УДК 550.310:517.984 54

РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ И ФОРМА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ P–SV-КОЛЕБАНИЙ СЛОИСТЫХ СРЕД

С.Г. Киселев, А.Н. Кузнецов, В.М. Маркушевич,
А.С. Цемахман
Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук

Предлагается теория линейных уравнений упругости в изотропных и непрерывно-слоистых средах трех типов: плоско-, сферически- и цилиндрически-слоистых. Известные преобразования оператора упругости дают разложение общего решения по осесимметричным. После разделения переменных получается двумерный матричный оператор, управляющий P–SV-колебаниями, и скалярный – для SH-колебаний. Двумерный оператор дифференциальным преобразованием можно привести к матричному оператору Штурма–Лиувилля, который при нулевом значении собственного числа явным образом разлагается на множители, являющиеся операторами первого порядка. Это ключевой результат теории. С его помощью найдены канонические формы оператора, к которым его можно привести матричными преобразованиями различного вида. Доказано, что при фиксированной частоте разрешима задача локальной интерпретации произвольно заданного оператора в среде любого из трех типов. Этот результат необходим для решения обратной сейсмологической задачи, кроме того, он позволяет дать точное решение задачи уплощения Земли для волн Рэлея.

DECOMPOSITION INTO FACTORS AND STURM–LIOUVILL'S FORM OF EQUATIONS FOR P–SV-VIBRATIONS OF LAYERED MEDIA

S. G. Kiselev, A. N. Kuznetsov, V. M. Markushevich,
and A. S. Tsemahman
International Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences

We suggest a theory of linear elastodynamics for the cases of isotropic continuously layered media of three kinds: plane, spherically, and cylindrically layered. The known transformations of the general solution lead to its decomposition into axially symmetrical solutions. On separation of variables, we obtain a second-order two-dimensional matrix operator for *P-SV*-vibrations and a scalar operator for *SH*-vibrations. The two-dimensional operator reduces to a matrix Sturm-Liouville form which is a composition of explicitly represented first-order operators in the case where the spectral parameter vanishes. It is a key result of the theory.

By using this result, we find canonical forms of the operator, which follows from various matrix transformations. We show that, given a fixed frequency and a plane, spherically, or cylindrically layered medium, the local interpretation problem for a given operator is solvable. This result is necessary for solving the inverse problem of seismology; besides, it provides for an exact solution of the earth-flattening problem for Rayleigh waves.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим уравнения теории линейной упругости для изотропных и непрерывно-слоистых сред трех типов: плоско-, сферически- и цилиндрически-слоистых. Под непрерывно-слоистой средой понимается изотропная среда, плотность и оба параметра Ламе которой непрерывны и имеют одни и те же поверхности уровня. На описываемых нами свойствах этих уравнений могут базироваться как теоретические исследования рэлеевских колебаний в таких средах, так и алгоритмы и численные методы решения соответствующих прямых и обратных задач. Они применяются в [1] для решения задачи о точном "уплощении Земли" для P–SV-колебаний.

По первоначальному замыслу развиваемая нами теория предназначалась для решения сейсмологических задач, связанных с распространением упругих колебаний в Земле. Однако общий характер найденных преобразований позволяет надеяться, что их можно применить в любой области, имеющей дело с уравнениями линейной изотропной упругости в средах этих трех типов. Например, к задачам, связанным с контролированием качества изделий соответствующих форм и слоистой структуры путем "прослушивания" их упругими колебаниями.

Вид исследуемой системы зависит не только от типа слоистости, но еще от выбора функций, разделяющих переменные. Они могут быть выбраны либо осесимметричными, либо симметричными относительно сдвигов. В итоге получаем четыре случая: 1) плоско-, 2) сферически- и 3) цилиндрически-слоистая среда с осесимметричной постановкой задачи, 4) цилиндрически-слоистая среда с задачей, симметричной относительно сдвигов. Система, соответствующая не рассмотренному нами случаю плоскослоистой среды с симметричной относительно сдвигов постановкой задачи, совпадает со случаем 1). Ее можно получить из случая 4) путем перемещения оси цилиндра в бесконечность.

Необходимо объяснить, почему, собственно, мы ограничиваемся только этими тремя типами слоистости. На этих частных случаях общей задачи, с одной стороны, счастливо сошлись интересы практической сейсмологии, где находят обширное поле приложений плоскослоистые и сферически-слоистые модели для участков земной толщи и для Земли в целом; с другой стороны, как доказано [2], этими случаями мы вынуждены ограничиться, коль скоро мы применяем для решения задачи классический метод разделения переменных. Более точно доказано [2], что другие варианты исключены в случае симметричной относительно поворотов вокруг некоторой оси (короче говоря, осесимметричной) постановки задач. Заметим, что, по опыту наших рассмотрений, представляется маловероятным, что существует слоистая среда еще какого-нибудь типа, в которой уравнения упругости допускают классическое разделение всех трех пространственных переменных. При этом, к счастью, оказалось, что, по крайней мере, в средах двух типов слоистости:

плоской и сферической, имеется возможность решать общие задачи, а не только осесимметричные. Это обстоятельство резко расширяет сферу возможных приложений предлагаемых методов. Общее решение здесь может быть представлено интегралом от осесимметричных решений, взятым по множеству всех осей, относительно поворотов вокруг которых симметрична среда. Ниже будет сказано, как, видимо, следует поступать в цилиндрически-слоистых средах, где ось симметрии всего одна. Мы видим, что для решения задач теории упругости в слоистых средах необходимы более мощные методы, чем классическое разделение переменных; вероятно, для этой цели подходят методы теории групп преобразований уравнений [3].

Рассматриваемая теория в определенном смысле аналогична классическому методу упругих потенциалов, который успешно применяется в случае однородной среды. Там решение представляется суммой двух компонент, каждая из которых удовлетворяет волновому уравнению, решения которого в конечном итоге разлагаются на плоские волны, если граничные условия позволяют это сделать. Так как однородная среда является слоистой средой каждого из трех типов, то любой из наших методов применим к этому случаю. Применять в однородной среде более сложные методы разделения переменных, чем преобразование Фурье, имеет смысл для изучения колебаний тел различной формы. Так, в [4] приведены способы разделения переменных, согласованные, кроме наших трех типов, еще с тремя формами однородных тел: эллиптическим и параболическим цилиндрами и конусом.

В слоистой, но неоднородной среде мы имеем меньше свободы для выбора разделяющихся переменных; для сферически- и цилиндрически-слоистых сред переменные могут быть выбраны единственным образом, для плоскослоистых – возможны варианты [2].

Перейдем к описанию структуры теории. Без всяких предположений о слоистости, при условии одной только осесимметричности задачи уравнения упругости распадаются на систему из двух уравнений для компонент смещения в плоскостях, проходящих через ось, и одно уравнение для крутильной компоненты. Система описывает P–SV-колебания, или колебания рэлеевского типа, а отдельное уравнение – SH-колебания, или колебания лявовского типа. Уравнение проще, чем система. Оно исследовано (см. [5] и цитированную там литературу) в случае плоской слоистости. В настоящей статье исследуется система.

После разделения переменных эта система превращается в систему двух обыкновенных уравнений второго порядка, которые зависят от двух спектральных параметров, один из которых является частотой ω, а другой – ξ параметризует функции отделившейся переменной, по которым разлагается решение.

Оказалось, что хорошо зарекомендовавший себя для плоскослоистых сред метод решения прямых задач Томсона–Хаскелла [6] резко ухудшает свои вычислительные характеристики при попытке его применения в сферически-слоистых средах [7]. Этим, а также тем, что для уравнения крутильных колебаний эквивалентность между случаями плоско- и сферически-слоистых сред устанавливается простыми формулами [8, 9], видимо, объясняется упорство, с которым пытались свести сферическую задачу к плоской [10, 11]. Точного решения предложено не было, однако приближенные методы широко используются на практике (см. [10] и литературу в

[1]) при не очень малых частотах. Для решения прямой задачи в ситуации общих систем обыкновеных уравнений был предложен [12] и развит для расчета колебаний сферически-слоистой среды [13] довольно тонкий метод тригонометрической прогонки, существенно использующий самосопряженность задачи. Что касается обратной задачи, то сама ее постановка вряд ли мыслима при таком обилии в системе отличных от нуля коэффициентов, зависящих всего от трех неизвестных функций $\rho(x)$, $\lambda(x)$, $\mu(x)$, которые, собственно, и требуется найти в этом случае. Таким образом, цель работы может быть определена так: найти преобразование, по возможности унифицирующее и упрощающее эту систему уравнений. Точнее говоря, речь идет о нескольких системах соответственно числу вариантов слоистой среды и симметрий в постановке задач.

Подходящее преобразование удалось найти, правда, ценой потери самосопряженности [14, 15]. Для любой из рассматриваемых систем к рэлеевскому оператору применяются слева и справа два матричных обратимых оператора (нильпотентных относительно дифференцирования). В результате получается матричное уравнение Штурма–Лиувилля со спектральным параметром ξ^2 и коэффициентами, зависящими от x (через параметры среды и явно) и от частоты ω. Если параметры среды в этом уравнении считать известными функциями от x, то после матричного преобразования G, уничтожающего коэффициент при первой степени d/dx, получается матричный несимметричный потенциал вида $U = V' + V^2$ для некоторой матрицы V с нулевым следом [14, 15]. Подчеркнем, что матрицы G и V не выражены явно через параметры среды, матрица G определена как решение уравнения первого порядка, а V выражается через G. Тем не менее в потенциале остается всего четыре коэффициента и между ними имеется связь.

Несколько неожиданно обнаружилось, что это специальное свойство оказалось эквивалентно тому, что оператор системы при $\xi^2 = 0$ явным образом разлагается на множители первого порядка, свободные матричные члены которых имеют нулевые следы. Это обстоятельство позволило впервые представить на суд читателя полное и сравнительно легко проверяемое доказательство всех полученных к настоящему времени результатов, внести существенные уточнения в опубликованные ранее результаты и их доказательства, а также получить новые результаты, касающиеся связи между задачами.

Теория строится следующим образом. Ее ключевым результатом является представление оператора P в виде матричного оператора Штурма–Лиувилля P_1 с разложением на множители его части (утверждение 1) Предложения 1). Затем этот оператор P_1 с помощью матричных преобразований приводится к нескольким видам (P_2, P_3, P_4, P_5), каждый из которых является по-своему каноническим. Сам оператор P_1 характеризуется тем, что он получается из P не зависящим от параметров среды преобразованием. Оператор P_4 (он встречается в доказательстве Предложения 1 и играет важную роль в решении задачи уплощения Земли [1]) получается делением P_1 на коэффициент при старшей производной. В операторе P_2 (утверждение 2) Предложения 1) сомножители P_1 упрощаются до предела, которого можно достичь посредством явно выраженных через параметры среды матричных преобразований. Дальнейшее упрощение сомножителей производится неявным преобразованием, после которого оператор принимает потенциальную форму P_3 (утверждение 3) Предложения 1). В операторе P_2 явным преобразованием можно привести матрицу при ω^2 (предварительно выделив член с ω^2 из произведения операторов) к диагональной форме. Так получается оператор P_5 (в Предложении 4), который тем самым оказывается (в главной его части) трансформацией пары волновых операторов. Эти результаты можно считать теоремами существования.

Следующий ряд утверждений посвящен вопросам единственности полученных представлений оператора P. Согласно утверждению 4) Предложения 1, для оператора P_1 (а вместе с ним и для P_4) имеется, по крайней мере, еще один вариант. В Предложении 2 изучаются группы матричных преобразований, сохраняющих свойства операторов P_2 и P_3, в Предложении 3 доказывается единственность разложения на множители и потенциала. Согласно Предложению 4, вид P_5 является самым каноническим: его сохраняют только преобразования посредством постоянных диагональных матриц.

Последняя тема статьи – вопрос о возможности интерпретировать как оператор упругости любой дифференциальный оператор $d^2/dx^2 - U - \xi^2$ с потенциалом вида $U = V' + V^2$, где матрица V имеет нулевой след. Предложение 5 отвечает на этот вопрос. Оказалось, что для любой такой матрицы V, выбрав любой из четырех случаев симметрии, можно найти подходящие параметры среды, оператор упругости которой приведется в соответствии с Предложением 1 к данному оператору с заданной матрицей V и даже не единственным образом. Пространство неединственности (т.е. ядро отображения: параметры среды $\to$ матрица V) оказывается четырехмерным многообразием; оно (не исчерпывающим образом) изучается в следствии из Предложения 5. Из этого Предложения вытекает, что оператор каждого из четырех типов симметрии с конкретными параметрами среды, по крайней мере локально, может быть преобразован в оператор любого другого типа, параметры среды которого определяются в результате решения системы уравнений, не зависящей от ξ, но зависящей от ω. Оператор может быть, кроме того, деформирован с сохранением типа в соответствии с изменением значений ρ, λ, μ и μ' в одной точке.

Эти результаты находят непосредственное приложение и к задаче уплощения Земли, и к обратной задаче. Решение обратной задачи, которое, мы надеемся, удастся провести, расширяя методику, развитую в скалярном случае [5, 16, 17], позволит по монохроматическим рэлеевским колебаниям поверхности восстановить внутренние упругие характеристики среды, тогда как в случае колебаний лявовского типа это сделать невозможно (для этого нужно использовать две частоты).

1. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ УПРУГОСТИ С ПОМОЩЬЮ РАЗДЕЛЕНИЯ ЗАВИСИМЫХ И НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Малые сейсмические колебания принято [6] описывать системой уравнений линейной изотропной теории упругости

$$\rho \ddot{u}_i = (\lambda u_{k,k})_{,i} + (\mu u_{i,j})_{,j} + (\mu u_{j,i})_{,j}, \tag{1}$$

где ρ – плотность, λ и μ – коэффициенты Ламе, u_i $(i = 1, 2, 3)$ – компоненты вектора смещения.

Часто учитывают влияние гравитации или другие факторы. Граница области может быть свободной, т.е. сила, приложенная к ее элементу, равна нулю: $n_i t_{ij} = 0$, где n_i – поле единичных нормалей к границе, $t_{ij} = \lambda u_{k,k}\delta_{i,j} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})$ – тензор напряжений. Можно рассматривать поверхностный или глубинный источник колебаний, но в настоящей работе в нашу задачу не входит рассмотрение вопроса о том, как граничные и начальные условия и объемные силы трансформируются под действием объявленных преобразований.

Если среда и постановка задачи инвариантны либо относительно поворотов вокруг некоторой оси, либо относительно сдвигов в некотором направлении, то система (1) после перехода в согласованную с симметрией систему координат распадается на систему двух уравнений для первых двух компонент U_1, U_2 преобразованного смещения и одно уравнение для третьей компоненты U_3. Преобразование смещения осуществляется матрицей, связывающей ортогональные реперы [2] : $u = TU$. После этого в трех перечисленных выше случаях слоистости переменные можно разделить как в системе для U_1, U_2, так и в уравнении для U_3. Формулы разделения имеют вид

$$U_j = \int e^{i\omega t} v_j(x, \omega, \xi) w_j(y, \xi) d\omega d\xi, \tag{2}$$

где $j = 1, 2, 3$, x и y – первая и вторая пространственные координаты в новой системе координат (здесь вместо интегрирования может фигурировать бесконечная сумма); v – новое неизвестное, первые две компоненты которого удовлетворяют системе обыкновенных уравнений, а последняя – одному уравнению; w – выражается через специальные функции.

Уравнение для v_3 в этой статье изучаться не будет, а система для $u = (v_1, v_2)$ имеет вид [14, 2]

$$Pu = 0, \tag{3}$$

где $P = \partial(B\partial + C) - C^T\partial + E$ – симметрический оператор, т.е. $B^T = B$, $E^T = E$, $\partial^T = -\partial$, $\xi^T = \xi$; B, C, E – 2×2-матрицы; $\partial = d/dx$; ∂A для произвольной матрицы или функции A всюду в этой статье понимается как композиция операторов, т.е. $\partial A = A\partial + A'$, $(\ )' \equiv d(\ )/dx$; u – двумерный вектор v_1, v_2.

Условие свободной границы представится в виде

$$(B\partial + C)u|_{x=x_0} = 0,$$

где $x = x_0$ – уравнение границы.

Приведем явные выражения для матриц B, C и E.

1. Для осесимметричных колебаний плоскослоистой среды

$$B = \operatorname{diag}(\nu, \mu),$$

$$C = \xi \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\mu & 0 \end{pmatrix},$$

$$E = \operatorname{diag}(\omega^2\rho - \xi^2\mu, \omega^2\rho - \xi^2\nu),$$

здесь и далее $\nu = \lambda + 2\mu$.

2. Для колебаний сферически-слоистой среды $x = r$ – координата-радиус в сферической системе координат,

$$B = r^2 \mathrm{diag}(\nu, \mu),$$

$$C = r \begin{pmatrix} 2\lambda & -\xi\lambda \\ \xi\mu & -\mu \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} -4(\lambda+\mu) - \xi^2\mu + \omega^2 r^2 \rho & 2\xi\lambda + 3\xi\mu \\ 2\xi\lambda + 3\xi\mu & \mu - \xi^2\nu + \omega^2 r^2 \rho \end{pmatrix}.$$

3. Для обоих типов колебаний цилиндрически-слоистой среды $x = r$ – координата-радиус в цилиндрической системе координат,

$$B = r\,\mathrm{diag}(\nu, \mu).$$

Для осесимметричных колебаний цилиндрически-слоистой среды

$$C = \begin{pmatrix} \lambda & -\xi r\lambda \\ \xi r\mu & 0 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} -r^{-1}\nu - \xi^2 r\mu + \omega^2 r\rho & \xi\lambda \\ \xi\lambda & -\xi^2 r\nu + \omega^2 r\rho \end{pmatrix}.$$

4. Для сдвигово-симметричных колебаний цилиндрически-слоистой среды

$$C = \begin{pmatrix} \lambda & -\xi\lambda \\ \xi\mu & -\mu \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} -r^{-1}\nu - \xi^2 r^{-1}\mu + \omega^2 r\rho & \xi r^{-1}(\lambda + 3\mu) \\ \xi r^{-1}(\lambda + 3\mu) & -r^{-1}\mu - \xi^2 r^{-1}\nu + \omega^2 r\rho \end{pmatrix}.$$

Отметим, что оператор P из формулы (3) совпадает в случае плоскослоистой среды с соответствующим оператором системы (1) [15], в случае сферически-слоистой среды получается из него умножением слева на r^2, а в обоих случаях колебаний цилиндрически-слоистой среды – на r. Нетрудно показать [2, 18], что краевая задача со свободной границей является самосопряженной в любом из случаев симметрии.

2. РАЗЛОЖЕНИЕ ОБЩИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ УПРУГОСТИ ПО СИММЕТРИЧНЫМ

Если среда плоско- или сферически-слоиста, то каждую прямую, перпендикулярную плоскости или проходящую через центр сферы, можно выбрать в качестве оси симметрии. Пусть $\zeta = (\zeta_1,\ \zeta_2)$ – координаты на множестве осей, $U(\zeta)$ – решение, представленное в виде (2) и симметричное относительно поворотов вокруг оси ζ. Тогда системе (1) удовлетворяет вектор $T(\zeta)U(\zeta)$, а так как оператор системы (1) от ζ не зависит (в отличие от того же оператора, преобразованного в цилиндрическую систему координат, связанную с осью), то вектор-функция

$$u = \int T(\zeta)U(\zeta)\rho(\zeta)d\zeta \tag{4}$$

при любой плотности ρ также будет удовлетворять системе (1).

Таким образом, вероятно, можно получить любое решение. В частности, таким образом можно, видимо, получить разложения из [19], если в качестве ρ выбрать сумму производных дельта-функции. В этом случае формула (4), после подстановки туда U из (2), примет вид

$$u_k = \int e^{i\omega t} v_{mnj}(x,\omega,\xi) \frac{\partial^{m+n}}{\partial\zeta_1^m \partial\zeta_2^n}(T_{kj}(\zeta)w_j(y,\xi,\zeta))\bigg|_{\zeta=0} d\omega d\xi,$$

где $k, j = 1, 2, 3$; $m, n = 0, 1, \ldots$

Аналогичное представление можно предложить в случае плоской слоистости, рассматривая разложение общего решения по сдвигово-инвариантным решениям. Оно, очевидно, совпадает с преобразованием Фурье по горизонтальным координатам.

В случае цилиндрической слоистости мы располагаем всего одной осью и сдвигами только вдоль этой оси. Здесь в качестве базы можно предложить рассматривать для каждой прямой, перпендикулярной оси, решения, симметричные относительно этой прямой, а для каждой плоскости, содержащей ось, – решения, симметричные относительно этой плоскости. Обе группы симметрий состоят из двух элементов, благодаря чему для решений можно получить переопределенные системы из четырех уравнений, которые, может быть, легче решать. Можно рассмотреть еще более переопределенную систему, взяв произведение этих групп в качестве группы симметрии.

Для получения общего решения u в (4), вероятно, следует использовать все три компоненты U, однако если в U берутся только первые две компоненты, то u может все равно оказаться трехкомпонентным. В случае осесимметричных колебаний волна типа Рэлея определяется как решение с нулевой третьей компонентой, убывающее с глубиной. Представление (4) позволяет очевидным образом распространить это определение на более общую ситуацию: скажем, что решение (4) представляет собой волну типа Рэлея, если каждая осесимметричная его компонента является рэлеевской в этом же смысле.

3. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ С РАЗДЕЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ В ФОРМЕ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ P–SV-КОЛЕБАНИЙ

Сделаем для колебаний сферически-слоистой среды и второго типа колебаний цилиндрически-слоистой среды замену независимой переменной в системе (3), полагая $x = \ln r$. Для матрицы M и матричного оператора L определим матричное преобразование L с помощью M: $\mathrm{Int}_M(L) = M^{-1}LM$. Очевидно, что $\mathrm{Int}_{MN}(L) = \mathrm{Int}_N(\mathrm{Int}_M(L))$ и что если L – матрица, то L и $\mathrm{Int}_M(L)$ подобны.

Все преобразования, последовательно применяемые к оператору P из (3), являются элементарными. Они будут представлены в форме умножений оператора слева или справа на обратимые матрицы. Охарактеризуем коэффициенты этих матриц, разделяя их на три типа.

Первый тип состоит из четырех операторных матриц $\widehat{Q}_1(\xi)$, $\widehat{Q}_2(\xi)$, $\widehat{Q}_1(-\xi)$ и $\widehat{Q}_2(-\xi)$, обратимых при $\xi \neq 0$ в классе дифференциальных операторов благодаря нильпотентности их дифференциальных составляющих, т.е. матриц $-N\xi^{-1}\partial$ и $N\partial$, где $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\widehat{Q}_1 = \begin{pmatrix} \xi^{-1} & 0 \\ -\xi^{-1}\partial & 1 \end{pmatrix}, \qquad \widehat{Q}_2 = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ \partial & 1 \end{pmatrix}.$$

В зависимости от указанных выше случаев 1–4 применяются либо матрицы $\widehat{Q}_i(\xi)$, либо матрицы $\widehat{Q}_i(-\xi)$.

Второй тип коэффициентов представляет собой элементарные функции от независимой переменной, параметров среды и их производных. Они могут зависеть, кроме того, от произвольных постоянных и даже от произвольных функций и их производных. Последнее обстоятельство возникает, когда записывается в общем виде неоднозначно определенное преобразование. Такие функции мы будем называть сложными или явно выраженными (через параметры среды); Олвер [3] их называет дифференциальными. Примерами таких функций являются матрицы B, C, E, выражения для которых приведены выше, а также матрицы M_i, K, L, S из Предложения 1. Матрицы G, D, U, V из Предложения 1 явного выражения не имеют.

Третий тип составляют дифференцируемые столько раз, сколько требуется по смыслу (обычно не более двух), функции x, ω и произвольных постоянных.

Одно и то же выражение может обозначать функцию как второго, так и третьего типа. Третий тип существенно шире второго, там можно интегрировать: $\int_0^x \mu(y)dy$, решения не интегрируемых в квадратурах систем уравнений также принадлежат третьему типу, но не второму.

В Предложении 1 в первых двух утверждениях оператор P преобразуется с использованием только явно выраженных матриц. Выражения этих матриц будут приведены в доказательстве для каждого из четырех случаев. Третье утверждение, эквивалентное второму, использует в качестве преобразования решение G дифференциальной системы, которое не принадлежит второму типу. Использование решения одной системы для преобразования другой, очевидно, нуждается в оправдании. Действительно, почему не взять фундаментальное решение самой второй системы, ведь с его помощью она преобразуется к самому простейшему виду? В данном случае оправдание состоит в том, что матрица G удовлетворяет системе обыкновенных уравнений, которая не зависит ни от ω, ни (главное) от ξ, так что она несопоставимо проще исследуемой системы.

Предложение 1. В каждом из четырех случаев для оператора P можно указать дифференциальные обратимые при $\xi \neq 0$ операторы первого порядка Q_1 и Q_2 и явно выраженные не зависящие от ξ матрицы K, L, S, M_i, $i = 1,2,3,4$, так, что будут справедливы утверждения

$$1)\ P_1 \stackrel{\text{def}}{=} Q_1 P Q_2 = (\partial M_1 + M_2)(\partial + M_3) - \xi^2 M_1; \tag{5}$$

$$2)\ P_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Int}_{M_4}(M_1^{-1} P_1) = (\partial - L + K)(\partial - L - K) - \xi^2. \tag{6}$$

Здесь матрицу M_4 удается выбрать так, чтобы диагональ матрицы L была нулевая, кроме того, след матрицы K оказывается нулевым при любом выборе M_4;

$$3)\ P_3 \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Int}_G(P_2) = (\partial + V)(\partial - V) - \xi^2 = \partial^2 - \xi^2 - U, \tag{7}$$

где матрица G является произвольным обратимым решением уравнения

$$G' = LG, \tag{8}$$

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Int}_G(K), \quad U = V' + V^2 = ID' - \det D, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$D \stackrel{\text{def}}{=} -IV = G^{\mathrm{T}} SG(\det G)^{-1}, \quad S \stackrel{\text{def}}{=} -IK. \tag{10}$$

Здесь оказывается, что матрицы S и D симметричны, след матрицы V равен нулю, $\det G = \mathrm{const}$;

4) *симметричность операторов P и $\partial^2 - \xi^2$ позволяет каждому преобразованию из утверждений 1), 2) и 3) поставить в соответствие еще одно такое же преобразование применением операции транспонирования к каждой формуле.*

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1

Приведем конкретный вид матриц, которые используются в Предложении 1, а также результаты промежуточных выкладок т.е. представим канву вычислений, по которой читатель с минимальными усилиями (в большинстве случаев считая в уме) сможет удостовериться в правильности формул. Таким образом, доказательство представляет собой проверку нескольких тождеств, однако наш опыт показывает, что это дело отнюдь не простое [20]. Еще более сложна процедура нахождения этих матриц, она связана с решением систем дифференциальных уравнений в пространстве сложных функций; воспроизведение ее доставило бы нам дополнительные утверждения о единственности. Эти утверждения будут доказаны с помощью полученных разложений в разд. 5. Доказательство Предложения 1 разбито на четыре части в соответствии с числом рассматриваемых случаев. К сожалению, обнаружить общую для этих случаев причину факторизации части оператора P не удается.

1. Осесимметричные колебания в плоскослоистой среде. Положим здесь $Q_1 = \widehat{Q}_1(-\xi)$, $Q_2 = \widehat{Q}_2(-\xi)$. Оператор P сейчас удобнее записать в виде одной матрицы

$$P = \begin{pmatrix} \partial\nu\partial + \omega^2\rho - \xi^2\mu & \xi\partial\lambda + \xi\mu\partial \\ -\xi\partial\mu - \xi\lambda\partial & \partial\mu\partial + \omega^2\rho - \xi^2\nu \end{pmatrix}.$$

Теперь нетрудно проверить, что

$$Q_1 P = \begin{pmatrix} -\xi^{-1}\partial\nu\partial - \xi^{-1}\omega^2\rho + \xi\mu & -\partial\lambda - \mu\partial \\ \xi^{-1}\partial^2\nu\partial + \xi^{-1}\omega^2\partial\rho - 2\xi\partial\mu - \xi\lambda\partial & \partial^2\lambda + 2\partial\mu\partial + \omega^2\rho - \xi^2\nu \end{pmatrix}$$

и

$$P_1 = \begin{pmatrix} \partial\mu\partial + \mu'\partial + \omega^2\rho - \xi^2\mu & -\partial\lambda - \mu\partial \\ -2\partial\mu'\partial + 2\xi^2\mu' - \omega^2\rho' & \partial\nu\partial + \partial\lambda' + \omega^2\rho - \xi^2\nu \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Сейчас мы доказали, что применение операторов Q_1 и Q_2 приводит оператор P к оператору второго порядка P_1. В операторе P_1 спектральный параметр ξ присутствует только во второй степени с матричным коэффициентом M_1, который только знаком отличается от коэффициента при ∂^2. Таким образом, если оператор P_1 разделить слева на матрицу M_1, то он примет вид оператора Штурма–Лиувилля со спектральным параметром ξ^2. Этот оператор зависит от частоты как от параметра.

Докажем, что не зависящая от ξ часть оператора P_1 раскладывается на множители. Ясно, что

$$M_1 = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ -2\mu' & \nu \end{pmatrix}.$$

Положим

$$M_2 = \begin{pmatrix} \mu' & -\nu \\ \omega^2\rho & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \nu^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \nu \\ -\omega^2\rho & \nu' \end{pmatrix},$$

тогда

$$M_1M_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\omega^2\rho & -2\mu' + \nu' \end{pmatrix}, \qquad M_2M_3 = \begin{pmatrix} \omega^2\rho & \mu' - \nu' \\ 0 & \omega^2\rho \end{pmatrix},$$

следовательно,

$$\partial M_1M_3 + M_2\partial + M_2M_3 = \begin{pmatrix} \mu'\partial + \omega^2\rho & \partial\mu - \nu\partial + \mu' - \nu' \\ -\partial\omega^2\rho + \omega^2\rho\partial & -2\partial\mu' + \partial\nu' + \omega^2\rho \end{pmatrix}.$$

Требуется доказать, что это выражение равняется $P_1 - \partial M_1\partial + \xi^2 M_1$, где оператор P_1 взят из (11); в этом легко убедиться путем сравнения выражений. Утверждение 1) доказано.

Докажем, что из утверждения 2) следует утверждение 3) во всех четырех случаях. Равенство (8) означает, что применение преобразования Int_G к оператору P_2 уничтожает матрицу L в его сомножителях, матрица K при этом преобразуется в матрицу V в соответствии с первой формулой (9). Остальные равенства (9) и (10), а также симметричность матриц D и S, вытекают из следующей элементарной леммы.

Лемма. Пусть A – произвольная двумерная матрица;
1) условие симметричности A эквивалентно обращению в 0 следа матрицы IA,
2) если $\operatorname{sp} A = 0$, то $A^2 = -\det A$,
3) справедливо тождество $IA^{-1}I = -A^T(\det A)^{-1}$.

В оставшейся части доказательства вычисляются матрицы K, L и S. Их вид важно знать для дальнейшего использования, а для завершения доказательства нужно лишь установить, что диагональ у L нулевая и что след матрицы K равен нулю, поскольку утверждение о постоянстве определителя G будет следовать после этого из теоремы Лиувилля–Якоби, а утверждение 4) содержит в себе свое доказательство.

Пусть $P_4 = M_1^{-1}P_1$; нетрудно видеть, что

$$P_4 = \left(\partial + \begin{pmatrix} 2\mu^{-1}\mu' & -\mu^{-1}\nu \\ 2\nu^{-1}\mu^2(\mu^{-1})'' + \nu^{-1}\omega^2\rho & \nu^{-1}\nu' - 2\mu^{-1}\mu' \end{pmatrix}\right)(\partial + M_3) - \xi^2.$$

Применим к P_4 преобразование Int_{M_4}, где $M_4 = \begin{pmatrix} \varkappa\mu^{-1} & 0 \\ 0 & \mu\nu^{-1} \end{pmatrix}$. Назначение матрицы M_4 – уничтожить диагональные члены в коэффициенте при ∂ оператора P_4, записанного в виде $\partial^2 + (\ldots)\partial + (\ldots)$, в то время как произведение матриц M_4G служит для полного уничтожения этого коэффициента. Эти условия могут быть выражены в виде дифференциального уравнения для M_4G такого же вида, как (8), и недоопределенной системой из двух уравнений с четырьмя неизвестными для матрицы M_4. Эта система будет решена в Предложении 2, здесь же из возможных представителей матрицы M_4 выбирается более простой. Целесообразно выбирать этот представитель зависящим от произвольной постоянной $\varkappa$, которая выравнивает размерности элементов матрицы.

Очевидно, действие Int_{M_4} на произвольную матрицу имеет вид

$$\mathrm{Int}_{M_4}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & \varkappa^{-1}\mu^2\nu^{-1}b \\ \varkappa\mu^{-2}\nu c & d \end{pmatrix}, \tag{12}$$

и ясно, что

$$\mathrm{Int}_{M_4}(\partial) = \partial + M_4^{-1}M_4', \tag{13}$$

поэтому

$$P_2 = \mathrm{Int}_{M_4}(P_4) = \left(\partial + \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mu' & -\varkappa^{-1}\mu \\ 2\varkappa(\mu^{-1})'' + \varkappa\mu^{-2}\omega^2\rho & -\mu^{-1}\mu' \end{pmatrix}\right) \times$$
$$\times \left(\partial + \begin{pmatrix} -\mu^{-1}\mu' & \varkappa^{-1}\mu^2\nu^{-1} \\ -\varkappa\mu^{-2}\omega^2\rho & \mu^{-1}\mu' \end{pmatrix}\right) - \xi^2 = (\partial - L + K)(\partial - L - K) - \xi^2. \tag{14}$$

Здесь посредством последнего равенства вводятся и определяются матрицы L и K.

Приведем очевидные теперь выражения для матриц K и L; S легко выражается через K:

$$S = -IK = \begin{pmatrix} -K_{21} & -K_{22} \\ K_{11} & K_{12} \end{pmatrix},$$
$$K = \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mu' & -\frac{1}{2}\varkappa^{-1}\mu\nu^{-1}(\lambda + 3\mu) \\ \varkappa(\mu^{-2}\omega^2\rho + (\mu^{-1})'') & -\mu^{-1}\mu' \end{pmatrix}, \tag{15}$$
$$L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\varkappa^{-1}\mu\nu^{-1}(\lambda + \mu) \\ -\varkappa(\mu^{-1})'' & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Осесимметричные колебания в сферически-слоистой среде. Положим $r = e^x$, $\partial = r\,d/dr = d/dx$, $Q_1 = r\widehat{Q}_1 r^{-1}$, $Q_2 = \widehat{Q}_2$. Оператор P снова удобнее записать в виде одной матрицы $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где

$$a = \partial\nu\partial + \nu\partial + 2\partial\lambda - 2\lambda\partial + \omega^2 r^2\rho - 2\nu - \xi^2\mu,$$
$$b = -\xi\partial\lambda - \xi\mu\partial + \xi(\lambda + 3\mu),$$
$$c = \xi\partial\mu + \xi\lambda\partial + 2\xi\nu,$$
$$d = \partial\mu\partial + 2\mu\partial - \partial\mu + \omega^2 r^2\rho - \xi^2\nu.$$

Выразим P_1 через коэффициенты матрицы P:

$$P_1 = \begin{pmatrix} P_{111} & P_{112} \\ P_{121} & P_{122} \end{pmatrix} = Q_1 P Q_2 =$$
$$= \begin{pmatrix} a + \xi^{-1} b\partial & \xi^{-1} b \\ -\partial a - a - \xi^{-1}\partial b\partial - \xi^{-1} b\partial + \xi c + d\partial & -\xi^{-1}\partial b - \xi^{-1} b + d \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Подставив сюда $a, \ldots, d$, найдем коэффициенты матрицы P_1:

$$\begin{aligned} P_{111} &= \partial(\mu\partial + 2\lambda) + (\mu' + 5\mu)\partial - 2\nu + \omega^2 r^2 \rho - \xi^2 \mu, \\ P_{112} &= -\partial\lambda - \mu\partial + \lambda + 3\mu, \\ P_{121} &= -\partial(2\mu' + 2\lambda + 5\mu)\partial - \partial(2\lambda' - 4\mu + \omega^2 r^2 \rho) + \\ &\quad + (-3\mu' - 5\mu + \omega^2 r^2 \rho)\partial + 2\nu - \omega^2 r^2 \rho + \xi^2(2\mu' + 2\lambda + 5\mu), \\ P_{122} &= \partial(\nu\partial + \lambda' - 4\mu) + 3\mu\partial - \lambda - 3\mu + \omega^2 r^2 \rho - \xi^2 \nu. \end{aligned} \quad (17)$$

Приступим к доказательству разложимости на множители. Очевидно,

$$M_1 = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ -(2\mu' + 2\lambda + 5\mu) & \nu \end{pmatrix},$$

положим

$$M_2 = \begin{pmatrix} \mu' + 2\lambda + 5\mu & -\nu \\ -3\mu' - 2\lambda - 5\mu + r^2\omega^2\rho & \nu \end{pmatrix} \text{ и } M_3 = \nu^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \nu \\ -2\lambda' + 2\nu - r^2\omega^2\rho & \nu' + \nu \end{pmatrix},$$

тогда

$$M_1 M_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -2\lambda' + 2\nu - r^2\omega^2\rho & \lambda' - \lambda - 3\mu \end{pmatrix},$$

$$M_2 M_3 = \begin{pmatrix} 2\lambda' - 2\nu + r^2\omega^2\rho & -\lambda' - \mu' + \lambda + 3\mu \\ -2\lambda' + 2\nu - r^2\omega^2\rho & \lambda' - \mu' - \lambda - 3\mu + r^2\omega^2\rho \end{pmatrix}.$$

Теперь выпишем коэффициенты операторной матрицы $X = \partial M_1 M_3 + M_2 \partial + M_2 M_3$:

$$\begin{aligned} X_{11} &= \mu'\partial + 2\lambda\partial + 5\mu\partial + 2\lambda' - 2\nu + r^2\omega^2\rho, \\ X_{12} &= \partial\mu - \nu\partial - \lambda' - \mu' + \lambda + 3\mu, \\ X_{21} &= -2\partial\lambda' + 2\partial\nu - \partial r^2\omega^2\rho - 3\mu'\partial - 2\lambda\partial - 5\mu\partial + r^2\omega^2\rho\partial - 2\lambda' + 2\nu - r^2\omega^2\rho, \\ X_{22} &= \partial\lambda' - \partial\lambda - 3\partial\mu + \nu\partial + \lambda' - \mu' - \lambda - 3\mu + r^2\omega^2\rho. \end{aligned}$$

Остается проверить выполнение равенства $X = P_1 - \partial M_1 \partial + \xi^2 M_1$, в котором коэффициенты P_1 берутся из (17). Утверждение 1) доказано.

Подобно случаю 1, теперь осталось вычислить K и L. Матрица M_4 теперь находится в виде $M_4 = M_5 M_6$, $M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $M_6 = \begin{pmatrix} \varkappa\mu^{-1} r^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & \mu\nu^{-1} r^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$, где $\varkappa$ имеет тот же смысл, что и в случае 1. Назначение матрицы M_5 – убрать с главной диагонали коэффициента при ∂ члены, которые не интегрируются в квадратурах.

Положим $P_4 = \mathrm{Int}_{M_5}(M_1^{-1} P_1)$, тогда, согласно (5),

$$P_4 = (\mathrm{Int}_{M_5}(M_1))^{-1}(\partial \mathrm{Int}_{M_5}(M_1) + \mathrm{Int}_{M_5}(M_2))(\partial + \mathrm{Int}_{M_5}(M_3)) - \xi^2$$

и после вычисления входящих в это выражение матриц

$$(\mathrm{Int}_{M_5}(M_1))' + \mathrm{Int}_{M_5}(M_2) = \begin{pmatrix} 2\mu' + \mu & -\nu \\ -2\mu'' - 8\mu' - 3\mu + \omega^2 r^2 \rho & \nu' + 3\nu \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathrm{Int}_{M_5}(M_3)$$

получим

$$P_4 = \left(\partial + \begin{pmatrix} 2\mu^{-1}\mu' + 1 & -\mu^{-1}\nu \\ \nu^{-1}(2\mu^2(\mu^{-1})'' + \omega^2 r^2 \rho) & \nu^{-1}\nu' - 2\mu^{-1}\mu' \end{pmatrix}\right) \times$$
$$\times \left(\partial + \nu^{-1} \begin{pmatrix} 2\nu & \nu \\ 4\mu' - \omega^2 r^2 \rho & \nu' - \nu \end{pmatrix}\right) - \xi^2.$$

Теперь применим к P_4 преобразование Int_{M_6} и так же, как с помощью (12), (13) была получена формула (14), найдем

$$P_2 = \left(\partial + \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mu' - \frac{1}{2} & -\varkappa^{-1} r^2 \mu \\ \varkappa r^{-2}(2(\mu^{-1})'' + \omega^2 r^2 \rho \mu^{-2}) & -\mu^{-1}\mu' + \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) \times$$
$$\times \left(\partial + \begin{pmatrix} -\mu^{-1}\mu' + \frac{1}{2} & \varkappa^{-1} r^2 \mu^2 \nu^{-1} \\ \varkappa r^{-2}\mu^{-2}(4\mu' - \omega^2 r^2 \rho) & \mu^{-1}\mu' - \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) - \xi^2 =$$
$$= (\partial - L + K)(\partial - L - K) - \xi^2.$$

Приведем определяемые этим равенством матрицы K и L $(S = -IK)$.

$$K = \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mu' - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\varkappa^{-1} r^2 \mu \nu^{-1}(\lambda + 3\mu) \\ \varkappa r^{-2}((\mu^{-1})'' + 2(\mu^{-1})' + \omega^2 r^2 \rho \mu^{-2}) & -\mu^{-1}\mu' + \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\varkappa^{-1} r^2 \mu \nu^{-1}(\lambda + \mu) \\ -\varkappa r^{-2}((\mu^{-1})'' - 2(\mu^{-1})') & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Осесимметричные колебания в цилиндрически-слоистой среде. Положим $r = x$, $\partial = d/dx$, $Q_1 = \widehat{Q}_1$, $Q_2 = \widehat{Q}_2$. Оператор P снова удобнее записать в виде одной матрицы:

$$P = \begin{pmatrix} \partial r\nu\partial + \partial\lambda - \lambda\partial + \omega^2 r\rho - r^{-1}\nu - \xi^2 r\mu & -\xi r\partial\lambda - \xi r\mu\partial \\ \xi r\partial\mu + \xi r\lambda\partial + \xi\mu + \xi\lambda & \partial r\mu\partial + \omega^2 r\rho - \xi^2 r\nu. \end{pmatrix}.$$

Проведя вычисления с помощью формул, аналогичных (16), найдем оператор

$$P_1 = \partial M_1 \partial - \xi^2 M_1 + \begin{pmatrix} (r\mu' + \lambda + \mu)\partial + \lambda' - r^{-1}\nu + \omega^2 r\rho & -r\partial\lambda - r\mu\partial \\ \partial(-\lambda' + r^{-1}\nu) - \omega^2(r\rho)' & \partial(r\lambda') + \omega^2 r\rho \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где $M_1 = \begin{pmatrix} r\mu & 0 \\ -2r\mu' - \nu & r\nu \end{pmatrix}$.

Докажем разложимость на множители. Положим

$$M_2 = \begin{pmatrix} r\mu' + \lambda + \mu & -r\nu \\ \omega^2 r\rho & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ r^{-2} - r^{-1}\nu^{-1}(\lambda' + \omega^2 r\rho) & r^{-1} + \nu^{-1}\nu' \end{pmatrix},$$

тогда, очевидно,

$$M_1 M_3 = \begin{pmatrix} 0 & r\mu \\ -\lambda' + r^{-1}\nu - \omega^2 r\rho & r\lambda' \end{pmatrix},$$

$$M_2M_3 = \begin{pmatrix} \lambda' - r^{-1}\nu + \omega^2 r\rho & -r\lambda' - r\mu' - \mu \\ 0 & \omega^2 r\rho \end{pmatrix}.$$

Выпишем матрицу оператора

$$X = \partial M_1 M_3 + M_2 \partial + M_2 M_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} (r\mu' + \lambda + \mu)\partial + \lambda' - r^{-1}\nu + \omega^2 r\rho & -r\mu\partial - r\lambda\partial - r\lambda' \\ \partial(-\lambda' + r^{-1}\nu - \omega^2 r\rho) + \omega^2 r\rho\partial & \partial(r\lambda') + \omega^2 r\rho \end{pmatrix}.$$

Сравнение оператора X с P_1 из (18) доказывает разложимость. Утверждение 1) доказано.

Докажем утверждение 2). Подобно случаю 2, положим

$$M_4 = M_5M_6, \quad M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad M_6 = \begin{pmatrix} \varkappa r^{-\frac{1}{2}}\mu^{-1} & 0 \\ 0 & \mu\nu^{-1}r^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

где $\varkappa$ имеет тот же смысл, что и раньше.

Положим $P_4 = \mathrm{Int}_{M_5}(M_1^{-1}P_1)$, тогда

$$P_4 = (\mathrm{Int}_{M_5}(M_1))^{-1}(\partial \mathrm{Int}_{M_5}(M_1) - \\ - r^{-2}N\mathrm{Int}_{M_5}(M_1) + \mathrm{Int}_{M_5}(M_2))(\partial - r^{-2}N + \mathrm{Int}_{M_5}(M_3)) - \xi^2,$$

где $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, и после вычисления матриц

$$(\mathrm{Int}_{M_5}(M_1))' - r^{-2}N\mathrm{Int}_{M_5}(M_1) + \mathrm{Int}_{M_5}(M_2) = \begin{pmatrix} 2r\mu' & -r\nu \\ -2r\mu'' - 4\mu' + \omega^2 r\rho & r\nu' + 2\nu \end{pmatrix}$$

и $\quad -r^{-2}N + \mathrm{Int}_{M_5}(M_3) \quad$ получим

$$P_4 = \left(\partial + \begin{pmatrix} 2\mu^{-1}\mu' & -\mu^{-1}\nu \\ \nu^{-1}(2\mu^2(\mu^{-1})'' - 2r^{-1}\mu' + \omega^2\rho) & \nu^{-1}\nu' - 2\mu^{-1}\mu' + r^{-1} \end{pmatrix}\right) \times \\ \times \left(\partial + \begin{pmatrix} r^{-1} & 1 \\ 2r^{-1}\nu^{-1}\mu' - \omega^2\rho\nu^{-1} & \nu^{-1}\nu' \end{pmatrix}\right) - \xi^2.$$

Теперь применим к P_4 преобразование Int_{M_6} и с помощью формул, подобных (12), (13), получим

$$P_2 = \mathrm{Int}_{M_6}(P_4) = \\ = \left(\partial + \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mu' - \frac{1}{2}r^{-1} & -\varkappa^{-1}\mu \\ \varkappa(2(\mu^{-1})'' - 2r^{-1}(\mu^{-1})' + \omega^2\rho\mu^{-2}) & -\mu^{-1}\mu' + \frac{1}{2}r^{-1} \end{pmatrix}\right) \times \\ \times \left(\partial + \begin{pmatrix} -\mu^{-1}\mu' + \frac{1}{2}r^{-1} & \varkappa^{-1}\mu^2\nu^{-1} \\ \varkappa(2r^{-1}(\mu^{-1})' - \omega^2\rho\mu^{-2}) & \mu^{-1}\mu' - \frac{1}{2}r^{-1} \end{pmatrix}\right) - \xi^2 = \\ = (\partial - L + K)(\partial - L - K) - \xi^2.$$

Отсюда имеем

$$K = \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mu' - \frac{1}{2}r^{-1} & -\frac{1}{2}\varkappa^{-1}\mu\nu^{-1}(\lambda + 3\mu) \\ \varkappa((\mu^{-1})'' - 2r^{-1}(\mu^{-1})' + \omega^2\rho\mu^{-2}) & -\mu^{-1}\mu' + \frac{1}{2}r^{-1} \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\varkappa^{-1}\mu\nu^{-1}(\lambda+\mu) \\ -\varkappa(\mu^{-1})'' & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Сдвигово-симметричные колебания в цилиндрически-слоистой среде. Положим $r = e^x$, $\partial = d/dx$, $Q_1 = \widehat{Q}_1 r$, $Q_2 = \widehat{Q}_2$. Матрица оператора P здесь имеет вид

$$P = r^{-1}\begin{pmatrix} P_{11} & -\xi\partial\lambda - \xi\mu\partial + \xi(\mu+\nu) \\ \xi\partial\mu + \xi\lambda\partial + \xi(\mu+\nu) & P_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$P_{11} = \partial\nu\partial + \partial\lambda - \lambda\partial - \nu + \omega^2 r^2\rho - \xi^2\mu,$$
$$P_{22} = \partial\mu\partial - \partial\mu + \mu\partial - \mu + \omega^2 r^2\rho - \xi^2\nu.$$

Как и ранее, после несложных вычислений находим оператор

$$\begin{aligned} P_1 = {} & \partial M_1\partial - \xi^2 M_1 + \\ & + \begin{pmatrix} (\mu'+\mu+\nu)\partial + \lambda' - \nu + \omega^2 r^2\rho & -\partial\lambda - \mu\partial + \mu + \nu \\ \partial(-\lambda'+\nu) - (\mu'+\mu)\partial - \omega^2(r^2\rho)' & d_1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$M_1 = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ -2\mu' - \mu - \nu & \nu \end{pmatrix}, \quad d_1 = \partial(\lambda' - \nu - 2\mu) + \mu\partial - \mu + \omega^2 r^2\rho.$$

Докажем разложимость на множители. Положим

$$M_2 = \begin{pmatrix} \mu'+\mu+\nu & -\nu \\ -\mu'-\mu+\omega^2 r^2\rho & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\nu^{-1}(\lambda'+\omega^2 r^2\rho) & \nu^{-1}\nu' \end{pmatrix},$$

тогда, очевидно,

$$M_1 M_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\lambda'+\nu-\omega^2 r^2\rho & \lambda'-\mu-\nu \end{pmatrix},$$
$$M_2 M_3 = \begin{pmatrix} \lambda'-\nu+\omega^2 r^2\rho & \mu'-\nu'+\mu+\nu \\ 0 & -\mu'-\mu+\omega^2 r^2\rho \end{pmatrix}.$$

Как и ранее, сравнение оператора $X = \partial M_1 M_3 + M_2\partial + M_2 M_3$ с соответствующей частью P_1 из (19) доказывает разложимость и, тем самым, утверждение 1).

Докажем утверждение 2). Подобно предыдущему случаю, положим

$$M_4 = M_5 M_6, \quad M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_6 = \begin{pmatrix} \varkappa r^{-1}\mu^{-1} & 0 \\ 0 & r\mu\nu^{-1} \end{pmatrix},$$

где $\varkappa$ имеет тот же смысл, что и раньше. Положим $P_4 = \mathrm{Int}_{M_5}(M_1^{-1}P_1)$, тогда

$$P_4 = (\mathrm{Int}_{M_5}(M_1))^{-1}(\partial\mathrm{Int}_{M_5}(M_1) + \mathrm{Int}_{M_5}(M_2))(\partial + \mathrm{Int}_{M_5}(M_3)) - \xi^2$$

и после вычислений получим

$$\begin{aligned} P_4 = {} & \left(\partial + \begin{pmatrix} 2\mu^{-1}\mu'+1 & -\mu^{-1}\nu \\ \nu^{-1}(2\mu^2(\mu^{-1})''+2\mu'+\omega^2 r^2\rho) & \nu^{-1}\nu' - 2\mu^{-1}\mu' - 1 \end{pmatrix}\right) \times \\ & \times \left(\partial + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \nu^{-1}(2\mu'-\omega^2 r^2\rho) & \nu^{-1}\nu'-1 \end{pmatrix}\right) - \xi^2. \end{aligned}$$

Теперь применим к P_4 преобразование Int_{M_6} и с помощью формул, подобных (12), (13), получим

$$P_2 = \mathrm{Int}_{M_6}(P_4) = \left(\partial + \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mu' & -\varkappa^{-1}r^2\mu \\ \varkappa r^{-2}(2(\mu^{-1})'' - 2(\mu^{-1})' + \omega^2 r^2\rho\mu^{-2}) & -\mu^{-1}\mu' \end{pmatrix}\right) \times$$
$$\times \left(\partial + \begin{pmatrix} -\mu^{-1}\mu' & \varkappa^{-1}r^2\mu^2\nu^{-1} \\ -\varkappa r^{-2}(2(\mu^{-1})' + \omega^2 r^2\rho\mu^{-2}) & \mu^{-1}\mu' \end{pmatrix}\right) - \xi^2 =$$
$$= (\partial - L + K)(\partial - L - K) - \xi^2.$$

Отсюда имеем

$$K = \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mu' & -\frac{1}{2}\varkappa^{-1}r^2\mu\nu^{-1}(\lambda + 3\mu) \\ \varkappa r^{-2}((\mu^{-1})'' + \omega^2 r^2\rho\mu^{-2}) & -\mu^{-1}\mu' \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\varkappa^{-1}r^2\mu\nu^{-1}(\lambda + \mu) \\ -\varkappa r^{-2}((\mu^{-1})'' + 2(\mu^{-1})') & 0 \end{pmatrix}.$$

Предложение 1 доказано.

5. ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ

Утверждение 1) Предложения 1 позволяет каждому набору параметров ρ, λ, μ, удовлетворяющему его условиям, при любой частоте ω поставить в соответствие, по меньшей мере, двумя способами матричный оператор Штурма–Лиувилля, определенный по модулю действия группы невырожденных матриц. Затем упрощение или классификация таких операторов производится посредством матричных преобразований. Это значит, что в каждой орбите группы выбирается какой-нибудь представитель оператора, который оказывается лучше других пригодным для решения конкретной задачи. Возможные решения этой проблемы классификации для явно выраженных матриц представлены в утверждении 2) Предложения 1 и его доказательстве, а для матриц с коэффициентами, зависящими от решения системы обыкновенных уравнений, – в утверждении 3) того же Предложения.

Однако оказалось, что выбранные представители определяются своими свойствами неоднозначно (Предложение 2). И теперь задача состоит в том, чтобы вычислить подгруппы, определяющие эту неоднозначность, т.е. такие, орбита которых состоит из всех операторов с выбранным свойством.

В Предложении 3 исследуется единственность полученных представлений фиксированного элемента на орбите. В следующем Предложении 4 на каждой орбите выбирается почти канонический ее представитель: элемент, который определен с точностью до действия подгруппы постоянных диагональных матриц. Этот представитель замечателен еще тем, что его главная часть диагональна, а по диагонали стоят волновые операторы.

Предложение 2. 1) если при фиксированных функциях $\rho(x)$, $\lambda(x)$, $\mu(x)$ матричное преобразование $H(x)$ сохраняет потенциальный вид оператора (7), то матрица $H(x)$ постоянна;

2) пусть явно выраженная через параметры матрица $H = \begin{pmatrix} a\, b \\ c\, d \end{pmatrix}$ *сохраняет указанные в утверждении 2) Предложения 1 свойства матриц* K *и* L. *Тогда* $\det H \overset{\mathrm{def}}{=} h$ *постоянен, а коэффициенты* H *выражаются формулами*

$$d = h\Delta^{-1}(c' - aL_{21}), \qquad b = h\Delta^{-1}(a' - cL_{12}),$$

в которых a *и* c *выбираются произвольными функциями, не обращающимися в нуль одновременно,*

$$\Delta = \Delta(a, c) = \det \begin{pmatrix} a & c \\ a' - cL_{12} & c' - aL_{21} \end{pmatrix},$$

L_{ij} *– коффициенты матрицы* L.

Другое решение получается из этого, если в формулах поменять местами a *и* d, c *и* b, *а* b *и* d *считать теперь произвольными.*

Доказательство. Действие Int_H на оператор вида (6) переводит L в $\widetilde{L} = -H^{-1}H' + \mathrm{Int}_H(L)$, а K в $\widetilde{K} = \mathrm{Int}_H(K)$.

Так как потенциальный вид оператора, часть которого разложена на множители по формуле (7), определяется условием $L_{P_3} = 0, \quad K_{P_3} = V$, то из первого соотношения получаем, что $H^{-1}H' = 0$, откуда следует утверждение 1). Так как подобные матрицы имеют одинаковые собственные числа, то $\widetilde{K}$ будет иметь нулевой след при любой матрице H. Поэтому для H из утверждения 2) остается система двух уравнений, вытекающая из того, что главная диагональ $\widetilde{L}$ равна нулю. Если ее выписать, формулы для b и d станут очевидными. Отметим, что $\Delta(a, c) \neq 0$ только в пространстве сложных функций, это следует из того, что во всех рассматриваемых вариантах L_{12} и L_{21} являются функционально независимыми, т.е. их можно рассматривать как параметры среды вместо λ и μ. Утверждение о другом решении является, конечно же, следствием того, что свойства матриц K и L сохраняются при одновременной перестановке строк и столбцов в операторе (6).

Исследуем теперь вопрос о единственности представлений фиксированных операторов P_1, P_2 и P_3 в определенных Предложением 1 формах.

Предложение 3. Пусть операторы P_1, P_2 *и* P_3 *фиксированы, т.е. выбран оператор* P *из четырех рассматриваемых вариантов, а также даны операторы* Q_1 *и* Q_2 *и матрицы* M_4 *и* G:

1) в пространстве матриц, явно выраженных через параметры среды, матрицы L *и* K, *а вместе с ними* M_1, M_2 *и* M_3 *определены однозначно;*

2) в пространстве матриц, зависящих от x, *матрицы* L *и* M_1 *определены однозначно, а матрица* K *(соответственно* V*) и посредством нее* M_2 *и* M_3 *определяются однозначно своими значениями в одной точке. В ситуации общего положения значение* K *(соответственно* V*) в любой точке определяется однозначно условием равенства нулю ее следа. В частных случаях матрица* V *с нулевым следом определена с точностью до постоянного слагаемого, коэффициенты которого лежат на квадратичной поверхности.*

Доказательство. Матрицы M_1 и L (и U) определены однозначно, поскольку любой оператор в канонической записи имеет однозначно определенные коэффициенты при степенях ∂.

Пусть $(\partial-L+K)(\partial-L-K)=(\partial-L+K+R)(\partial-L-K-R)$ для некоторой матрицы R при заданных K и L. Это уравнение относительно R нетрудно преобразовать к виду

$$R' = LR - RL - KR - RK - R^2. \tag{20}$$

Предположим, что коэффициенты всех матриц явно выражены. Тогда, так как L и K не зависят от производных ρ и λ, матрица R не зависит ни от ρ, ни от λ. Отсюда следует, что выражение $(L-K)R - R(L+K)$ не зависит от ρ и λ. Рассматривая явные выражения матриц $L-K$ и $L+K$ во всех четырех случаях, можно заключить, что они имеют вид

$$L - K = a\rho N + (\ldots), \qquad L + K = -a\rho N + b\nu^{-1}N^T + (\ldots),$$

где $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, функции a, b и матрицы $(\ldots)$ от ρ и λ не зависят. Отсюда получаем $NR + RN = 0$ и $RN^T = 0$ и, значит, $R = 0$.

Пусть теперь все матрицы рассматриваются в алгебре функций от x. Преобразование G превращает матрицу K в V, L в 0, а равенство (20) в равенство

$$R' = -VR - RV - R^2. \tag{21}$$

Симметризуем это равенство, полагая $R_S = IR$, $V_S = IV$; R_S, V_S симметричны согласно лемме, для них из (21) получим

$$R'_S = V_S I R_S + R_S I V_S + R_S I R_S;$$

применив транспонирование $V_S^T = V_S$, $I^T = -I$, $R_S^T = R_S$, найдем

$$R'_S = -R_S I V_S - V_S I R_S - R_S I R_S$$

и, складывая, получим $R'_S = 0$. Следовательно, $R = \mathrm{const}$ и $VR + RV + R^2 = 0$.

Полагая $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix}$, получим, что последнее равенство эквивалентно скалярному равенству

$$2a_1 a + b_1 c + c_1 b + a^2 + bc = 0.$$

В общем случае функции a_1, b_1, c_1 – линейно независимы, отсюда следует, что $a = b = c = 0$. Если мы имеем дело с частным случаем, то среди этих функций может быть одна, две или три линейно независимых. В соответствии с этим множество всех R составляет поверхность, кривую или две точки, одна из которых, естественно, нуль.

Следствие. В каждом из четырех вариантов оператора P отображение $(\rho, \lambda, \mu) \longmapsto$ (орбита оператора P_3 относительно действия $P_3 \mapsto \mathrm{Int}_H(P_3)$ группы матриц, зависящих от x) не является взаимно однозначным.

Докажем это следствие, воспользовавшись результатом Предложения 5 (см. ниже) о том, что любая матрица V с нулевым следом получается из некоторого набора (ρ, λ, μ). Возьмем оператор P_3, определенный одновременно как матрицей V, так и матрицей $V_1 = V + R$. Чтобы это условие выполнялось, достаточно выбрать $a \neq 0$ и при произвольных b, c, b_1, c_1 определить a_1 из выведенного в доказательстве Предложения соотношения. Выберем, кроме того, b_1 и c_1 так, чтобы b_1' и c_1' были линейно независимы. Предположим теперь, что матрицы V_1 и V получены из одних и тех же параметров среды. Согласно утверждению 1) Предложения 2 отсюда вытекает, что $V_1 = H^{-1}VH$ с некоторой постоянной матрицей H. Следовательно, $R = H^{-1}VH - V$ и $V'H = HV'$, так как R и H постоянны. Из последнего равенства и независимости b_1' и c_1' вытекает, что матрица H должна быть скалярной. Но тогда $R = 0$, что противоречит выбору $a \neq 0$. Следовательно, V_1 и V получаются из разных параметров среды и определяют один оператор, что и требуется.

В разд. 7 относительно этого отображения будет установлен существенно более точный результат.

6. ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ЧАСТОТЫ

Матрица K во всех случаях имеет вид $K = K_0 + \omega^2 kN$, где матрица K_0 и функция k от ω не зависят, $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Раскрывая скобки в (6), получим

$$P_2 = (\partial - L + K_0)(\partial - L - K_0) + \omega^2 F - \xi^2, \tag{22}$$

где

$$\begin{aligned} F_{11} &= -k(K_0 - L)_{12}, & F_{12} &= 0, \\ F_{21} &= -k', & F_{22} &= -k(K_0 + L)_{12}. \end{aligned}$$

Из формул для K и L получаем, что во всех случаях $k = \varkappa\mu^{-2}\rho$, в случаях 1 и 3 разд. 4 $F_{11} = \mu^{-1}\rho$, $F_{22} = \nu^{-1}\rho$, а в оставшихся двух случаях диагональ F содержит еще множитель r^2.

Таким образом, главная часть P_2, т.е. матрица, в которой собраны квадратичные по ∂, ω, ξ члены, является треугольной матрицей, на диагонали которой стоит преобразование волнового оператора. В случае однородной среды эта матрица становится диагональной, а сам оператор P_2 треугольным, следовательно, как и в методе упругих потенциалов, решения определяются волновыми операторами. В неоднородном случае тоже, оказывается, можно привести F к диагональной форме, сохранив при этом нулевую диагональ у матрицы L. Найдем это преобразование, пользуясь критерием из утверждения 2) Предложения 2. Так как F – нижняя треугольная, а определитель преобразования можно приравнять 1, то оно должно иметь вид $H = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a^{-1} \end{pmatrix}$. Из формул упомянутого критерия получаем соотношение $a' = cL_{12}$ (так как $b = 0$). Теперь из формулы $(\mathrm{Int}_H(F))_{21} = 0$, которая эквивалентна соотношению $c = aF_{21}/(F_{11} - F_{22})$, получаем $c = -k'a/k(2L_{12}) = a'/L_{12}$, откуда $a = k^{-1/2}$. Очевидно, диагональ матрицы $\mathrm{Int}_H(F)$ совпадает с диагональю F, а на побочной диагонали, естественно, – нули, тем самым доказано

Предложение 4. Существует явно выраженная матрица H, такая что оператор $P_5 = \mathrm{Int}_H(P_2)$ имеет вид правой части в (22), но при этом матрица F диагональна, след матрицы K_0 равен нулю, а у матрицы L нулевая диагональ.

Если параметры среды являются функциями от x, то это преобразование $H(x)$ существует в области, где $\rho(x) \neq 0$ и $L_{12}(x) \neq 0$.

Оператор P_5 определен своим свойствами по модулю действия постоянных матриц. Действие такой матрицы на оператор заключается в изменении параметра $\varkappa$.

Наконец, при $\xi = 0$ оператор P_5 разлагается на множители первого порядка.

7. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СРЕДЫ ПО ПОТЕНЦИАЛУ МАТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

Будет доказано несколько больше: не только все орбиты, т.е. потенциалы вида (9), получаются из некоторых параметров среды хотя бы локально, но и все матрицы $V(x)$ с нулевым следом.

Предложение 5. Пусть $V(x) = ID$ – дифференцируемая матрица с нулевым следом, и пусть фиксирован любой из четырех явных видов матриц K и L. Тогда система уравнений

$$G' = LG, \tag{23}$$
$$G^{-1}KG = V \tag{24}$$

разрешима в окрестности любой точки x_0 относительно неизвестных G, ρ, λ, μ. Решение определено однозначно значениями $G = G_0$, $\varkappa$ и $\mu = \mu_0$ в этой точке. Эти значения должны быть выбраны так, чтобы

$$\mu_0 \neq 0, \quad 2\varkappa_{i0}K_{120} + \mu_0 \neq 0, \quad \varkappa_{i0}K_{120} + \mu_0 \neq 0,$$

где индекс i означает номер варианта, $\varkappa_i = \varkappa$ при $i = 1,3$ и $\varkappa_i = \varkappa r^2$ при $i = 2,4$, K_{120} – коэффициент матрицы $K_0 = G_0V(x_0)G_0^{-1}$. Более того, эта система рационально эквивалентна разрешенной относительно производных G', μ' нелинейной системе, интегралом которой является определитель G и после решения которой функции λ и ρ вычисляются алгебраически.

Доказательство. Так как K из (24) выражается через G и $V(x)$,то,рассматривая конкретный вид матрицы K во всех случаях, легко видеть, что μ' выражается через G и x, λ – через G, μ и x, а ρ – через G, μ', μ'' и x. Вторая производная μ присутствует также в матрице L, так что задача состоит в том, чтобы выразить μ'' через G, μ и x. Дифференцируя (24) с учетом (23), получим $K' = R + LK - KL$, где $R = GV'G^{-1}$; отсюда $K_{11}' = R_1 + L_{12}K_{21} - K_{12}L_{21}$. Подставляя сюда $K_{11} = -\mu(\mu^{-1})' + K_{11}^i$; $L_{21} = \varkappa_i(\mu^{-1})'' + L_{21}^i$ с зависящими от варианта и явно выраженными через $G, \mu, V(x)$ и x функциями K_{11}^i и L_{21}^i, получим

$$-\mu'(\mu^{-1})' - \mu(\mu^{-1})'' + (K_{11}^i)' = R_{11} + L_{12}K_{21} + K_{12}\varkappa_i(\mu^{-1})'' + K_{12}L_{21}^i. \tag{25}$$

Отсюда $(\mu^{-1})''$ выражается через остальные величины делением на коэффициент $K_{12}\varkappa_i + \mu$, в котором K_{12} выражен через G и V из (24) и который по определению K_{12} равен $\mu(\lambda + \mu)/2\nu$. Таким образом, получаем

$$\lambda = \mu\frac{4\varkappa_i K_{12} + 3\mu}{-2\varkappa_i K_{12} - \mu} = -2\mu - \frac{\mu^2}{2\varkappa_i K_{12} + \mu}.$$

Функцию μ' для подстановки в (25) берем из очевидного уравнения

$$\mu^{-1}\mu' = K_{11} - K_{11}^{i}. \tag{26}$$

Искомую систему составляют уравнения (26) и (23), в правой части которых представлены выражения величины $(\mu^{-1})''$, λ и K_{mn} через G, $V(x)$, x. Она эквивалентна исходной системе (23), (24), так как уравнение (25) получается дифференцированием (26) с учетом (23), так что оно является следствием обеих систем. Плотность ρ очевидным образом находится из выражения K_{21}.

Следствие. Правая часть системы (23), (26) не имеет особенностей в области $0 < \lambda, \mu < \infty$, которая содержит в себе все физически допустимые значения параметров Ламе. Отсюда вытекает, что если потенциал U был получен из некоторых парметров Ламе и при этом известны их и матрицы G значения в одной точке, то они вместе с матрицей G могут быть однозначно восстановлены во всей области своего существования. В случае произвольного $U(x)$ решение зависит от четырех числовых параметров. Например, если заданы ρ, λ, μ, μ' в точке x_0 и при этом выполняются условия:

$$\mu(\lambda+3\mu) \neq 0,\ V'(x_0) \neq 0,\ \det\widetilde{V} > 0,\ \ \left((\det\widetilde{V})'\right)^2 - 4\det(\widetilde{V}')\det\widetilde{V} < 0,$$

где $\widetilde{V} = \begin{pmatrix} V_{11} & 2V_{12} \\ 2V_{21} & V_{11} \end{pmatrix}$,

то решение существует в окрестности x_0. Таким образом,рациональные функции ρ, λ, μ' от μ и однородных координат $G_{11} : G_{12} : G_{21} : G_{22}$ определены так, что якобиан отображения $(\mu, G) \mapsto (\mu, \rho, \lambda, \mu')$ не равен тождественно нулю.

Отметим, что особенности в системе не возникают и при более слабых условиях на $\lambda : \lambda + \mu \neq 0$, $\mu \neq 0$ и $\nu \neq 0$. Отрицательные значения λ в природе не известны, но теоретически допустимы (в [21], с.114, обосновано условие $(\lambda + 2/3\mu) > 0$). Как мы видим, из Предложения 5 не вытекает возможность определения физически допустимых параметров среды при произвольной матрице V. Дело в том, что их значения в процессе вычисления могут выйти не только за физически допустимые границы, но и обратиться в бесконечность. Заметим также, что заключительное утверждение следствия важно для решения задачи определения параметров среды с заданными начальными условиями по заданному потенциалу. Оно утверждает, что неприятности при определении подходящих начальных значений матрицы G сосредоточены на трехмерном подмножестве четрехмерного пространства.

Доказательство. Доказать требуется, что по данным $\rho_0, \lambda_0, \mu_0, \mu_0'$ можно определить G_0, если выполнены условия; остальное вытекает из Предложения 5.

Очевидно, эти данные определяют матрицу K за исключением коэффициента K_{21}. Рассмотрим эквивалентную (24) линейную однородную относительно G систему четвертого порядка $KG - GV = 0$. Легко видеть, что ее определитель равен $(\det K - \det V)^2$, а ранг либо равен 4, либо не более 2. Матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} K_{11} - V_{11} & -V_{21} & K_{12} & 0 \\ -V_{12} & K_{11} + V_{11} & 0 & K_{12} \\ K_{21} & 0 & -K_{11} - V_{11} & -V_{12} \\ 0 & K_{21} & -V_{12} & -K_{11} + V_{11} \end{pmatrix},$$

если коэффициенты G упорядочить подстановкой $(G_{11}, G_{12}, G_{21}, G_{22})$.

Так как G должна быть обратимой, то определитель должен быть равен нулю, а так как $K_{12}(\lambda_0, \mu_0) \neq 0$, то ранг матрицы равен 2. Из равенства определителей K и V можно определить K_{21}, следовательно, и μ_0'', а g_3 и g_4 в матрице $G_0 = \begin{pmatrix} g_1 \, g_2 \\ g_3 \, g_4 \end{pmatrix}$ выражаются через g_1 и g_2:

$$\begin{aligned} K_{12} \;\; g_3 &= (V_{11} - K_{11}) \;\; g_1 + V_{21} \;\; g_2, \\ K_{12} \;\; g_4 &= V_{12} \;\; g_1 - (K_{11} + V_{11}) \;\; g_2. \end{aligned} \tag{27}$$

Видно, что в уравнениии (25) все величины, кроме R_{11}, в точке x_0 определены. Следовательно, и R_{11} определено; полагая $R_{11}(x_0) = R_0$, получаем для G_0 последнее определяющее уравнение $(G_0 V' G_0^{-1})_{11} = R_0$ или

$$-2V'_{11} g_1 g_2 - V'_{21} g_2^2 + V'_{12} g_1^2 = K_{12} R_0 \det(G_0) \tag{28}$$

при условии, что (используя(27))

$$K_{12} \det G_0 = -2V_{11} g_1 g_2 - V_{21} g_2^2 + V_{12} g_1^2 \neq 0.$$

Дискриминант определенной равенством (28) квадратичной относительно g_1, g_2 формы равен

$$\det(\widetilde{V}') - R_0 (\det \widetilde{V})' + (R_0)^2 \det \widetilde{V}, \tag{29}$$

по условию он положителен при всех R_0, значит уравнение (28) всегда имеет вещественный корень $g_1 : g_2$, и следствие доказано.

Замечание. Условие положительности дискриминанта (29) при всех значениях R_0, очевидно, избыточно. Задачу с данными μ_0, ρ_0, λ_0 можно решить, если это условие не выполнено, но если при этом μ_0', от которого зависит R_0, можно выбрать таким, что дискриминант (29) положителен.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Операторы Q_1 и Q_2 (в виде последовательности преобразований), а также приведение к виду (7) из утверждения 3) Предложения 1, появились впервые в [14]. Там, как и в последующих статьях [15, 20], не было осознано, что возможность осуществления предложенной процедуры эквивалентна факту разложения на множители $P|_{\xi=0}$. Не было также замечено, что альтернативный способ приведения получается операцией транспонирования. Отметим также, что система исходных уравнений в [14, 15], соответствующая нашей формуле (3), содержит неточность в одном из знаков.

Доказательство, вернее говоря, само приведение к виду (7) для случая 1 разд. 4 содержится в работах [22–24], для случая 3 разд. 4 доказана [20] возможность приведения к системе Штурма–Лиувилля. В статьях [14, 15, 20] из семейства эквивалентных матриц K и L в случае 3 разд. 4 выбраны не самые простые, из наших они получаются посредством матричного преобразования Int_H

$$H = \begin{pmatrix} r^{1/2} & 0 \\ \frac{\varkappa r^{-1/2} \nu}{\mu(\lambda+\mu)} & r^{-1/2} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{K} = \mathrm{Int}_H(K), \quad \widetilde{L} = \mathrm{Int}_H(L) - H^{-1} H',$$

кроме того, при их получении допущена неточность, правильный вид члена $\widetilde{K}_{21} = -\widetilde{S}_{11}$, таков:

$$\widetilde{K}_{21} = \varkappa \left[r((\mu^{-1})'' + \omega^2 \frac{\rho}{\mu^2}) - 2\frac{\mu'}{\mu}\frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\nu(3\lambda+5\mu)}{2r\mu(\lambda+\mu)^2} \right].$$

В работе [25] доказана возможность определения ρ и λ по матрице $D(x)$ для плоскослоистой пуассоновой ($\lambda = \mu$) среды.

Теперь отметим те лакуны в нашем исследовании, после заполнения которых оно предстанет как законченная теория или, если угодно, как основы теории упругости слоистых сред трех типов. Законченная лишь в том смысле, что она исчерпывающим образом разрабатывает свой предмет – задачу разделения переменных вплоть до классификации разделившихся уравнений. Конкретные задачи, прямые и обратные, ради которых теория строится, следует, видимо, рассматривать как ее приложения, которые выходят за ее собственные рамки (см., например, [26]). У нас нет сомнений, что принципиальных затруднений решение следующих задач не встретит.

1. Очевидно, необходимо распространить исследование [5] одного отделившегося уравнения Лява на случаи сферической и цилиндрической слоистости.

2. С теоретической точки зрения хорошо было бы доказать (или опровергнуть), что, аналогично доказанному в [2] результату для осесимметричной задачи, разделение пременных в задаче, симметричной относительно сдвигов в некотором направлении, возможно только в случае плоской или цилиндрической слоистости среды.

3. Устремив радиус цилиндра в бесконечность, можно из оператора P (3), взятого в любом из двух цилиндрических случаев, получить оператор P для плоскослоистой среды в постановке задачи, симметричной относительно сдвига. Предельный оператор оказывается формально совпадающим с оператором P случая 1) – плоскослоистой среды и осесимметричной постановки задачи. Это единственный (если верен п. 2) и, вероятно, самый простой оставленный нами без рассмотрения случай.

Заметим еще, что задача о плоском диске [27] сводится к уравнениям случая 4 разд. 4, если вместо λ подставить в эти уравнения $\widehat{\lambda} = 2\mu\lambda\nu^{-1}$.

4. Хотелось бы доказать, что в случае 3 разд. 4 можно решать любые задачи, а не только осесимметричные. Для этого, может быть, нужно найти разделение переменных для задач, симметричных относительно сдвигов по спиралям, т.е. относительно однопараметрической группы $\{t(\varphi+\tau),\ -\infty < t < \infty\}$, где φ – поворот на фиксированный угол вокруг оси цилиндра, а τ – фиксированный сдвиг вдоль нее.

5. И для теории, а особенно для практических расчетов, нужно исследовать, какие неприятности возникают вблизи нуля ξ из-за особенности там операторов Q_1 и Q_2.

6. Видимо, можно доказать, что операторы Q_1 и Q_2 определяются ровно двумя приведенными способами.

Более сложной задачей, но допускающей решение теми же методами, представляется исследование возможности частичного или полного трехмерного разделения переменных. Например, можно взять однопараметрическую группу движений в пространстве, порожденную фиксированным движением (аналогично разд. 4), но не сдвигом и не поворотом – их уже исследовали, и попробовать разделить переменные в задаче, симметричной относительно этой группы. Такие попытки нам не известны.

Вероятно, возможно дальнейшее углубление теории; без сомнения она может быть изложена с использованием языка симметрий [3]; можно вычислить группы и алгебры Ли, отвечающие за каждое предложение; возможно, на этом пути обнаружится скрытая пока причина параллелизма результатов во всех возможных случаях разделения переменных. Для более глубоких и общих результатов, относящихся к слоистым средам, коль скоро они будут получены, эта теория может служить критерием действительности их глубины и общности. Возможно, какие-то цели, поставленные в разд. 1–6, будут достигнуты в результате таких более общих и глубоких рассмотрений.

Благодарности. За полезные обсуждения предмета исследований авторы выражают признательность Б.Г. Букчину и Б.В. Кострову, а также всем участникам семинаров МИТП РАН и ИФЗ им. О.Ю.Шмидта РАН. Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 94-05-16524).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киселев С.Г., Кузнецов А.Н., Маркушевич В.М.* Задача уплощения Земли: происхождение, методы точного решения и разложение в ряд // Наст. сб.
2. *Кузнецов А.Н.* Функция Лагранжа и разделение переменных для упругих колебаний в осесимметричной слоистой среде // Теоретические проблемы геодинамики и сейсмологии. М.: Наука, 1994. С.171-190. (Вычисл. сейсмология; Вып. 27).
3. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 638 с.
4. *Pao Y.-H., Mow C.C.* Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations. N.-Y.: Grane Russak., 1973. 570 p.
5. *Markushevich V.M.* The determination of elastic parameters of a half-space using a monochromatic vibration field at the surface // Wave Motion. 1987. N9. P.37-49.
6. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. Т.1. М.: Мир, 1983. 520 с.
7. *Bhattacharya S.N.* Extention of the Thomson-Haskell method to non-homogeneous spherical layers // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1976. Vol.47. P.411-444.
8. *Biswas N.N., Knopoff L.* Exact earth-flattening calculation for Love waves // Bull. Seism. Soc. Amer. 1970. Vol.60. P.1123-1127.
9. *Гервер М.Л., Каждан Д.А.* Нахождение скоростного разреза по дисперсионной кривой. Вопросы единственности // Некоторые прямые и обратные задачи сейсмологии. М.: Наука, 1968. С.78-94. (Вычисл. сейсмология; Вып. 4).
10. *Biswas N.N.* Earth-flattening procedure for propagation of Rayleigh waves // Pure Appl. Geophys. 1972. Vol.96. P.61-74.
11. *Chapman C.H.* The Earth flattening transformation in body wave theory // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1973. Vol.35. P.55-70.
12. *Лидский В.Б., Нейгауз М.Г.* К методу прогонки в случае самосопряженной системы второго порядка // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1962. Т.2, N1. С.161-165.

13. *Шкадинская Г.В.* Метод расчета поверхностных волн Рэлея в шаре // Алгоритмы интерпретации сейсмических данных. М.: Наука, 1969. С.178-188. (Вычисл. сейсмология; Вып. 5).
14. *Киселев С.Г., Маркушевич В.М.* О разделении переменных в уравнениях для рэлеевских колебаний слоистых сред // ДАН. 1993. Т.332, N3. С.297-300.
15. *Киселев С.Г., Маркушевич В.М.* Рэлеевские колебания слоистых сред как матричная задача Штурма–Лиувилля // ДАН. 1994. Т.335, N1. С.29-31.
16. *Маркушевич В.М., Хенкин Г.М.* Явные формулы для восстановления упругих параметров полупространства по поверхностным волнам Рэлея // Численное моделирование и анализ геофизических процессов. М.: Наука, 1987. С.167-174. (Вычисл. сейсмология; Вып. 20).
17. *Новикова Н.Н., Хенкин Г.М.* О восстановлении оператора Штурма–Лиувилля по характеристикам дискретного спектра // Численное моделирование и анализ геофизических процессов М.: Наука, 1987. С.174-184. (Вычисл. сейсмология; Вып. 20).
18. *Шкадинская Г.В.* Теория и метод расчета поверхностных волн Рэлея в неоднородных средах. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ИФЗ АН СССР, 1970. 189 с.
19. *Левшин А.Л.* Поверхностные и каналовые сейсмические волны. М.: Наука, 1973. 176 с.
20. *Киселев С.Г., Маркушевич В.М., Цемахман А.С.* Матричная задача Штурма–Лиувилля для волн Рэлея в цилиндрически-однородных телах // Геодинамика и прогноз землетрясений. М.: Наука, 1994. С.168-176. (Вычисл. сейсмология; Вып. 26).
21. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.-Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
22. *Маркушевич В.М.* Вынужденные гармонические колебания рэлеевского типа и матричная задача рассеяния // Математические методы в сейсмологии и геодинамике. М.: Наука, 1986. С.119-135. (Вычисл. сейсмология; Вып. 19).
23. *Маркушевич В.М.* Подстановка Пикериса и некоторые спектральные свойства задачи Рэлея // Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука, 1989. С.117-127. (Вычисл. сейсмология; Вып. 22).
24. *Маркушевич В.М.* Представление матричных потенциалов в уравнении для волн Рэлея через симметричную матрицу // Компьютерный анализ геофизических полей М.: Наука, 1990. С.227-234 (Вычисл. сейсмология; Вып. 23).
25. *Маркушевич В.М.* Характеризация матрицы **D** в пуассоновом случае // Теоретические проблемы геодинамики и сейсмологии. М.: Наука, 1994. С.137-144. (Вычисл. сейсмология; Вып. 27).
26. *Beals R., Henkin G., Novikova N.* The inverse boundary problem for the Rayleigh system. J. Mat. Phys. 1995. Vol.36, N12. P.6688-6708.
27. *Снеддон И.Н., Берри Д.С.* Классическая теория упругости. М.: Физматгиз. 1961. 220 с.