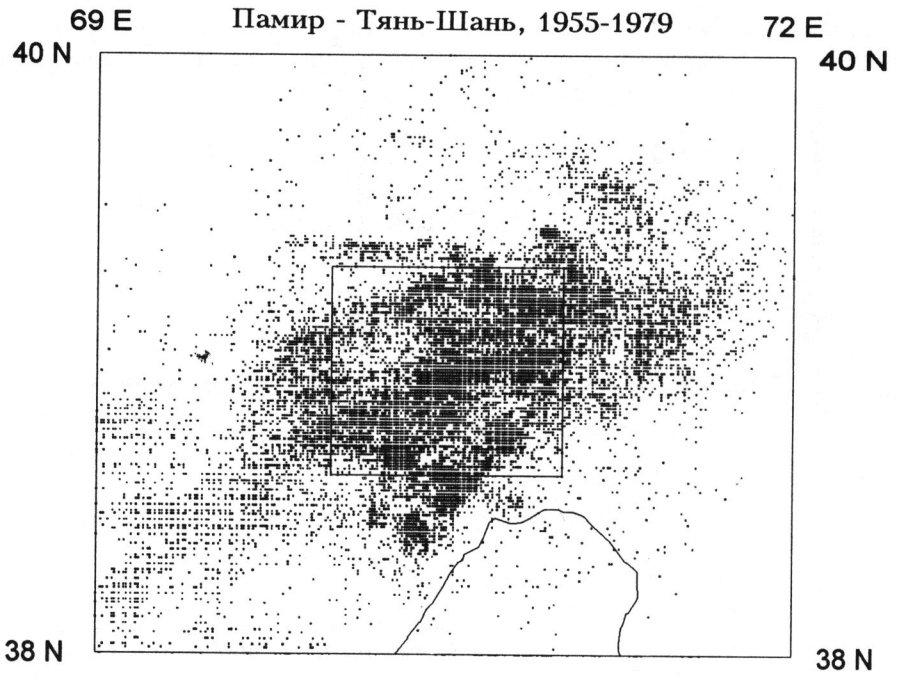


Рис. 1. Зависимость формы распределения вероятностей Π_k от величины параметров α и c
 $\alpha = 0.2$ – сплошная линия, 0.5 – штриховая, 0.9 – пунктирная

Мы рассмотрели три сейсмоактивных региона: Памир–Тянь–Шань, Японию и Южную Калифорнию. В каждом регионе выбирался максимальный прямоугольный участок, на котором сейсмический процесс представительно регистрировался за весь рассматриваемый промежуток времени. На рис. 2 приведены карты регионов с эпицентрами землетрясений и выделенными для анализа участками. Информация о каталогах дана в табл. 2. С учетом приведенных выше рекомендаций мы покрывали выбранные участки сеткой из 100 прямоугольных клеток, а из каталога случайно выбирали 2000 точек. На рис. 3 приведены нормированные гистограммы выборок из трех анализируемых каталогов и соответствующие значения вероятностей Π_k , в которых параметры (α, c) заменены их оценками максимального правдоподобия. Как видно из рис. 3, согласие распределения Π_k можно считать удовлетворительным для каталогов 2, 3 и недостаточно хорошим для каталога 1. Применение ξ^2 -критерия подтвердило этот вывод. Для каталогов 1, 2, 3 уровни значимости ξ^2 были равны соответственно 8.5%, 33%, 32%.



Япония, 1901-1993

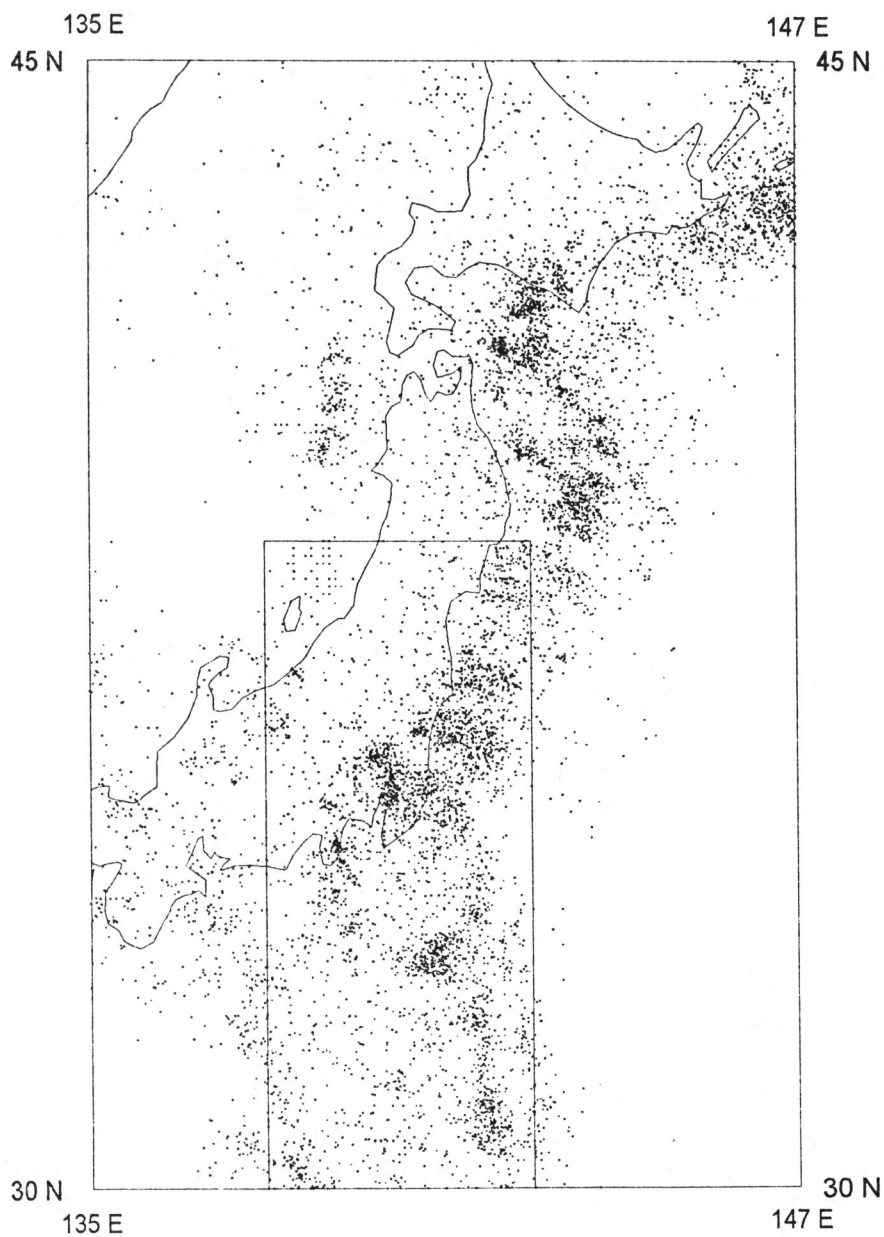


Рис. 2. Анализируемые прямоугольные участки и эпицентры землетрясений на картах трех регионов

Возможно, что недостаточно хорошее соответствие для Памира–Тянь-Шаня объясняется весьма малыми масштабами области (1) по сравнению с (2), (3) и тем, что на столь малых масштабах принятые при выводе вероятностей Π_k предположения (в частности, предположение о независимости чисел m_j и m_k в разных ячейках) нельзя считать полностью справедливыми. Результаты оценок параметров для всех трех каталогов с определением среднеквадратичных отклонений приведены в табл. 3, из которой видно, что значения $\hat{\alpha}$ изменяются примерно от 0.5 до 0.7. Наименьшее значение $\hat{\alpha}$ соответствует наиболее тяжелым "хвостам" в распределении пуассоновских интенсивностей λ_k . По-видимому, в Калифорнийском каталоге эти "хвосты" проявляются выразительнее, чем в других каталогах, что должно сопровождаться более интенсивными последовательностями афтершоков, роями слабых землетрясений, а также, возможно, относительно длительными сериями "средних" землетрясений. Эти явления приводят к тому, что в отдельных ячейках интенсивность пуассоновского потока λ_k достигает очень больших значений.

ТАБЛИЦА 3

α	$\sqrt{\text{var } \alpha}$	c	$\sqrt{\text{var } c}$	$\text{cov}(\alpha, c)$	χ^2 число ст. свободы
К а т а л о г 1					
0.66	0.045	13.5	1.87	-0.05	6.7 3
К а т а л о г 2					
0.69	0.044	12.0	1.55	-0.04	5.8 4
К а т а л о г 3					
0.54	0.057	4.5	0.89	-0.02	4.7 4

Как отмечалось выше, характеристическим свойством устойчивых законов является сохранение вида распределения при суммировании n независимых величин после нормировки на $n^{1/\alpha}$. Проверим, соблюдается ли это свойство в рассматриваемых нами случаях для $n = 2$. Просуммируем попарно значения выборки m_1, \dots, m_n :

$$\tilde{m}_i = m_j + m_k, \quad (34)$$

таким образом получим $n/2$ "укрупненных" наблюдений

$$\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_{n/2}.$$

Отметим, что при суммировании в (34) индексы j, k мы выбирали случайно среди множества всех ячеек. Такая рандомизация устраняла влияние возможной зависимости соседних ячеек при их суммировании. Если справедлива гипотеза о подчинении рассматриваемых величин устойчивому закону с показателем α , то при увеличении площади рассматриваемых клеток в 2 раза значение параметра c должно увеличиться в $2^{1/\alpha}$ раз.

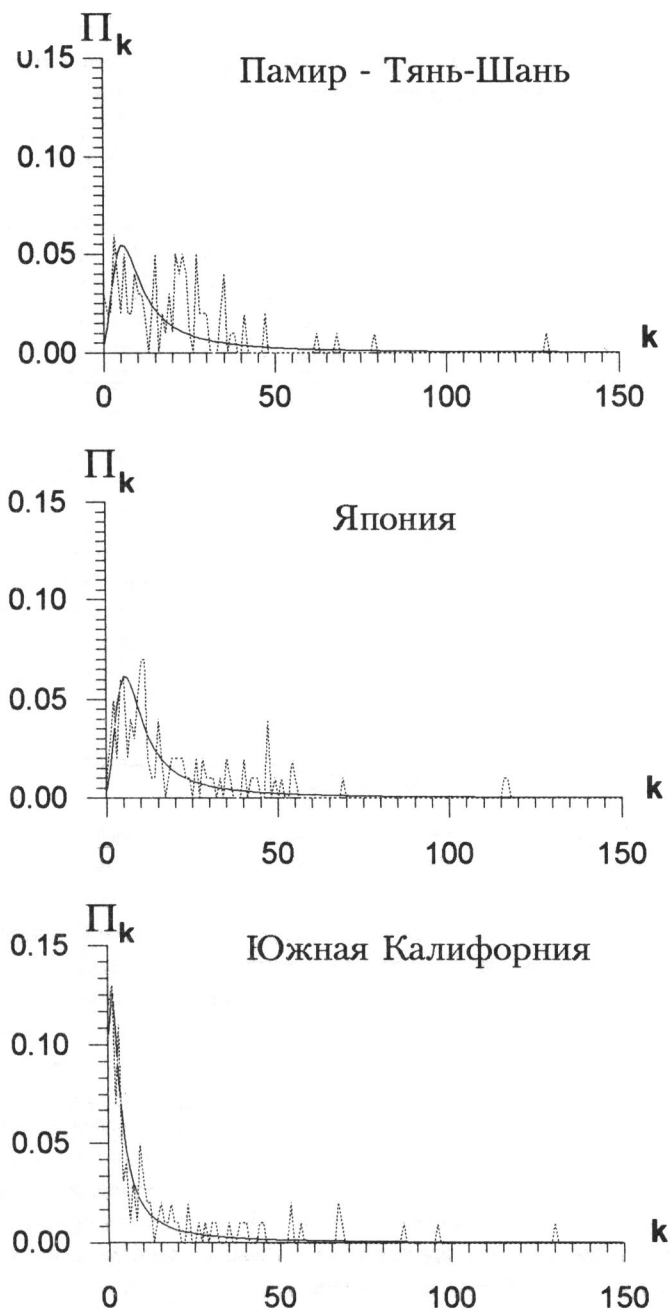


Рис. 3. Нормированные гистограммы выборки чисел m_i из трех анализируемых каталогов и соответствующие им распределения с параметрами α , c , полученными из уравнений максимального правдоподобия

Сплошная линия – теоретическое распределение, пунктирная – гистограмма выборки

В табл. 4 приведены результаты проверки увеличения оценок параметра c при укрупнении ячеек в 2 раза. В качестве параметра α при сравнении величины $2^{1/\alpha}$ с отношением c_{50}/c_{100} мы брали среднее из двух оценок (для 50 клеток и для 100 клеток). Как видно из последнего столбца табл. 4, для всех трех каталогов оценки параметра c для укрупненных 50 ячеек – c_{50} – с большой точностью совпадают с соответствующими значениями $2^{1/\alpha}c_{100}$, где c_{100} – оценки параметра c по 100 ячейкам. Они подтверждают, что распределение сейсмичности в пространстве имеет характеристическое свойство устойчивых законов (3). Если при укрупнении объединять смежные ячейки, то нормирующие константы c оказываются меньше,

ТАБЛИЦА 4

α для 50 клеток	$\sqrt{\text{var } \alpha}$	c для 50 клеток	$\sqrt{\text{var } c}$	χ^2 число ст. свободы	$2^{1/\alpha}$	$\frac{c_{50}}{c_{100}}$
К а т а л о г 1						
0.71	0.060	34.5	6.90	5.2 3	$2^{1/0.7} = 2.67$	2.56
К а т а л о г 2						
0.72	0.060	32.5	5.43	3.5 4	$2^{1/0.7} = 2.67$	2.67
К а т а л о г 3						
0.61	0.072	16.5	4.51	2.9 3	$2^{1/0.55} = 3.52$	3.66

чем $2^{1/\alpha}$. В табл. 5 показаны результаты оценки нормирующей константы при укрупнении смежных ячеек: видно, что эффект уменьшения нормирующей константы качественно можно объяснить с помощью формулы (19).

Мы проверили стабильность оценок параметров α , c и выполнение указанных выше свойств устойчивых законов для интенсивностей λ_k на различных энергетических диапазонах землетрясений и в различных временных интервалах. Сводные

ТАБЛИЦА 5

α для 50 клеток	$\sqrt{\text{var } \alpha}$	c для 50 клеток	$\sqrt{\text{var } c}$	$2^{1/\alpha}$	$\frac{c_{50}}{c_{100}}$	S_1/S
К а т а л о г 1						
0.66	0.062	28.5	6.04	$2^{1/0.66} = 2.86$	2.11	0.86
К а т а л о г 2						
0.68	0.060	25.5	4.95	$2^{1/0.68} = 2.77$	2.12	0.84
К а т а л о г 3						
0.53	0.072	11.9	3.67	$2^{1/0.59} = 3.70$	2.64	0.59

ТАБЛИЦА 6.

Регион	Период наблюдения, годы	Рассматриваемая энергия	Количество землетрясений	$\hat{\alpha}$	\hat{c}
Памир – Тянь-Шань	1955–1979	$k \geq 10$	384	0.65	2.1
	1955–1979	$k = 9$	825	0.69	5.2
	1955–1979	$k = 8$	2340	0.66	15.3
	1966–1979	$k = 6$	7255	0.62	47.3
Япония	1901–1993	$M > 4$	4210	0.69	25.5
	1901–1952	$M > 4$	2000	0.67	10.5
Южная Калифорния	1932–1974	$M \geq 3.333$	2818	0.57	4.6
	1980–1987	$M \geq 3$	968	0.60	2.8
	1980–1987	$M \geq 2.7$	2084	0.55	5.3

результаты по трем каталогам приведены в табл. 6: несмотря на небольшое число землетрясений в некоторых случаях, можно считать, что оценки параметра α существенно не изменились. Это говорит о сохранении закономерностей распределения сейсмичности на разных энергетических уровнях и в разных временных диапазонах. Характеристическое свойство устойчивости хорошо соблюдалось во всех рассмотренных случаях.

ДИСКУССИЯ

Предложенная в работе модель сейсмичности ставит многие вопросы, которые являются непривычными для сейсмологов. Остановимся на этом подробнее.

Наша модель возникла естественным образом из свойств самоподобия сейсмического процесса. Эти свойства подтверждены многочисленными работами сейсмологов и охватывают разнообразные характеристики сейсмического процесса и очага землетрясения (см. [1-9, 14, 18]). Они приводят к устойчивым распределениям, которые в случае неотрицательных величин имеют бесконечное математическое ожидание. По этой причине не может быть применена одна из основных предельных теорем теории вероятностей – закон больших чисел. Между тем, этот закон принимается многими геофизиками как нечто само собой разумеющееся. Часто без должных обоснований считается, что, усредняя стационарное геофизическое поле на достаточно большом интервале времени или по достаточно большой области пространства, мы должны обязательно получить сходимость к некоторой средней величине, существование которой якобы следует из общих принципов эргодичности поля. Однако в нашей модели сейсмичности закон больших чисел неприменим для случайных интенсивностей λ_k . Среднее арифметическое независимых величин λ_k , имеющих устойчивое распределение с $\lambda < 1$, т.е. величина

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lambda_k,$$

ни к чему не сходится при $n \rightarrow \infty$. Нужна гораздо более сильная нормировка

на $n^{1/\alpha}$, чтобы сумма $\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{k=1}^n \lambda_k$ оставалась конечной (она имеет такое же распределение, как одно слагаемое λ_1). Если мы представим себе, что существует достаточно большая, однородная сейсмическая территория, на которой справедлива наша модель, и если мы захотим получить из интенсивностей $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots$, относящихся к ячейкам площади S , "среднюю интенсивность на единицу площади", то составленная для этой цели величина $\frac{1}{nS} \sum_{k=1}^n \lambda_k$ не будет ни к чему сходиться при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, "средней по площади" интенсивности не существует, а сумма $\sum_{k=1}^n \lambda_k$ растет пропорционально $n^{1/\alpha}$, а не пропорционально n . В результате сейсмический потенциал, характеризуемый интенсивностью потока землетрясений, растет при увеличении площади S пропорционально $S^{1/\alpha}$, $1/\alpha > 1$, а не пропорционально площади S , хотя территория предполагается однородной в статистическом смысле.

Рассмотрим теперь усреднение интенсивности λ_k по времени. Каждая случайная величина λ_k относится к некоторому интервалу времени $(t, t+T)$: $\lambda_k = \lambda_k(t)$. Существенным является вопрос о поведении $\lambda_k(t)$ при изменении t . Можно допустить крайнюю точку зрения и считать, что $\lambda_k(t, T)$ вообще не изменяются при изменении t , а определяются раз и навсегда своим положением на местности. В таком случае вопрос об усреднении интенсивности по времени отпадает. Однако это предположение кажется нефизичным. В самом деле, "застывшие" интенсивности в среде, куда поступает и где диссипируется значительная тектоническая энергия, кажутся нереальными. Геологическую среду скорее можно уподобить вязкой жидкости, испытывающей турбулентные завихрения в масштабах времени порядка миллионов лет [19]. По-видимому, интенсивности $\lambda_k(t)$ меняются со временем, весь вопрос – с какой скоростью. Если такие изменения действительно происходят и этот процесс обладает статистическими свойствами перемешивания (достаточно быстрого "забывания" о прошлой истории), то при достаточно больших T последовательные значения интенсивностей $\lambda_k(t), \lambda_k(t+T)$, относящиеся к интервалам $(t, t+T), (t+T, t+2T)$, можно считать почти независимыми. Следовательно, усредняя интенсивности λ_k по такой последовательности, мы должны использовать нормировку $n^{1/\alpha}$, а не n :

$$\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{j=1}^n \lambda_k(t + (j-1)T).$$

Как и при усреднении по площади, не существует "средней по времени" интенсивности, против чего опять-таки восстает привычная геофизическая интуиция. Для практики очень существенно знать, на каких отрезках времени T интенсивности можно считать практически неизменными. Этот вопрос требует тщательного специального исследования. Если окажется, что характерные значения T , на которых изменяется локальная интенсивность сейсмического процесса, имеют порядок нескольких десятков лет, то эти изменения необходимо учитывать в практических задачах, связанных с сейсмическим риском. При этом надо иметь в виду, что средних интенсивностей может и не существовать.

Медленно убывающие "хвосты" устойчивых законов, которым подчиняются интенсивности, обусловлены такими явлениями, как рои землетрясений, афтершоки и форшоки, временные и пространственные кластеры землетрясений и т.п. Может показаться, что все эти характеристики сейсмического процесса связаны

лишь со слабыми землетрясениями. Однако это не так. Сейсмический процесс самоподобен, и, например, афтершоки сильнейших землетрясений (таких, например, как Аляскинское 1964 г. или Чилийское 1960 г.) сами являются очень сильными землетрясениями. Интересно отметить в этой связи, что в ряде математических моделей сейсмического процесса (см., например, [20]) наблюдается увеличение временной кластеризации событий с увеличением их энергий. Но для экспериментальной регистрации этого факта, естественно, требуются тем более длинные каталоги, чем большую энергию мы рассматриваем. Поэтому данный факт можно легко проследить на модельных каталогах и, по-видимому, практически невозможно – на реальных.

С учетом сказанного хотелось бы подчеркнуть необходимость осторожности в использовании таких, казалось бы, привычных понятий, как "средний поток сейсмической энергии" и "среднее время между двумя последовательными, сильнейшими для данного региона землетрясениями". Как мы показали, свойства самоподобия сейсмического процесса могут приводить к ситуациям, когда указанных средних может не существовать. В таких случаях для получения надежных результатов следует использовать не средние характеристики, а параметры, адекватно описывающие устойчивые законы, например показатели α и нормирующие константы $c(T)$.

Благодарности. Исследования проведены при поддержке Международного научно-технического центра (грант 008-94) при финансовом участии США и ЕС, а также ИНТАС (грант INTAS 94-232).

ЛИТЕРАТУРА

1. Садовский М.А., Голубева Т.В., Писаренко В.Ф., Шнирман М.Г. Характерные размеры горной породы и иерархические свойства сейсмичности // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1984. N 2. С.3-15.
2. Гейликман М.Б., Голубева Т.В., Писаренко В.Ф. Мультифрактальная структура пространственного распределения сейсмичности / ДАН СССР. 1990. Т.310, N 6. С.1335-1338.
3. Geilikman M.B., Golubeva T.V., Pisarenko V.F. Multifractal patterns of seismicity // Earth Planet. Sci. Lett. 1990. Vol.99, N 1/2. P.127-132.
4. Гейликман М.Б., Голубева Т.В., Писаренко В.Ф. Самоподобная иерархическая структура поля эпицентров землетрясений // Компьютерный анализ геофизических полей. М.: Наука, 1990. С.123-139. (Вычисл. сейсмология; Вып.23).
5. Писаренко В.Ф., Писаренко Д.В. Спектральные свойства самоподобных мер и их применение в геофизике // Компьютерный анализ геофизических полей. М.: Наука, 1990. С.107-123. (Вычисл. сейсмология; Вып.23).
6. Садовский М.А., Писаренко В.Ф. Подобие в геофизике // Природа. 1991. N 1. С.13-23.
7. Hirata T., Imoto M. Multifractal analysis of spatial distribution of microearthquakes in the Kanto region // Geophys. J. Inter. 1991. Vol.107. P.155-162.
8. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: Freeman and Co, 1982. 460 p.
9. Halsey T.C., Jensen M.H., Kadanoff L. et al. Fractal measure and their singularities: The characterization of strange sets // Phys. Rev. 1986. Vol.33, N A2. P.1141-1151.
10. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т.2. 751 с.

11. *Золотарев В.М.* Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983. 304 с.
12. *Levy P.* Calcul des Probabilites. Paris: Gauthier-Villars, 1925. 345 p.
13. *Хинчин А.Я.* Предельные законы для сумм независимых случайных величин. М.;Л.: ОНТИ, 1938. 116 с.
14. *Гейликман М.Б., Писаренко В.Ф.* О самоподобии в геофизических явлениях // Дискретные свойства геофизической среды. М.: Наука, 1989. С.109-131.
15. *Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я.* Некоторые применения гармонического анализа: Оснащенные гильбертовы пространства. М.: Физматгиз, 1961. 472 с.
16. *Добрушин Р.Л.* Автомодельность и реномгруппы обобщенных случайных полей // Многокомпонентные случайные системы. М.: Наука, 1978. С.179-213.
17. *Vere-Jones D.* Statistical models for earthquake occurrence: clusters, cycles, and characteristic earthquakes. Proceedings of Japan / USA conference on stochastic modelling. 1994. Tokio.
18. *Григорян С.С.* О механизме возникновения землетрясений и содержании энергетических закономерностей сейсмологии // ДАН СССР. 1988. Т.98, N 4. С.1094-1101.
19. *Kagan Y.Y.* Seismicity: turbulence or solids // Nonlinear Sci. Today. 1992. Vol.2, N 1. P.1-12.
20. *Christensen K., Olami Z.* Variation of the Gutenberg-Richter b-values and nontrivial temporal correlations in a spring-block model for earthquakes // J. Geophys. Res. 1992. Vol.97, N B6. P.8729-8735.