УДК 550.310:517.984.54

ЗАДАЧА УПЛОЩЕНИЯ ЗЕМЛИ: ПРОИСХОЖДЕНИЕ, МЕТОДЫ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ И РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД

С.Г. Киселев, А.Н. Кузнецов, В.М. Маркушевич
Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук

Предлагается точное решение задачи уплощения для P–SV-колебаний, рассматриваются его свойства, находится член первой степени в разложении уплощения по обратным степеням радиуса Земли. Хотя точное преобразование уплощения Земли для SH-колебаний известно уже более четверти века, найти его аналог для P–SV-колебаний не удавалось. Использовались различные приближенные методы. Точное преобразование уплощения удалось получить, опираясь на следующий результат. Система уравнений теории упругости в плоско-, сферически- и цилиндрически-слоистых средах сводится к специальной матричной форме Штурма–Лиувилля. Во всех этих случаях свободная от волнового числа часть оператора разлагается в произведение дифференциальных операторов первого порядка. Такое представление позволяет перейти от заданного сферического оператора к некоторому плоскому с помощью матричного преобразования. Это позволяет рассчитывать колебания рэлеевского типа в цилиндрически- и сферически-симметричных телах с помощью методов, разработанных для плоскослоистых сред.

THE EARTH FLATTENING PROBLEM: GENESIS, EXACT SOLVING METHODS, AND EXPANSION INTO SERIES

S. G. Kiselev, A. N. Kuznetsov, and V. M. Markushevich
International Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences

This paper presents an exact solution of the Earth flattening problem, properties of these solution, and their expansion into power series in the reciprocal of the Earth radius. Although the exact Earth flattening transformation for SH vibrations has been known for more than a quarter of a century, all attempts to find its analogue for P-SV vibrations have not been successful. Various approximate methods were used instead. We succeeded in deriving the exact flattening transformation based on the following result. Equations of theory of elasticity for plane, cylindrically and spherically layered media are transformed to a special matrix Sturm-Liouville form. In all these cases the part of the operator which does not depend on wave number is expanded in the composition of two first order differential operators. Such a representation allows one to convert a given spherical operator to a flat one by means of a matrix

transformation. This makes it possible to compute Rayleigh-like vibrations of a cylindrically or spherically symmetric body by methods developed for plane stratified media.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое решение задачи мы собирались предварить историческим очерком, однако изложение истории вопроса выходит далеко за рамки статьи. Читатель может составить представление об этой истории, ознакомившись с вводными главами источников из далеко не полного нашего списка. Но и мы внесем свою лепту, сделав несколько замечаний.

В сейсмологию эта задача пришла, по-видимому, из теории распространения радиоволн вокруг Земли (где о ней, во всяком случае, заговорили раньше). Там рассматривается осесимметричная задача для волнового уравнения $\Delta\Psi + k^2 n^2 \Psi = 0$, в котором коэффициент преломления n зависит только от радиуса (k от радиуса не зависит). В сферической системе координат переменные разделяются: $\Psi = U(r)T(\vartheta)$, так что решение определяется двумя уравнениями

$$r^2 U'' + 2rU' + k^2(n^2 r^2 - a^2\xi^2)U = 0, \tag{1}$$

$$T'' + \operatorname{ctg}\vartheta T' + k^2 a^2 \xi^2 T = 0, \tag{2}$$

где a – радиус Земли.

По оценке Пикериса [1], сферическая форма земной поверхности вносит большие сложности в математическое решение проблемы, особенно если индекс преломления непостоянен. За доказательством этого он, правда, отсылает к статье А. Зоммерфельда. Решение после замены переменных $h = r - a$, $x = a\vartheta$ либо $h = a\ln(r/a)$, $x = a\vartheta$ ищется в виде ряда по степеням a^{-1} (см.[1, 2]). Оказывается, что при некоторых условиях уже нулевой член ряда дает хорошее (с погрешностью 2% [1]) приближение. Этот член является решением аналогичной (1), (2) задачи для полупространства с коэффициентом преломления N, зависящим от высоты h:

$$V'' + k^2(N^2 - \sigma^2)V = 0, \tag{3}$$

$$S'' + x^{-1}S' + k^2\xi^2 S^2 = 0, \tag{4}$$

где

$$\sigma^2 = \xi^2 + (2ka)^{-2}, \tag{5}$$

V зависит от h, а S – от x (и, конечно, от параметров).

Отсюда и возник термин "уплощающая Землю аппроксимация". Ку и Катцин [3] сняли проблему оценки точности приближения и определения количества необходимых членов ряда, они "для всех высот и расстояний" указали, что уравнение (1) преобразуется в (3) посредством формул $U = (a/r)^{1/2}V$, $N = nr/a$ и формулы (5). Это преобразование получило название точного уплощения Земли. Отметим, что оно зависит от частоты, так как коэффициент k, участвующий в формуле (5), зависит от частоты ($k = \omega/c$, c – скорость света).

Интересно, что и при аппроксимации, и при точном преобразовании авторы стремятся сводить не только уравнение (1) к уравнению (3), которые зависят от коэффициента преломления и, следовательно, сосредотачивают в себе особенности, связанные с его поведением, но и уравнение (2) к уравнению (4), решения которых выражаются через специальные функции. Разумеется, точного уплощения уравнения (2) сделать невозможно, так как, в отличие от (1), оно не зависит от неопределенной функции n; поэтому здесь авторы [3] ограничиваются тем, что находят способ представления членов ряда через цилиндрические функции.

Остается загадкой как в случае радиоволн, так и в ситуации сейсмических колебаний, почему сферически-симметричные задачи доставляют больше трудностей, чем задачи в плоскослоистой среде. Казалось бы, сама возможность уплощения означает, что задачи, видимо, одинаково трудны (или просты).

В самом деле, тот факт, что одна задача сводится к другой простым преобразованием, означает их эквивалентность по сложности, если, конечно, само понятие сложности имеет объективный смысл. Достаточно парадоксальным выглядит и то, что в [3] появилось решение задачи точного уплощения одновременно с ее постановкой, а в сейсмологии решение появилось [4] даже раньше постановки! Трудно себе представить, что формулы преобразования могли составить проблему для кого-либо из предшественников авторов [3], коль скоро задача нахождения эквивалентности перед ними была бы поставлена. Вероятно, они не видели смысла в таком преобразовании, не без основания полагая, что после него сложность сферической задачи сконцентрируется в коэффициенте преломления эквивалентной плоской задачи, в то время как в разложении решения эта сложность распределяется между коэффициентами ряда. Возможны и другие объяснения: Пикерис, Прайс и другие предшественники Ку и Катцина могли считать задачу уплощения неразрешимой (например, из-за того, что связывали ее с одновременным преобразованием уравнений (1) и (2)). В этом случае приоритет Ку и Катцина следует отнести не только к решению, но и к самой постановке задачи.

Нечто подобное произошло и в сейсмологии. Гервер и Каждан [4], первыми указавшие формулы точного преобразования для уравнения SH-колебаний, не придали, видимо, этому открытию большого значения, оставив его в виде вспомогательного результата в статье, посвященной другому вопросу. К сожалению, в [4] не отмечено (или не замечено?), что общее уравнение, которое авторы исследуют и к которому сводят сферическую задачу для волн Лява, является уравнением распространения этих волн в плоскослоистой среде, в то время как два года спустя Бисвас и Кнопов [5] сопроводили те же формулы (найденные независимо) историческим очерком, указали сферу возможного приложения, проделали вычисления, получили таблицы и графики и напечатали в статье с выразительным названием. Еще один вариант уплощения для SH-волн был получен в [6]. Впоследствии выяснилось, что он приводит к тем же формулам, однако здесь дополнительно было найдено, что сферическое уравнение и то плоское, к которому оно преобразуется, могут быть сведены к одному и тому же уравнению Штурма–Лиувилля, записанному в потенциальной форме. (см. также Дополнение 9.9 в [7]).

Приведем для большей ясности подробности этого уплощения. Пусть $u(\omega, \xi, r)$ (соответственно $v(\omega, \xi, x)$) – трансформация осесимметричного смещения при SH-колебаниях сферически-слоистой среды (соответственно плоскослоистой).

Из самого вектора смещения $U(t, \vartheta, r)$ (соответственно $V(t, R, x)$) эта трансформация получается после 1) отделения SH-компоненты (в силу осевой симметрии),

2) преобразования Фурье по времени t, 3) разложения этой компоненты по полиномам Лежандра от $\cos\vartheta$ (соответственно по функциям Бесселя от R). Здесь ϑ, r – сферические координаты, а R, x – цилиндрические. (В разд. 1 данной статьи и в [8] можно найти дополнительные подробности.)

Тогда функции $u(\omega, \xi, r)$ и $v(\omega, \xi, x)$ удовлетворяют, соответственно, уравнениям

$$(\mu(u' - r^{-1}u))' + 3r^{-1}\mu(u' - r^{-1}u) + (\omega^2\rho - r^{-2}\mu\xi^2)u = 0, \tag{6}$$

где $\xi^2 = (n-1)(n+2)$, $0 < r \le a$, $(\ )' = \dfrac{d}{dr}$,
и

$$(\mu_1 v')' + (\omega^2\rho_1 - \xi^2\mu_1)v = 0, \ (\ )' = \frac{d}{dx}. \tag{7}$$

Преобразование уплощения задается формулами, определяющими преобразование, во-первых, независимой переменной: $r = a\,\exp(-x)$, во-вторых – параметров среды: $\mu(r) = \mu_1(x)\exp(3x)$, $\rho(r) = a^{-2}\rho_1(x)\exp(5x)$, и, в-третьих – смещений: $u(\omega, \xi, r) = v(\omega, \xi, x)\exp(-x)$. После этих подстановок из первого уравнения получается второе.

Для волн рэлеевского типа (P–SV-колебания) были предложены формулы

$$\begin{aligned} &\mu_s = (a/r)^m\mu_f, \quad \lambda_s = (a/r)^m\lambda_f, \quad \rho_s = (a/r)^{m+2}\rho_f,\\ &u_s = (r/a)^{(m-1)/2}u_f, \end{aligned} \tag{8}$$

где индексы s и f соответствуют сферическому и плоскому случаям, μ и λ – параметры Ламе, ρ – плотность, u – двумерный вектор смещения, число m может быть выбрано многими способами (см. [9-11]).

Это преобразование дает приближенное решение задачи, его можно использовать вблизи поверхности и при не очень малых частотах. Для получения точного решения сферической задачи может быть использован ряд, начинающийся с этого приближенного решения. Теперь появляется проблема оценки точности разложения и остается вопрос, каким выбрать m. Бисвас [9] предложил значение $m = 0$, однако Чепмен [11] утверждает, что это значение годится только для волн Рэлея и что для объемных волн типа P–SV вообще нельзя предложить оптимального значения m. В работах [11], [12] исследуются свойства этих разложений и предлагается сочетать их с высокочастотной асимптотикой; в результате приходится использовать двойные ряды – по обратным степеням частоты и радиуса Земли; кроме того, приходится бороться с точками поворота. В рамках лучевой теории предложен более простой способ применения тех же формул (8) [10].

Предлагались также прямые методы решения сферической задачи. Чепмен и Финни в 1972 г. (см. [11]) предложили спектральный метод вычисления сейсмограмм объемных волн. Лидский, Нейгауз и Шкадинская [13-15] разработали весьма глубокий метод расчета поверхностных волн в слоистом шаре, основанный на свойстве самосопряженности уравнений.

Однако, насколько нам известно, исследователи (см., например, [16]) пользуются не этими методами, а приближением [9] в сочетании с одним из способов решения плоскослоистых задач [10,17-19].

Не смущаясь этим обстоятельством, мы предлагаем точное преобразование уплощения. В отличие от SH-случая оно не определяется явными формулами, а требует решения нелинейной системы из четырех (или пяти, но с известным интегралом) обыкновенных уравнений. Однако размерность этой системы ниже, чем у исходной системы, т.е. ее решения зависят только от двух независимых переменных – расстояния до поверхности и частоты ω. У исходной же системы решения зависят еще и от волнового числа ξ. Напомним, что в теории радиоволн преобразование тоже зависит от частоты, кроме того, иногда имеет смысл и решение монохроматических задач, где частота фиксирована.

Мы надеемся, что если действительно сферическая задача сложнее плоской, то уплощающая система уравнений лишь немного увеличивает сложность последней.

Доказано [8], что каждой упругой среде одного из трех типов слоистости можно поставить в соответствие множество систем Штурма–Лиувилля со специальным свойством симметрии. Системы, попавшие в одно множество, получаются одна из другой посредством невырожденного матричного преобразования неизвестных системы (т.е. пробразованного вектора смещения). Там же доказано, что локально это соответствие допускает обращение, т.е. каждую систему Штурма–Лиувилля, коль скоро она обладает указанным свойством симметрии, можно матричным преобразованием привести к системе, которая поставлена в соответствие некоторой упругой среде любого заранее заданного типа – плоско-, сферически- или цилиндрически-слоистого. Эта среда определяется не однозначно, ее параметры лежат на четырехмерном многообразии, т.е. зависят от четырех произвольных констант, в качестве которых, например, могут быть выбраны значения ρ, λ, μ и μ' в некоторой точке. На этом факте основана процедура уплощения. Он позволяет предложить не один, а несколько способов уплощения. Способы, с учетом сказанного, оказываются эквивалентными, если в начальной точке совпадают значения ρ, λ, μ и μ' уплощенной модели. Ниже (см. разд. 2, Предложения 1, 2) приводятся точные формулировки этих результатов, а затем дана точная формулировка задачи уплощения.

Третий способ уплощения позволяет дать удобное разложение точного уплощающего преобразования в ряд по обратным степеням радиуса Земли. Разложение начинается с приближения Бисваса [9], с помощью компьютера удалось отыскать следующий член. Первый член может определяться по формулам (8) при любом m. Пользуясь первым или вторым способом уплощения (см. разд. 2, 3), также можно построить подобное разложение, но вычисления оказываются более сложными.

Отметим, что начатое в некоторой точке уплощение может встретить препятствие, связанное с нелинейностью системы. Таким образом, уплощение всего шара может оказаться кусочным – склеенным из нескольких слоев. Исследование уплощающей системы в полной мере, видимо, возможно только численно.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ УПЛОЩЕНИЯ

Рассмотрим две изотропные идеально упругие среды: шар, в котором параметры Ламе λ, μ и плотность ρ зависят только от радиуса, и полупространство, где эти величины зависят только от глубины. Малые колебания этих сред подчиняются линейным уравнениям упругости [7]

$$\rho\ddot{v}_i = (\lambda v_{k,k})_{,i} + (\mu v_{i,j})_{,j} + (\mu v_{j,i})_{,j}, \tag{9}$$

где v_i – компоненты вектора смещения, $i = 1, 2, 3$.

Какие-либо условия на границе или поля внешних сил не рассматриваются.

Один из вариантов устоявшейся методики обращения с системой (9) содержит следующую последовательность операций [7]. Общее решение системы (9) складывается из решений, каждое из которых инвариантно относительно поворотов вокруг некоторой оси ζ: $v = \int V(\zeta)d\zeta$ [20]. Двумерный параметр ζ пробегает множество прямых, перпендикулярных границе. После перехода в осесимметричную систему координат: $V = TU$, где T – матрица преобразования ортогональных реперов, система распадается на уравнение SH-колебаний и двумерную систему P–SV-колебаний, к которым применяется процедура разделения переменных [7, 21]:

$$U_j = \int \mathrm{e}^{i\omega t} u_j(x,\omega,\xi) w_j(y,\xi) d\omega d\xi.$$

Здесь $j = 1, 2, 3$, x и y – разделившиеся пространственные координаты, u – преобразованное смещение, функции w_j – в плоском случае выражаются через функции Бесселя, в сферическом – через полиномы Лежандра. Волновое число ξ в сферическом случае пробегает дискретное множество значений, и интеграл заменяется рядом. В итоге для u_3 получается уравнение (6) в сферическом случае и уравнение (7) в плоском, а для $u = (u_1, u_2)$ следующая самосопряженная система [7, 8, 21, 22]:

$$Pu = 0, \tag{10}$$

где $P = \partial(B\partial + C) - C^T\partial + E$, $\partial = d/dx$; произведения всюду понимаются как композиции операторов, т.е. $\partial A = A\partial + A'$, $(\ )' \equiv d(\ )/dx$.

В плоскослоистом случае $B = \mathrm{diag}(\nu, \mu)$, $C = \xi\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\mu & 0 \end{pmatrix}$, $E = \mathrm{diag}(\omega^2\rho - \xi^2\mu,\ \omega^2\rho - \xi^2\nu)$, здесь и далее $\nu = \lambda + 2\mu$.

В сферически-слоистом случае $x = r$ – координата-радиус в сферической системе координат, $B = r^2\mathrm{diag}(\nu, \mu)$, $C = r\begin{pmatrix} 2\lambda & -\xi\lambda \\ \xi\mu & -\mu \end{pmatrix}$,

$$E = \begin{pmatrix} -4(\lambda+\mu) - \xi^2\mu + \omega^2 r^2\rho & 2\xi\lambda + 3\xi\mu \\ 2\xi\lambda + 3\xi\mu & \mu - \xi^2\nu + \omega^2 r^2\rho \end{pmatrix}.$$

Задача уплощения [7] состоит в том, чтобы свести решение системы (10) в случае заданного сферически-слоистого шара к ее решению в случае некоторого плоскослоистого полупространства, параметры которого определяются посредством не слишком сложной процедуры по параметрам этого шара.

Под решением понимается как нахождение фундаментального решения, так и решение какой-либо краевой задачи. В следующем разделе, после введения необходимого аппарата, эта формулировка обретет точный смысл.

Поясним принятую систему обозначений. Величины, относящиеся к разным случаям слоистости, мы сочли разумным обозначать одинаковыми символами с разными индексами. При этом либо оговаривается, какой случай имеется в виду, либо символ помечается индексом s в сферическом случае и индексом f в плоском.

2. СВОДКА НЕОБХОДИМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Эти результаты в окончательном на сегодняшний день виде изложены в [8]. Главный из них состоит в том, что систему (10) можно привести к матричной форме Штурма–Лиувилля, в которой от ξ зависит только собственное число, равное ξ^2, после чего не зависящая от ξ часть оператора системы явным образом разлагается в произведение дифференциальных операторов первого порядка, у которых матрицы свободных членов имеют нулевые следы.

В сферически-слоистом случае новую независимую переменную выберем несколько иначе, чем в [8], положим $r = r_0 \exp(-x/r_0)$, где r_0 – некоторый постоянный радиус, например радиус Земли. Эта замена сохраняет размерность, а вблизи поверхности мало изменяет и масштаб; она осуществляет уплощающий диффеоморфизм слоистого полупространства $x \geq 0$ на слоистый шар без центра $0 < r \leq r_0$. Заменим также безразмерный спектральный параметр: $\xi_s = r_0\xi$.

Введем обозначение для преобразования подобия матричного оператора L с помощью обратимого матричного оператора M: $\mathrm{Int}_M(L) = M^{-1}LM$. Очевидно, что $\mathrm{Int}_{MN}(L) = \mathrm{Int}_N(\mathrm{Int}_M(L))$.

Предложение 1. 1) Справедливо тождество

$$P_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Int}_{M_1}(M_2^{-1}\mathrm{Int}_Q(P)) = (\partial - \tilde{L} + \tilde{K})(\partial - \tilde{L} - \tilde{K}) - \xi^2. \tag{11}$$

Здесь в плоском случае

$$M_{1f} = 1, \quad M_{2f} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ -2\mu' & \nu \end{pmatrix}, \quad Q_f = \begin{pmatrix} -\xi & 0 \\ \partial & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{K}_f = \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mu' & -\frac{1}{2}(\mu^{-1}\nu + 1) \\ \mu^2\nu^{-1}(\mu^{-1})'' + \omega^2\rho\nu^{-1} & -\mu^{-1}\mu' \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$\tilde{L}_f = \begin{pmatrix} -\mu^{-1}\mu' & \frac{1}{2}(\mu^{-1}\nu - 1) \\ -\mu^2\nu^{-1}(\mu^{-1})'' & \mu^{-1}\mu' - \nu^{-1}\nu' \end{pmatrix}. \tag{13}$$

В сферическом случае

$$M_{1s} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -r_0 \end{pmatrix}, \quad M_{2s} = r_0^2 \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 2r_0\mu' - \mu - 2\nu & \nu \end{pmatrix}, \quad Q_s = \begin{pmatrix} r_0\xi & 0 \\ -r_0\partial & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{K}_s = \tilde{K}_f(\mu_s, \nu_s, r^2r_0^{-2}\rho_s) + r_0^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 2\nu_s^{-1}\mu_s' & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$\tilde{L}_s = \tilde{L}_f(\mu_s, \nu_s, r^2r_0^{-2}\rho_s) + r_0^{-1} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 2\nu_s^{-1}\mu_s' & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где $\tilde{K}_f$ и $\tilde{L}_f$ – матричные функции аргументов μ, ν и ρ.

2) Из тождества (11) матричным преобразованием M_3 получается тождество

$$P_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Int}_{M_3}(P_1) = (\partial - L + K)(\partial - L - K) - \xi^2. \tag{16}$$

Здесь в плоском случае

$$M_{3f} = \begin{pmatrix} \varkappa\mu^{-1} & 0 \\ 0 & \mu\nu^{-1} \end{pmatrix},$$

$$K_f = \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mu' & -\frac{1}{2}\varkappa^{-1}\mu\nu^{-1}(\lambda + 3\mu) \\ \varkappa(\mu^{-2}\omega^2\rho + (\mu^{-1})'') & -\mu^{-1}\mu' \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$L_f = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\varkappa^{-1}\mu\nu^{-1}(\lambda + \mu) \\ -\varkappa(\mu^{-1})'' & 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

В сферическом случае

$$M_{3s} = \begin{pmatrix} -\varkappa\mu^{-1}r_0r^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & -\mu\nu^{-1}r_0^{-1}r^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

$$K_s = \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mu' + \frac{1}{2}r_0^{-1} & -\frac{1}{2}\varkappa^{-1}r_0^{-2}r^2\mu(\lambda + 3\mu)\nu^{-1} \\ K_{21} & -\mu^{-1}\mu' - \frac{1}{2}r_0^{-1} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

где $K_{21} = \varkappa r_0^2 r^{-2}((\mu^{-1})'' - 2r_0^{-1}(\mu^{-1})' + \omega^2\rho r^2 r_0^{-2}\mu^{-2})$,

$$L_s = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\varkappa^{-1}r_0^{-2}r^2\mu(\lambda + \mu)\nu^{-1} \\ -\varkappa r_0^2 r^{-2}((\mu^{-1})'' + 2r_0^{-1}(\mu^{-1})') & 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Здесь $\varkappa$ – произвольная постоянная, в каждом случае своя.

Матрица M_3 выбирается так, чтобы уничтожить в матрице L все члены, которые возможно уничтожить явным преобразованием.

Следующий результат, который можно назвать теоремой об интерпретации операторов вида (11) или (16) с произвольными матрицами K, L (с условием, что $\operatorname{sp} K = 0$) посредством операторов упругих колебаний, открывает возможность решения задачи уплощения и является необходимым для решения обратных задач.

Рассмотрим оператор $\widehat{P} = (\partial - \widehat{L} + \widehat{K})(\partial - \widehat{L} - \widehat{K}) - \xi^2$, в котором $\widehat{K}$ и $\widehat{L}$ – некоторые матричные функции от x.

Предложение 2. Пусть $\operatorname{sp}\widehat{K} = 0$. Тогда в некоторой окрестности каждой точки $x = x_0$ при фиксированном значении частоты ω существует матричное преобразование $H(x)$ и параметры среды $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\rho(x)$, такие что $\mathrm{Int}_H(\widehat{P}) = P_2$. Утверждение справедливо в обоих случаях слоистости. Решение зависит от четырех произвольных постоянных (в число которых входит $\varkappa$).

Легко видеть, что условие $\mathrm{Int}_H(\widehat{P}) = P_2$ записывается в виде системы

$$K = H^{-1}\widehat{K}H, \tag{21}$$
$$H' = \widehat{L}H - HL, \tag{22}$$

в которой K и L являются выражениями (17) и (18). Очевидно также, что предложение останется справедливым, если в его формулировке заменить операторы $\widehat{P}$ и P_2 на эквивалентные им относительно некоторых матричных преобразований, в частности вместо P_2 можно использовать P_1. Отметим, что без дополнительных рассмотрений нельзя ожидать, что найденные $\lambda(x)$, $\mu(x)$ и $\rho(x)$ окажутся положительными и, тем более, соответствующими какой-либо физической среде.

Задача уплощения теперь может быть сформулирована так. Требуется разрешить систему (21), (22) относительно $H(x)$, $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\rho(x)$, если в ней $K = K_f$, $L = L_f$ из формул (17), (18) (либо $K = \tilde{K}_f$, $L = \tilde{L}_f$ из формул (12), (13), или же K и L – соответствующие матрицы какого-нибудь эквивалентного P_{2f} оператора), $\widehat{K} = \mathrm{Int}_G(K_s)$, $\widehat{L} = -G^{-1}G' + \mathrm{Int}_G(L_s)$, где G – известная матрица, а K_s и L_s – известные функции от x, вычисленные по формулам (19), (20) при заданных $\lambda_s(x)$, $\mu_s(x)$, $\rho_s(x)$.

Как будет видно, в зависимости от выбора представителя в классе эквивалентных операторов процедура уплощения может измениться. Разумеется, в общих областях определения все рассматриваемые способы уплощения эквивалентны.

3. ПЕРВЫЙ И ВТОРОЙ ВАРИАНТЫ УПЛОЩЕНИЯ

Первый вариант основывается на идее предварительного максимального упрощения сферической задачи. Поскольку явно зависящими от параметров среды преобразованиями уже ничего нельзя добиться, то возьмем в качестве G некоторое решение системы $-G^{-1}G' + \mathrm{Int}_G(L_s) = 0$, так чтобы в (22) $\widehat{L} = 0$. В этом случае сферическое смещение будет выражаться через моделирующее плоское (см. Предложение 1) по формуле

$$u_s = Q_s M_{3s} M_{1s} G H M_{3f}^{-1} Q_f^{-1} u_f.$$

Во втором варианте полагаем $G = 1$.

Предложение 3. Для любой достаточно удаленной от центра точки шара существует сферический слой, содержащий эту точку, допускающий плоскослоистую модель с физически допустимыми параметрами среды. Для любой точки (кроме центра) такой слой тоже существует, но плотность ρ_f плоскослоистой модели может не укладываться в физические границы.

Доказательство. В соответствии с уравнением (21), матрицу K будем считать функцией H и x. Определитель H будет интегралом системы (21), (22), так как след матрицы $H^{-1}H'$ равен нулю (что непосредственно следует из (22)). Из формул (17), (18) следуют выражения

$$\mu^{-1}\mu' = K_{11}, \tag{23}$$

$$\lambda = -2\mu - \frac{\mu^2}{2\varkappa K_{12} + \mu}, \tag{24}$$

$$L_{12} = \varkappa^{-1}\mu + K_{12},$$

$$\varkappa\omega^2\rho\mu^{-2} = K_{21} + L_{21}. \tag{25}$$

Теперь нужно выразить L_{21} через H, x и μ , чтобы уравнения (23) и (22) составили правильно определенную систему. Дифференцируя (21), получим

$$K' = R + LK - KL,$$

где $R = \mathrm{Int}_H(K_s' + K_sL_s - L_sK_s)$ зависит непосредственно от H и x, следовательно,

$$K_{11}' = \mu^{-2}(\mu')^2 - \mu(\mu^{-1})'' = R_{11} + L_{12}K_{21} - K_{12}L_{21}, \tag{26}$$

откуда

$$(\mu + \varkappa K_{12})L_{21} = \varkappa R_{11} + (\mu + \varkappa K_{12})K_{21} - \varkappa K_{11}^2.$$

Искомая формула получена. Очевидно, требуется, чтобы величина $\mu + \varkappa K_{12} = \varkappa L_{12}$ не обращалась в нуль. Формулы (24) и (25) определяют параметры уплощенной модели λ и ρ. Из сравнения формул (17) и (19) и формул (18) и (20) с очевидностью вытекает, что при $x = 0$ и больших r_0 операторы P_{2s} и P_{2f} близки. Предложение 3 доказано.

Из рассмотрения формулы (24) вытекает , что условие $\lambda > 0$ эквивалентно выполнению неравенства $-\frac{3}{4}\mu < \varkappa K_{12} < -\frac{1}{2}\mu$. Это условие вместе с выполнением ограничений для ρ необходимо проверять при всех значениях x, если это требуется. При $x = 0$, если значения $\rho(0)$, $\lambda(0)$ и $\mu(0)$ определены, то согласно Предложению 2 возможные значения $H(0)$ и $\varkappa$ образуют одномерное многообразие. Эту степень свободы следует, видимо, использовать для удовлетворения неравенств. (Отметим также, что ρ и ω^2 неразделимы.)

4. ТРЕТИЙ ВАРИАНТ УПЛОЩЕНИЯ

Здесь мы исходим из равенства $P_{1f} = \mathrm{Int}_H(P_{1s})$. Иными словами, в (21) и (22) K и L берутся из представления оператора P_1: $K = \tilde{K}_f$, $L = \tilde{L}_f$, $\widehat{K} = \tilde{K}_s$, $\widehat{L} = \tilde{L}_s$ (очевидно, в этом случае $G = M_3^{-1}$).

Связь между смещениями здесь дается формулой $u_s = Q_sM_{1s}HQ_f^{-1}u_f$.

По сравнению с предыдущими этот способ имеет следующие преимущества. Во-первых, условие $\lambda > 0$ оказывается эквивалентным одному неравенству, а не двум. Во-вторых, разложение параметров Ламе плоской модели по степеням r_0^{-1} начинается с параметров Ламе сферической среды, а разложение плотности с $r^2r_0^{-2}\rho_s$. Вероятно, это разложение можно использовать, хотя систему линейных уравнений для коэффициентов при первой степени r_0^{-1} выписать не просто (см. разд. 6). Вероятно также, что действительность этих умозрительных преимуществ может быть установлена только вычислительным экспериментированием.

Проведем аналогичные предыдущим вычисления. Индекс f при искомых параметрах среды и коэффициентах матриц будем опускать.

Из уравнения (21) очевидно следует, что следы матриц $\tilde{K}$ и $\tilde{K}_s$ должны быть равны. В нашем случае они оба равны нулю. Из выражений для матриц (12), (13) имеем соотношения

$$\mu^{-1}\mu' = \tilde{K}_{11} = -\tilde{L}_{11},$$

$$\lambda = -\mu(2\tilde{K}_{12} + 3), \tag{27}$$

$$\tilde{L}_{12} = -\tilde{K}_{12} - 1,$$

$$\omega^2 \rho \nu^{-1} = \tilde{K}_{21} + \tilde{L}_{21}. \tag{28}$$

Матрицу $\tilde{K}$ снова считаем, согласно (21), функцией аргументов H и x. Требуется представить коэффициенты $\tilde{L}$ в виде функций этих аргументов. Формула (26) здесь тоже справедлива, поэтому

$$\tilde{K}'_{11} = \tilde{K}^2_{11} + \mu^{-1}\nu\tilde{L}_{21} = \tilde{R}_{11} - \tilde{K}_{12}\tilde{K}_{21} - \tilde{K}_{21} - \tilde{K}_{12}\tilde{L}_{21},$$

откуда (после выражения $\mu^{-1}\nu$ через $\tilde{K}_{12}$)

$$(-\tilde{K}_{12} - 1)\tilde{L}_{21} = \tilde{R}_{11} + \det \tilde{K}_s - \tilde{K}_{21}.$$

Подобным образом

$$\tilde{K}'_{12} = -\tilde{K}_{12}\tilde{L}_{22} - \frac{1}{2}\tilde{L}_{22} = \tilde{R}_{12} - \tilde{K}_{12}\tilde{K}_{22} - 2\tilde{K}_{22} - \tilde{K}_{12}\tilde{L}_{22},$$

следовательно,

$$\tilde{L}_{22} = -2(\tilde{R}_{12} - \tilde{K}_{12}\tilde{K}_{22} - 2\tilde{K}_{22}).$$

Так как $\mathrm{sp}(H^{-1}H') = \mathrm{sp}\tilde{L}_s - \mathrm{sp}\tilde{L} = -\nu_s^{-1}\nu'_s + \nu^{-1}\nu' + r_0^{-1}$, то, согласно формуле Якоби–Лиувилля, можно написать интеграл системы (21), (22):

$$\det H = \mathrm{const}\exp(r_0^{-1}x)\nu\nu_s^{-1}. \tag{29}$$

Отсюда вытекает, что после подстановки найденных выражений система (21), (22) становится эквивалентной системе (22), из которой находится H, а параметры среды выражаются через H явными формулами (ν из (29), λ и μ из (27) и соотношения $\lambda + 2\mu = \nu$, ρ из (28)). Утверждение о разложении в ряд очевидным образом вытекает из формул (14), (15), если положить $H = 1 + r_0^{-1}(\ldots)$.

5. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ОБРАТНЫМ СТЕПЕНЯМ РАДИУСА ЗЕМЛИ

Разложение в ряд по степеням r_0^{-1} точного уплощения может быть начато с любого начального приближения вида

$$\mu_b = r_0^{-m} r^m \mu_s, \quad \lambda_b = r_0^{-m} r^m \lambda_s, \quad \rho_b = r_0^{-m-2} r^{m+2} \rho_s \tag{30}$$

(см. (8)). Поясним, что здесь r_0 входит как постоянная в определение функций μ_b, λ_b, ρ_b, так что они являются нулевыми членами ряда (а не m-ми), $r_0^{-1}r \approx 1$, а ряды имеют вид: $\mu_f = \mu_b + \mu_1 r_0^{-1} + \mu_2 r_0^{-2} + \ldots$

Этот факт непосредственно вытекает из однородности нулевой степени матриц и $\tilde{K}$ и $\tilde{L}$ (12), (13), как функций параметров среды, и из того, что операторы ∂ и умножение на $r_0^{-1}r$ перестановочны по модулю r_0^{-1}: $\partial r_0^{-1} r = r_0^{-1} r \partial - r_0^{-2} r$

(напомним, $r = r_0 e^{-x/r_0}$). Таким образом, если в оператор $P_{1s} = (\partial - \tilde{L}_s + \tilde{K}_s)(\partial - \tilde{L}_s - \tilde{K}_s) - \xi^2$ из (11), уплощение которого рассмотрено в разд. 4, подставить μ_s, λ_s и ρ_s из (30), он примет вид

$$P_{1s} = (\partial - L_0 + K_0 + r_0^{-1}(\ldots))(\partial - L_0 - K_0 + r_0^{-1}(\ldots)) - \xi^2,$$

где $K_0 = \tilde{K}(\mu_b, \nu_b, \rho_b)$, $L_0 = \tilde{L}(\mu_b, \nu_b, \rho_b)$ с $\tilde{L}$ и $\tilde{K}$ из (12), (13).

В разд. 4 было выбрано $m = 0$, как в работе [9]. На вопрос, какое m предпочтительнее для построения точного плоского эквивалента данной сферически-слоистой среде, наша теория не дает ответа. Точно также Чепмен [11] затруднился с ответом на вопрос, при каком m приближение (8) можно назвать наилучшим. Из Предложения 2 вытекает, что разница между уплощениями, полученными при различных m, состоит в том, что при одних и тех же начальных (при $r = r_0$) значениях μ_{f0}, λ_{f0}, ρ_{f0} выбираются разные начальные значения μ'_{f0}. Вероятно, численными методами можно определить те значения m или μ'_{f0}, при которых первый отрезок радиуса $[r_0, r_1]$, где будет существовать точное уплощение, окажется достаточно большим. В разд. 6 приводится вид второго члена разложения при $m = 0$.

Для изучения зависимости решений и уплощающего преобразования от частоты, в том числе для получения высокочастотных асимптотик, может оказаться полезным Предложение 4 [8], в котором коэффициент оператора при ω^2 диагонализируется. Отметим, что мы достигли определенного преимущества по сравнению с методами [11, 12], так как матрица при ω^2 имеет простые и всегда различные диагональные элементы, поэтому в главной части оператора не будет никаких точек поворота.

При этом может оказаться полезной симметрия оператора P_2, упрощающая переход к безразмерным величинам. Говоря точнее, после преобразования $x = \omega^{-1}\tilde{x}$, $\varkappa = \omega^{-1}\tilde{\varkappa}$, $\xi = \omega\tilde{\xi}$ частота из уравнений исчезает (однако параметры среды теперь станут зависеть также от частоты). Пользуясь им, можно, например, попробовать найденное при одном каком-нибудь значении частоты ω_0 оптимальное значение μ'_{f0} разнести затем по другим частотам: $\mu'_{f0}(\omega) = \omega/\omega_0 \mu'_{f0}(\omega_0)$.

Здесь уместно сказать несколько слов о размерностях полученных выражений. Пусть m – какая-нибудь единица длины, связанная с рассматриваемой задачей. Например, это может быть отрезок значений x, на котором производится уплощение: $0 \leq x \leq m$, или в качестве m можно взять какую-нибудь из возможных длин волн. Тогда преобразованное смещение v, связанное с u из (10) формулой $u = Qv$, имеет размерность $(m^2, m)^T$, волновое число ξ из формулы (11) – m^{-1}, матрицы $\tilde{K}$ и $\tilde{L}$ оттуда же – $\begin{pmatrix} m^{-1} & 1 \\ m^{-2} & m^{-1} \end{pmatrix}$. Поэтому оператор P_1 и соответствующее ему уравнение $P_1 v = 0$ можно записать в безразмерном виде, полагая $x = m\bar{x}$, $\xi = m^{-1}\bar{\xi}$, $r_0 = m\epsilon^{-1}$, $v = M_m \bar{v}$, где $M_m = \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$ (чертой помечены безразмерные величины, ϵ – безразмерный малый параметр).

После этого оператор $m^2 \mathrm{Int}_{M_m}(P_1)$ будет иметь в точности такой же вид, как и сам P_1, но матрицы $\tilde{K}$ и $\tilde{L}$ станут безразмерными, а в сферическом случае в их выражениях (14) и (15) r_0^{-1} заменится на ϵ. Тем самым доказана правомерность разложения, впрочем, достаточно очевидная и без этого.

6. ПЕРВЫЕ ДВА ЧЛЕНА РАЗЛОЖЕНИЯ

Введем действующие только в этом разделе обозначения, чтобы сделать формулы менее громоздкими.

Для заданной сферической среды положим $\mu = \mu_s$, $\lambda = \lambda_s$, $\nu = \nu_s$, $\rho = r^2 r_0^{-2}\rho_s$, параметры уплощенной плоской модели обозначим μ_f, λ_f, ν_f, ρ_f, переменную r_0^{-1}, по степеням которой происходит разложение, обозначим через ϵ и положим $H \approx 1+\epsilon\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{pmatrix}$, знаком $\approx$ будем обозначать сравнение по модулю ϵ^2. Задача, очевидно, состоит в том, чтобы подстановки и выражения, указанные в разд. 4, реализовать, систематически полагая $\epsilon^2 = 0$.

С помощью программы символьных вычислений удалось получить следующие формулы.

Вектор $h = (h_1, h_2, h_3, h_4)^T$ удовлетворяет системе уравнений

$$h' = (a + \omega^2 \rho b)h + c.$$

Здесь матрицы a и b и вектор c имеют вид

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \nu^{-1}\nu' & 0 & -1 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix},$$

последние две строки в ней довольно громоздки:

$$(a_{31}, \ldots, a_{34}) =$$
$$= \nu^{-1}(\lambda+\mu)^{-1}\Big(8\mu'^2 - 4\mu\mu'',\ 4\mu^{-1}\mu'^3 + 4\mu'\mu'' - 2\mu\mu''',\ \lambda\nu\mu^{-1}\mu' - \nu\nu',\ 4\mu\mu'' - 8\mu'^2\Big),$$
$$(a_{41}, \ldots, a_{44}) =$$
$$= \Big(5\mu^{-1}\mu' - \nu^{-1}\nu',\ 3\mu^{-1}\mu'' + 2\mu^{-2}\mu'^2,\ \frac{1}{2}\mu^{-2}\nu^2 - \frac{3}{2}\mu^{-1}\nu - 1,\ \nu^{-1}\nu' - 5\mu^{-1}\mu'\Big);$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 & -\nu^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & * & 0 & -b_{31} \\ 0 & -\mu^{-1} - \nu^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(b_{31}, \ldots, b_{34}) = \nu^{-1}(\lambda+\mu)^{-1}\Big(2\mu,\ 2\mu\rho^{-1}\rho' - 4\mu',\ 0,\ -2\mu\Big);$$

$$c = \Big(2,\ 0,\ 6(\lambda+\mu)^{-1}\mu',\ \frac{5}{2}\mu^{-1}\nu + 2\Big)^T.$$

Приближение с точностью до ϵ^2 для уплощенных параметров среды выражается через решения этой системы:

$$\nu_f \approx e^{-\epsilon x}\nu(1 + \epsilon(h_1 + h_4)),$$
$$\mu_f \approx e^{-\epsilon x}\mu\Big(1 + \epsilon(h_1 + h_4)\Big)\Big(1 + \epsilon\nu^{-1}((\mu+\nu)(h_1 - h_4) + 4\mu' h_2)\Big),$$

$$\lambda_f \approx \mathrm{e}^{-\epsilon x}\Big(1+\epsilon(h_1+h_4)\Big)\Big(\lambda-\epsilon 2\mu\nu^{-1}((\mu+\nu)(h_1-h_4)+4\mu' h_2)\Big),$$

$$\omega^2\rho_f \approx \mathrm{e}^{-\epsilon x}(1+\epsilon(h_1+h_4))\Big[\omega^2\rho\Big(1+\epsilon(\lambda+\mu)^{-1}((\nu-3\mu)(h_1-h_4)+$$

$$+2(2\mu'-\mu\rho^{-1}\rho')h_2)\Big)-2\epsilon(2\mu+\nu)(\lambda+\mu)^{-1}\mu'-$$

$$-\epsilon\nu\Big(a_{31}(h_1-h_4)+a_{32}h_2+(a_{33}+\nu^{-1}\nu')h_3\Big)\Big].$$

Приближение с точностью до ϵ [9], очевидно, получается из этих формул при $\epsilon = 0$. Не ясно, следует ли эти выражения приводить к виду $(\ldots)+\epsilon(\ldots)$, где содержимое скобок от ϵ не зависит, или данная, мультипликативная, форма предпочтительней. Убедиться в правильности полученных формул можно, естественно, проверив, что после подстановок найденных выражений в равенства (21) и (22) и сокращений в них останутся только члены порядка ϵ^2.

Использовать формулы для расчетов можно после грубой оценки погрешности, как, например, это сделано в [11]. Интересно было бы провести сопоставление трех решений задачи уплощения: обоих приближенных и точного. Это можно делать численно, продолжать же аналитическое исследование полученного приближения можно, видимо, при упрощающих предположениях.

Отметим следующие наблюдения. Противоположность знаков перед ϵ в последних сомножителях формул для μ_f и λ_f говорит о том, что если ν_f и $\det H$ остаются отличнными от нуля (при изменении x), то один из параметров μ_f или λ_f может обратиться в нуль при достаточном возрастании некоторых элементов h_i. В формуле для ρ_f интерес представляет свободный от h член: $-2\epsilon(2\mu+\nu)(\lambda+\mu)^{-1}\mu'$. Из-за него значение ρ_f при $x=0$, $h=0$. $\mu'(0)\neq 0$ отличается от ρ, а при малых частотах может даже оказаться отрицательным. Чтобы этого избежать, нужно, очевидно, выбирать подходящим образом $h(0)$. Например, если потребовать, чтобы параметры уплощающей модели совпадали со сферическими при $x=0$, то надо будет решить систему двух линейных уравнений $\mu:\lambda:\rho=\mu_f:\lambda_f:\rho_f|_{x=0}$ относительно $h(0)$. Интересно также, что найденные приближения μ_f и λ_f от частоты зависят только через H, слагаемое в ρ_f , которое имеет ω^2 в знаменателе, доставит неприятности при малых частотах, что естественно – ведь сферическая задача в этом случае слабо зависит от ρ, и если мы желаем найти такую же плоскую модель, то, по существу, в нашем распоряжении остаются только два параметра. Очевидно, в этом случае можно попробовать в уплощающей модели использовать частоту ω_f, отличную от исходной, поскольку произведение $\omega_f^2\rho_f$ определено корректно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе [23, с. 73] приводится классическая задача, решение которой связано с вычислением рэлеевских колебаний в однородном цилиндре. В геофизике подобные задачи связаны со скважинным каротажем (см. [24], гл. 6). Из результатов статьи [8] вытекает, что эти и подобные им задачи для радиально-неоднородных цилиндров могут быть сведены к плоскослоистым в точности тем же способом, как сферические.

Следующую работу по уплощению авторы намерены посвятить численному экспериментированию. Будет произведено уплощение разреза Гутенберга и представлен алгоритм, позволяющий уплощать и другие принятые модели внутреннего строения Земли.

Благодарности. За полезные обсуждения предмета исследований авторы выражают признательность Б.Г. Букчину и Б.В. Кострову, а также всем участникам семинаров МИТП РАН и ОИФЗ им. О.Ю. Шмидта РАН. Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 94-05-16524).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pekeris C. L.* Accuracy of the Earth-flattening approximation in the theory of microwave propagation//Phys. Rev. 1946. Vol.70, N 7,8. P.518–522.
2. *Pryce M. H. L.* The diffraction of radio waves by the curvature of the Earth//Adv. in Phys. 1953. Vol.2, N 5–8. P.67–95.
3. *Koo B. Y.-C., Katzin M.* An exact Earth-flattening procedure in propagation around a sphere//J. Res. Nat. Bureau of Stand. D. Radio Propagation. 1960. Vol.64D, N 1. P.61–64.
4. *Гервер М.Л., Каждан Д.А.* Нахождение скоростного разреза по дисперсионной кривой. Вопросы единственности//Некоторые прямые и обратные задачи сейсмологии. М.: Наука, 1968. С.78-94. (Вычисл. сейсмология; Вып.4).
5. *Biswas N.N., Knopoff L.* Exact earth-flattening calculation for Love waves//Bull. Seismol. Soc. Amer. 1970. Vol.60. P.1123-1127.
6. *Маркушевич В.М., Резников Е.Л.* Исследование строения симметричной твердой среды по стоячим SH-волнам на поверхности//Теоретическая и вычислительная геофизика. N 2. М.: Межвед. геофиз. комитет АН СССР, 1974. С.5-34.
7. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. Т.1. М.: Мир, 1983. 520 с.
8. *Киселев С. Г., Кузнецов А. Н., Маркушевич В. М., Цемахман А. С.* Разложение на множители и форма Штурма–Лиувилля уравнений для P–SV-колебаний слоистых сред//Наст. сб.
9. *Biswas N.N.* Earth-flattening procedure for propagation of Rayleigh waves//Pure Appl. Geophys. 1972. Vol.96. P.61-74.
10. *Müller G.* Earth-flattening approximation for body waves derived from geometric ray theory-improvements, corrections and range of applicability//J. of Geophys. 1977. Vol.42. P.429-436.
11. *Chapman C.H.* The Earth flattening transformation in body wave theory//Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1973. Vol.35. P.55-70.
12. *Chapman C.H.* The turning point of elastodynamic waves//Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1974. Vol.39. P.613-621.
13. *Лидский В. Б., Нейгауз М. Г.* К методу прогонки в случае самосопряженной системы второго порядка // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1962. Т.2, N 1. С.161-165.
14. *Шкадинская Г. В.* Метод расчета поверхностных волн Рэлея в шаре//Алгоритмы интерпретации сейсмических данных. М.: Наука, 1969. С.178-188. (Вычисл. сейсмология; Вып.5).
15. *Шкадинская Г. В.* Теория и метод расчета поверхностных волн Рэлея в неоднородных средах. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ИФЗ АН СССР. 1970. 189 с.

16. *Gomberg J.S., Masters T.G.* Waveform modelling using locked-mode synthetic and differential seismograms: application to determination of the structure of Mexico//Geophys. J. 1988. Vol.94, N 2. P.193-218.
17. *Abo-Zena A.* Dispersion function computations for unlimited frequency values//Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1979. Vol.58. P.91-105.
18. *Knopoff L.* A matrix method for elastic wave problems//Bull. Seismol. Soc. Amer. 1964. Vol.54. P.431-438.
19. *Молотков Л. А.* Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. Л.: Наука, 1984. 201 с.
20. *Левшин А.Л.* Поверхностные и каналовые сейсмические волны. М.: Наука, 1973. 176 с.
21. *Кузнецов А. Н.* Функция Лагранжа и разделение переменных для упругих колебаний в осесимметричной слоистой среде//Теоретические проблемы геодинамики и сейсмологии. М.: Наука, 1994. С.171-190. (Вычисл. сейсмология; Вып. 27).
22. *Киселев С.Г., Маркушевич В.М.* О разделении переменных в уравнениях для рэлеевских колебаний слоистых сред//ДАН. 1993. Т.332, N 3. С.297-300.
23. *Снеддон И.Н., Берри Д.С.* Классическая теория упругости. М.: Физматгиз, 1961. 220 с.
24. *Ewing W. M., Jardetzky W.S., Press F.* Elastic waves in layered media. N.-Y, Toronto, London: McGraw-Hill Book Co., Inc.,1957. 380 c.