УДК 517.955.8

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А.М. Ильин
Институт математики и механики Уральского отделения Российской академии наук

Э.Н. Бессонова, Е.Л. Резников, Л.М. Розенкноп
Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук

Рассматривается задача Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка, зависящего от параметра, обращающегося в нуль в части области; в этой подобласти эллиптическое уравнение вырождается в уравнение меньшего порядка. Строится полное асимптотическое разложение решения этого уравнения. Рассмотренная задача является модельной для задачи об асимптотическом поведении собственных колебаний Земли с жидким ядром.

ASYMPTOTIC EXPANSION OF THE SOLUTION OF THE DEGENERATED ELLIPTIC EQUATION

A.M. Il'in
Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Division, Russian Academy of Sciences

E.N. Bessonova, E.L. Reznikov, L.M. Rozenknop
International Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences

The Dirichlet problem for a second order elliptic equation depending on a parameter, which vanishes in a part of the domain is considered; in this subdomain the elliptic equation degenerates into an equation of a low order. The complete asymptotic expansion of the solution of this equation is constructed. The problem under consideration is the model for an asymptotic behaviour of the free oscilations of the Earth with a liquid core.

ВВЕДЕНИЕ

Собственные колебания Земли являются важным источником информации для определения ее внутреннего строения [1]. Сейсмологические данные свидетельствуют о том, что внешнее ядро Земли является жидким. В системе дифференциальных уравнений, описывающих собственные колебания Земли, модуль сдвига μ входит в коэффициент при старшей производной в одном из уравнений.

Так как в жидком ядре $\mu = 0$, этот коэффициент также обращается в нуль. Таким образом, в области, соответствующей жидкому ядру, система уравнений становится вырожденной. Хотя задача о собственных колебаниях Земли численно решалась многими авторами [2–4] (см. также [5] и ссылки в ней), обоснование корректности таких вычислений при наличии жидкого ядра отсутствовало. Корректным решением задачи о собственных колебаниях было бы построение асимптотических разложений решения по малому параметру μ. Математически задача об асимптотическом разложении сложна, поэтому мы рассматриваем упрощенную модельную задачу с вырождением в части области. Мы надеемся, что она окажется полезной как первый этап в корректном решении задачи о собственных колебаниях Земли с жидким ядром.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка, зависящего от малого параметра $\varepsilon > 0$. Характерной особенностью задачи (в отличие от рассмотренных в [6–13]) является вырождение предельного уравнения в уравнение меньшего порядка некоторой подобласти, в то время как вне этой подобласти уравнение остается эллиптическим.

Сформулируем точную математическую постановку задачи:

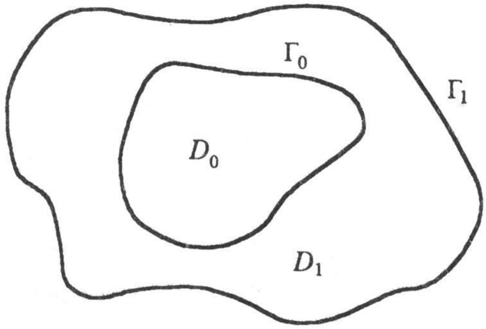
$$Lu \equiv \rho(x)\Delta u + (\mathbf{b}, \nabla u) + c(x)u = f(x), \qquad x \in D = D_0 \cup D_1, \tag{1а}$$

$$\rho(x) = \begin{cases} \alpha > 0, & x \in D_0 \\ \varepsilon > 0, & x \in D_1, \end{cases} \qquad c(x) < 0, \tag{1б}$$

$$u \in C(D), \qquad u\Big|_{\Gamma_1} = 0, \tag{2}$$

$$\alpha \left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma_0 - 0} = \varepsilon \left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma_0 + 0}. \tag{3}$$

Здесь D_0 и D_1 – области с гладкими границами Γ_0 и Γ_1 (см. рисунок); $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к границе области D_0; поле $\mathbf{b}$ также предполагается достаточно гладким.



Условие $c(x) < 0$ выбрано для упрощения обоснования полученных решений (см. п.3) и с построением этих решений не связано.

Замечание. Условие (3) естественно возникает во многих физических задачах. Например, если $u(x)$ – температура в точке, то это условие означает равенство тепловых потоков на границе области D_0.

Сделаем еще несколько предположений относительно границ Γ_0 и Γ_1 и поля $\mathbf{b}$ в области D_1. Будем считать, что поле $\mathbf{b}$ не обращается в нуль в области D_1 и что каждая характеристика (решение уравнения $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{b}$) пересекает границы Γ_0 и Γ_1 и не касается их. Другими словами,

$$(\mathbf{b}, \mathbf{n})\Big|_{\Gamma_0} \neq 0 \quad \text{и} \quad (\mathbf{b}, \mathbf{n})\Big|_{\Gamma_1} \neq 0.$$

Предположим далее, что выполнено

Условие A: предельное уравнение $(\mathbf{b}, \nabla u) + c(x)u = f(x)$, $u\Big|_{\Gamma_1} = \varphi$ имеет гладкое решение $u(x)$ в области D_1 для любых гладких функций f и φ. Наша цель – построить асимптотику решения краевой задачи (1)–(3) при $\varepsilon \to 0$.

2. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

Построения асимптотического разложения зависят от направления поля на границе Γ_0, поэтому мы различаем два случая.

Случай 1. Пусть на границе области D_0 выполняется условие: $(\mathbf{b}, \mathbf{n})\Big|_{\Gamma_0} > 0$. Решение ищется в виде асимптотических рядов по степеням ε, различных в областях D_0 и D_1 . Чтобы согласовать эти разложения, вводятся дополнительные *погранслойные* функции вблизи границы Γ_0 в области D_1. Для этого в малой окрестности гладкой кривой Γ_0 (в пограничном слое) делается специальная замена переменных – "растяжение". В этой окрестности введем координаты s, ζ, где s меняется вдоль Γ_0, а ζ – по нормали к Γ_0 ($\zeta > 0$ в направлении внешней нормали $\mathbf{n}$). Можно считать, что метрический тензор, соответствующий этим координатам, становится единичным в точках границы Γ_0. Будем искать решение $u(x)$ задачи (1)–(3) в виде асимптотических рядов по степеням ε в областях D_0 и D_1:

$$u(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x), & x \in D_0, \\[2ex] \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(x) + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k\left(s, \zeta/\varepsilon\right), & x \in D_1. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $u_k(x)$ и $v_k(x)$ – гладкие функции в указанных областях, $w_k\left(s, \zeta/\varepsilon\right)$ – функции, быстро убывающие вне пограничного слоя шириной ε^γ $(0 < \gamma < 1)$ в окрестности кривой Γ_0. Эти функции потребуются для того, чтобы удовлетворить условиям на границе Γ_0.

Подставляя ряды $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x)$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(x)$ из (4) в уравнение (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим рекуррентные системы уравнений для $u_k(x)$ и $v_k(x)$:

$$Lu_0(x) = f(x), \quad Lu_k(x) = 0,\ k > 0, \qquad x \in D_0, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &L_0 v_0 \equiv (\mathbf{b}, \nabla v_0) + c(x) v_0 = f(x), \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in D_1. \\ &L_0 v_{k+1}(x) = -\Delta v_k(x), \quad k \geq 1, \end{aligned} \tag{6}$$

Для функций $v_k(x)$ потребуем выполнения граничного условия

$$v_k\Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad k \geq 0.$$

В силу сделанных предположений относительно поля $\mathbf{b}$ функции $v_k(x)$ в области D_1 определяются из линейных уравнений (6) и граничных условий на границе Γ_1 однозначно.

Ряд $W = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(s, \zeta/\varepsilon)$ должен удовлетворять записанному в координатах s, ζ однородному уравнению $LW = 0$. В окрестности кривой Γ_0 можно записать

$$LW = \varepsilon(\Delta_{s\zeta} W + \mathcal{L}_2 W) + (\nabla_{s\zeta} W, \mathbf{b}) + (\mathcal{L}_1 W, \mathbf{b}) + c(x) W, \tag{7}$$

где $\Delta_{s\zeta} W = \dfrac{\partial^2 W}{\partial s^2} + \dfrac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2}$, $(\nabla_{s\zeta} W, \mathbf{b}) = \dfrac{\partial W}{\partial s} b_s + \dfrac{\partial W}{\partial \zeta} b_\zeta$, а $\mathcal{L}_1 = \nabla - \nabla_{s\zeta}$ и $\mathcal{L}_2 = \Delta - \Delta_{s\zeta}$ – дифференциальные операторы первого и второго порядков, коэффициенты которых обращаются в нуль на границе Γ_0.

Введем погранслойную переменную $\eta = \zeta/\varepsilon$ и разложим коэффициенты в правой части (7) в ряды Тейлора по степеням $\zeta = \varepsilon\eta$. Обозначим $b_0(s) = (\mathbf{b}, \mathbf{n})\Big|_{\Gamma_0}$. В переменных s, η уравнение $LW = 0$ примет вид

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + b_0(s)\frac{\partial W}{\partial \eta}\right) + P_0 W + \varepsilon P_1 W + \ldots = 0, \tag{8}$$

где P_k – операторы, содержащие производные по s и η не выше второго порядка с коэффициентами, гладко зависящими от s и степенным образом от η.

Подставляя в (8) $W = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(s, \eta)$ и приравнивая нулю коэффициенты при степенях ε, получим рекуррентную систему уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 w_0}{\partial \eta^2} + b_0(s)\frac{\partial w_0}{\partial \eta} = 0, \\ &\frac{\partial^2 w_k}{\partial \eta^2} + b_0(s)\frac{\partial w_k}{\partial \eta} = F_k(s, \eta, w_0, \ldots, w_{k-1}), \qquad k > 1. \end{aligned} \tag{9}$$

Правые части k-го уравнения этой системы линейно зависят от $w_0, \ldots, w_{k-1}$, гладко от s и полиномиально от η. Одно из граничных условий для функций w_k – стремление к нулю при $\eta \to \infty$.

На границе Γ_0 имеем условие (3) и условие непрерывности $u\Big|_{\Gamma_0 - 0} = u\Big|_{\Gamma_0 + 0}$. При заданных значениях $v_k\Big|_{\Gamma_0}$ и $\partial v_k/\partial n\Big|_{\Gamma_0}$ мы не можем найти функции $u_k(x)$ в области

D_0, для которых выполнялись бы оба условия на границе Γ_0. Возникающая невязка в граничном условии ликвидируется с помощью функций w_k. Из условия (3) получаем

$$\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left.\frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma_0} = \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left.\frac{\partial v_k}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma_0} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial w_k}{\partial \eta}(s,0)$$

или

$$\begin{aligned} &\alpha \left.\frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma_0} = \frac{\partial w_0}{\partial \eta}(s,0), \\ &\alpha \left.\frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma_0} = \frac{\partial w_k}{\partial \eta}(s,0) + \left.\frac{\partial v_{k-1}}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma_0}, \qquad k \geq 1. \end{aligned} \tag{10}$$

Условие непрерывности решения дает

$$(u_k - v_k)\Big|_{\Gamma_0} = w_k(s,0), \qquad k \geq 0. \tag{11}$$

Любое решение w_k, убывающее при $\eta \to \infty$, можно представить в виде

$$w_k = w_k(s,0)\exp(-b_0(s)\eta) + \tilde{w}_k,$$

где $\tilde{w}_k$ удовлетворяет (9), $\tilde{w}_k(s,0) = 0$ и $\tilde{w}_k(s,\eta) \to 0$ при $\eta \to \infty$ ($\tilde{w}_0 \equiv 0$). Пользуясь (10) и (11), получим

$$\alpha \left.\frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma_0} = \frac{\partial \tilde{w}_k}{\partial \eta}(s,0) - (u_k - v_k)\Big|_{\Gamma_0} b_0 + \left.\frac{\partial v_{k-1}}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma_0}.$$

Отсюда

$$\left(\alpha \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} + b_0 u_0\right)\Bigg|_{\Gamma_0} = b_0 v_0\Big|_{\Gamma_0}, \tag{12}$$

$$\left(\alpha \frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{n}} + b_0 u_k\right)\Bigg|_{\Gamma_0} = \frac{\partial \tilde{w}_k}{\partial \eta}(s,0) + b_0(s) v_k\Big|_{\Gamma_0} + \left.\frac{\partial v_{k-1}}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma_0}, \qquad k \geq 1. \tag{13}$$

Решив задачу (5) с граничным условием (12), найдем функции $u_0(x)$ и $w_0(s,0) = (u_0 - v_0)\Big|_{\Gamma_0}$.

Подставив $w_0(s,\eta) = w_0(s,0)\exp(-b_0\eta)$ в качестве аргумента при $k = 1$ в правую часть (9), получим $F_1(s,\eta,w_0)$ и найдем из этого уравнения $\tilde{w}_1(s,\eta)$ и $\partial\tilde{w}_1/\partial\eta(s,0)$.

Решая задачу (5) с граничным условием (13) для $k = 1$, найдем функции $u_1(x)$ и $w_1(s,0) = (u_1 - v_1)\Big|_{\Gamma_0}$ и, таким образом, $w_1(s,\eta)$.

Повторяя эти шаги последовательно для всех $k \geq 2$, найдем $u_k(x)$ и $w_k(s,\eta)$, что завершает процесс построения асимптотики решения исходной задачи.

Случай 2. Он отличается от случая 1 тем, что пограничный слой вводится в окрестности внешней границы Γ_1 области D_1, поэтому ситуация здесь несколько проще. В остальном этот случай аналогичен случаю 1.

Расположение областей D_0 и D_1 такое же, как в предыдущем случае, но поле $\mathbf{b}$ удовлетворяет условию $(\mathbf{b},\mathbf{n})\Big|_{\Gamma_0} < 0$. Относительно поля $\mathbf{b}$ и границ областей делаются те же предположения, что и в случае 1, с заменой Γ_1 на Γ_0 в *условии* А. При этом, очевидно, $(\mathbf{b},\mathbf{n})\Big|_{\Gamma_1} < 0$.

Обозначим $b_0(s) = -(\mathbf{b},\mathbf{n})\Big|_{\Gamma_1} = (\mathbf{b},-\mathbf{n})\Big|_{\Gamma_1} > 0$ ($-\mathbf{n}$ – внутренняя нормаль к Γ_1) и введем в окрестности границы Γ_1 координаты s,ζ: s меняется вдоль Γ_1, а ζ – по нормали к Γ_1 ($\zeta > 0$ в направлении внутренней нормали).

Будем искать решение, как и в случае 1, в виде

$$u(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x), & x \in D_0, \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(x) + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(s,\zeta/\varepsilon), & x \in D_1. \end{cases}$$

Условие $b_0(s) > 0$ позволяет построить функции w_k, быстро убывающие вне пограничного слоя. Отличие этого случая от предыдущего в том,что условия на границе Γ_0 выполняются без участия функций w_k, которые используются для устранения невязки на Γ_1, где граничные условия проще.

Уравнения для u_k, v_k и w_k получаются такими же, как и в случае 1. Так как w_k отличны от нуля только вблизи границы Γ_1, то условие (3) имеет вид

$$\alpha\, \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\Gamma_0} = \varepsilon\, \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\Gamma_0},$$

где $U = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x)$, $x \in D_0$; $V = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(x)$, $x \in D_1$, или

$$\alpha\, \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\Gamma_0} = 0, \qquad \alpha\, \frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\Gamma_0} = \frac{\partial u_{k-1}}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\Gamma_0}, \qquad k \ge 1.$$

Таким образом, для функции $u_0(x)$ получаем задачу Неймана:

$$\left.\begin{array}{l} Lu_0(x) = f(x), \\ \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\Gamma_0} = 0, \end{array}\right. \quad x \in D_0, \tag{14}$$

Условие непрерывности на границе Γ_0 дает соотношения

$$u_k\Big|_{\Gamma_0} = v_k\Big|_{\Gamma_0}, \qquad k \ge 0.$$

Решив задачу (14) и найдя $u_0(x)$, получим граничные условия для определения v_0 из задачи

$$\left.\begin{array}{l} L_0 v_0 = (\mathbf{b}, \nabla v_0) + c(x) v_0 = f(x), \\ v_0\Big|_{\Gamma_0} = u_0\Big|_{\Gamma_0}, \end{array}\right. \quad x \in D_1.$$

Зная v_0, можно определить u_1, затем v_1 и т.д.

Пусть u_k и v_k $(k \geq 0)$ определены. В области D_1 решение

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(s, \zeta/\varepsilon)$$

должно удовлетворять условию $u\Big|_{\Gamma_1} = 0$, откуда следует, что

$$w_k(s, 0) = -v_k\Big|_{\Gamma_1}, \qquad k \geq 0. \tag{15}$$

Для функций w_k получается система уравнений вида (9) и можно найти быстроубывающие решения, удовлетворяющие начальным данным (15). Функции u_k, v_k и w_k в этом случае дают решение исходной задачи.

3. ОБОСНОВАНИЕ ПОСТРОЕННЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Покажем, что в случаях 1 и 2 (п. 2) построенные функции $u(x)$ являются формальным асимптотическим решением исходной задачи.

В каждом из рассмотренных выше случаев определим функцию

$$h_N(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{N} \varepsilon^k u_k(x), & x \in D_0, \\ \sum\limits_{k=0}^{N} \varepsilon^k v_k(x) + \sum\limits_{k=0}^{N} \varepsilon^k w_k(s, \zeta/\varepsilon), & x \in D_1, \end{cases}$$

где s, ζ – координаты в соответствующем пограничном слое.

В обоих случаях выполняются соотношения

$$Lh_N(x) - f(x) = O(\varepsilon^N), \tag{16}$$

$$h_N|_{\Gamma_1} = 0, \quad \alpha\, \frac{\partial h_N}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\Gamma_0 - 0} - \varepsilon\, \frac{\partial h_N}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\Gamma_0 + 0} = O(\varepsilon^N). \tag{17}$$

Это значит, что $u(x)$ является в каждом случае формальным асимптотическим решением исходной краевой задачи при $\varepsilon \to 0$ (см., например, [3]). Так как для $u(x)$ невязка (правая часть соотношений (16) и (17)) равна нулю, то для $\delta_N = u(x) - h_N(x)$ можно записать

$$L\delta_N(x) = O(\varepsilon^N), \qquad x \in D,$$

$$\delta_N|_{\Gamma_1} = 0, \quad \alpha\, \frac{\partial \delta_N}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\Gamma_0 - 0} - \varepsilon\, \frac{\partial \delta_N}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\Gamma_0 + 0} = O(\varepsilon^N).$$

Из теоремы, приведенной в приложении, следует, что $\delta_N(x) = O(\varepsilon^N)$ равномерно в области $\bar{D}$ и построенные асимптотические разложения решения исходной задачи обоснованы.

4. ГЛАВНЫЕ ЧЛЕНЫ АСИМПТОТИКИ

Выпишем уравнения, которым удовлетворяют главные члены асимптотических разложений.

Сформулируем окончательный результат.

В случае 1 пределом решения исходной задачи при $\varepsilon \to 0$ является функция

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u_0(x), & x \in D_0, \\ v_0(x), & x \in D_1, \end{cases}$$

где функции u_0 и v_0 являются решениями краевых задач

$$\left. \begin{aligned} &(\mathbf{b}, \nabla v_0) + c(x)v_0 = f(x), \\ &v_0\Big|_{\Gamma_0} = 0, \end{aligned} \right\} \quad x \in D_1;$$

$$\left. \begin{aligned} &\alpha\Delta u_0 + (\mathbf{b}, \nabla u_0) + c(x)u_0 = f(x), \\ &\alpha\frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} + b_0 u_0\Big|_{\Gamma_0} = b_0 v_0, \end{aligned} \right\} \quad x \in D_0.$$

В случае 2 предельные функции u_0 и v_0 – решения краевых задач

$$\left. \begin{aligned} &\alpha\Delta u_0 + (\mathbf{b}, \nabla u_0) + c(x)u_0 = f(x), \\ &\frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\Gamma_0} = 0, \end{aligned} \right\} \quad x \in D_0;$$

$$\left. \begin{aligned} &(\mathbf{b}, \nabla v_0) + c(x)v_0 = f(x), \\ &v_0|_{\Gamma_0} = u_0|_{\Gamma_0}, \end{aligned} \right\} \quad x \in D_1.$$

В обоих случаях решение первой задачи определяет граничные условия для второй.

Итак, для рассматриваемой модельной задачи получены полные асимптотические разложения решения и уравнения для главных членов разложения. Так как данная задача является предварительной, прямых геофизических приложений ее не приводится. Мы полагаем, что использованные методы окажутся полезными в задаче о собственных колебаниях Земли с жидким ядром.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем теорему, которой мы воспользовались в основном тексте.

Лемма. Пусть $c(x) < 0$ при $x \in D_0$ и выполняется условие A. Тогда существует функция $V(x) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$ такая, что для некоторого $m > 0$

$$V(x) > m \tag{П1}$$

и при достаточно малых ε

$$LV(x) < -m, \tag{П2}$$

$$\varepsilon\left.\frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma_0+0}-\alpha\left.\frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma_0-0}<-m \tag{П3}$$

для всех $x \in D = D_0 \cup D_1$.

Доказательство. Пусть $V_0(x,\mu)$ – решение уравнения $LV = -\mu$ в области D_0, $V\Big|_{\Gamma_0} = 1$, $\mu \geq 0$. Так как $c(x) < 0$, то из принципа максимума следует, что $V_0(x,0)$ строго положительна в области D_0, достигает максимума на границе и выполняется условие $\partial V_0/\partial\mathbf{n}\Big|_{\Gamma_0} > 0$ (см., например, [14], с. 24). Следовательно, при достаточно малых μ выполняется неравенство $\partial V_0(x,\mu)/\partial\mathbf{n}\Big|_{\Gamma_0} > 0$.

В области D_1 рассмотрим решение $V_1(x,\gamma)$ уравнения с параметром γ

$$(\mathbf{b},\nabla V) + cV = -\gamma, \quad \gamma > 0,$$

и с граничным условием $V\Big|_{\Gamma_0} = 1$.

В области D_1 функция $V_1(x,0) > 0$ (так как она положительна вдоль каждой характеристики), поэтому в D_1 также $V_1(x,\gamma) > 0$ при некотором малом γ. В области D_1 очевидно, что $LV_1 = \varepsilon\Delta V_1 - \gamma$ и, следовательно, можно выбрать такое $m > 0$, что при достаточно малых ε для функции $V(x)$, равной V_0 в области D_0 и V_1 в области D_1, выполнялись бы неравенства (П1), (П2) и (П3). Лемма доказана.

Теорема. Пусть $c(x) < -c_0 < 0$ и выполняется условие A; пусть для некоторого натурального числа n

$$Lu(x,\varepsilon) = O(\varepsilon^n),$$

$$u\Big|_{\Gamma_1} = O(\varepsilon^n), \qquad \alpha\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma_0-0} - \varepsilon\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma_0+0} = O(\varepsilon^n)$$

при $x \in D$, $\quad D = D_0 \cup D_1$, $\quad u(x,\varepsilon) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$.

Тогда $u = O(\varepsilon^n)$.

Доказательство. Рассмотрим функции $W_\pm(x,\varepsilon) = M\varepsilon^n V(x) \pm u(x,\varepsilon)$, где V – функция, построенная в предыдущей лемме, M – достаточно большая положительная постоянная. Из условий теоремы и неравенств (П1), (П2) и (П3) леммы следует, что при достаточно больших M выполняются неравенства

$$W_\pm\Big|_{\Gamma_1} > 0, \;\; LW_\pm(x,\varepsilon) < 0 \;\text{ при } x \in D \;\text{ и}$$

$$\alpha\left.\frac{\partial W_\pm}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma_0-0} > \varepsilon\left.\frac{\partial W_\pm}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma_0+0}.$$

Последнее неравенство означает (геометрически это очевидно), что минимум $W_\pm$ не может достигаться на границе Γ_0, а из неравенства $LW_\pm(x,\varepsilon) < 0$ и принципа максимума (при $c(x) < 0$) следует, что в области D функция $W_\pm(x,\varepsilon)$ не может достигать отрицательного минимума. Поэтому $W_\pm(x,\varepsilon) > 0$ в области $\bar{D}$, и $|u(x,\varepsilon)| \leq M_1\varepsilon^n$, что и требовалось доказать.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Международного научно-технического центра (грант 008-94) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 93-01-16046).

ЛИТЕРАТУРА

1. Собственные колебания Земли/ Под ред. Жаркова В.Н. М.: Мир, 1964. 315 с.
2. *Gilbert F., Dziewonski A.M.* An application of normal mode theory to the retrieval of structural parameters and source mechanisms from seismic spectra // Phil. Trans. Roy. Soc. of London. 1975. Vol.278. P.187-269.
3. *Morris S.P., Geller R.J., Kawakatsu H., Tsuboi S.* Variational free oscillation computations for three laterally heterogeneous Earth models // Phys. Earth Planet. Intern. 1987. Vol.47. P.288-318.
4. *Park J., Gilbert F.* Coupled free oscillations of an aspherical dissipative, rotating Earth: Galerkin theory // J. Geophys. Res. 1986. Vol.91. P.7241-7260.
5. *Woodhouse J.H.* Long period seismology and the Earth's free oscillations // Second workshop on 3D modelling of seismic waves generation, propagation and their inversion, 4-15 November, 1996. Dep. Earth Sci. Oxford Univ. Oxford, 1996. 55 p.
6. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат.наук. 1957. Т.12, вып.5. С.3-122.
7. *Ильин А.М.* Пограничный слой // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.:ВИНИТИ, 1988. Т.34. С.175-214.
8. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
9. *Треногин В.А.* Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника–Вишика // Успехи мат. наук. 1970. Т.25, вып.4. С.123-156.
10. *Покровский Л.Д.* Асимптотика решений некоторых классов уравнений в свертках // Докл. научно-технич. конф. по итогам научно-исслед. работ за 1966-1967 гг., секция мат. М.: МЭИ, 1967. С.155-185.
11. *Покровский Л.Д.* Задача Дирихле для псевдодифференциальных уравнений, зависящих от параметра // ДАН СССР. 1969. Т.188, N 3. С.528-531.
12. *Покровский Л.Д.* Краевая задача для уравнений в свертках, содержащих параметр // Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1968. Т.3, N 2. С.137-159.
13. *Федотов И.А.* Эллиптические дифференциальные уравнения с разрывными коэффициентами // Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1969. Т.4, N 1. С.31-54.
14. *Ландис Е.М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971. 287 с.