

УДК 550.311:517.984.54

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ОТРАЖЕНИЙ НА НЕОДНОРОДНЫЕ СРЕДЫ ПИКЕРИСА

С.Г. Киселев

*Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук*

В статье излагается обобщение метода отражений, используемого для вычисления теоретических сейсмограмм. Для аппроксимации заданной слоистой градиентной среды используются среды Пикериса, содержащие однородные среды как частный случай. Использование неоднородных сред обеспечивает более точную аппроксимацию и позволяет обойтись меньшим количеством аппроксимирующих слоев, что существенно ускоряет вычисление теоретических сейсмограмм.

GENERALIZATION OF THE REFLECTIVITY METHOD FOR INHOMOGENEOUS PEKERIS' MEDIA

S.G. Kiselev

*International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences*

The article describes a generalization of the reflectivity method used for calculation of theoretical seismograms. Pekeris' media containing uniform media as a particular case are used for approximate of a given layered gradient medium. Use of non-uniform media provides more exact approximation and permits to use fewer of layers for the approximation. This considerably accelerates calculation of theoretical seismograms.

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование распространения сейсмических волн позволяет изучать строение Земли, а также источники, излучающие эти волны. Синтез теоретических сейсмограмм является трудоемкой вычислительной задачей, даже если допустить, что свойства среды, в которой распространяются волны, зависят только от глубины. Методы, позволяющие это делать с наибольшей скоростью, представляют значительный интерес. К ним относится метод матричного пропагатора [1], при использовании которого среда обычно моделируется пачкой однородных слоев. Если моделируемая среда содержит участки с резкими изменениями свойств, то для достаточно точной аппроксимации необходимо использовать большое количество слоев. Это с очевидностью приводит к снижению скорости вычислений. При моделировании методом матричного пропагатора с использованием аппроксимации неоднородными слоями [2] предполагалось уменьшить количество аппроксимирующих слоев при сохранении точности вычислений.

Однако методу матричного пропагатора изначально присущ серьезный недостаток, заключающийся в потере точности при высоких частотах и толстых аппроксимирующих слоях [3]. Выражения, используемые при вычислениях этим методом, содержат быстро растущие действительные экспоненциальные функции с показателями, включающими в виде множителей частоту и толщину слоя. В конечном счете, эти экспоненциальные функции взаимно сокращаются и выражения остаются ограниченными, как того требует физический смысл. Но вычисление разности двух больших величин приводит к потере точности. Потеря существенна даже для умеренных с точки зрения практики частот и толщин. Модификация этого метода для неоднородных слоев путем увеличения их толщины делает эту потерю еще более значительной. Таким образом, перейти к меньшему числу более толстых неоднородных слоев практически не удастся.

В данной статье метод отражений, первоначально использованный для однородных слоев [4], обобщается на неоднородные среды. Этот метод имеет непосредственное отношение к методу матричного пропагатора и излагается [4] как его развитие. Иногда для обоих методов используют одно название: метод интегрирования по волновому числу [5]. Имея несколько иную формальную основу, метод отражений совершенно свободен от потери точности в толстых слоях и на высоких частотах.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При вычислении теоретических сейсмограмм методом интегрирования по волновому числу необходимо решить следующую краевую задачу для колебаний Р-SV-типа: найти так называемый 4-мерный вектор движения-напряжения $\mathbf{b}(z) = [U, V, P, S]^T$ (где U и V – трансформанты вертикального и горизонтального смещений, P и S – трансформанты нормального и тангенциального напряжений на полуинтервале $(0 \leq z < \infty)$, z – глубина), который удовлетворяет матричному уравнению

$$\frac{d}{dz}\mathbf{b} = \omega \mathbf{A} \mathbf{b}, \quad (1)$$

граничному условию

$$P(0) = P_0, \quad S(0) = S_0$$

и условию излучения при $z \rightarrow \infty$. Величины P и S могут зависеть от параметров p и ω ($p = \xi/\omega$ – медленность, ω – частота колебаний, ξ – горизонтальная компонента волнового числа рассматриваемой монохроматической волны).

Матрица \mathbf{A} имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & p(1 - 2\beta^2/\alpha^2) & (\rho\alpha^2)^{-1} & 0 \\ -p & 0 & 0 & (\rho\beta^2)^{-1} \\ -\rho & 0 & 0 & p \\ 0 & \rho[\nu p^2 - 1] & -p(1 - 2\beta^2/\alpha^2) & 0 \end{bmatrix},$$

где $\alpha = \alpha(z)$ – скорость продольных, $\beta = \beta(z)$ – поперечных волн, $\rho = \rho(z)$ – плотность среды, $\nu = \nu(z) = 4\beta^2(1 - \beta^2/\alpha^2)$; скорости α и β могут иметь небольшую мнимую часть, моделирующую затухание в среде.

РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ МАТРИЧНОГО ПРОПАГАТОРА

Изложим суть этого метода, следуя в основном его описанию в работе [4]. Пусть $\mathbf{B}(z)$ – фундаментальная матрица системы (1); это квадратная матрица, столбцы которой являются линейно независимыми решениями (1). Из любой фундаментальной матрицы можно сконструировать (см. [4]) матричный пропагатор в виде

$$\mathbf{P}(z, z') = \mathbf{B}(z)\mathbf{B}^{-1}(z').$$

Матричный пропагатор – это фундаментальная матрица, удовлетворяющая условию $\mathbf{P}(z, z') = \mathbf{I}$, где \mathbf{I} – единичная матрица размерности 4×4 . Если известно решение (1) в точке z' , то с помощью пропагатора можно выразить решение в любой точке z в виде

$$\mathbf{b}(z) = \mathbf{P}(z, z')\mathbf{b}(z'). \quad (2)$$

Если среда однородна, т.е. матрица \mathbf{A} не зависит от z , то можно выписать явное выражение для пропагатора в виде

$$\mathbf{P}(z, z') = \exp[\omega(z - z')\mathbf{A}].$$

Матрица \mathbf{A} имеет всегда различные собственные числа $\pm iq_\alpha$, $\pm iq_\beta$, где $q_\alpha = (\alpha^{-2} - p^2)^{1/2}$, $q_\beta = (\beta^{-2} - p^2)^{1/2}$, причем $\text{Im } \omega q_\alpha > 0$, $\text{Im } \omega q_\beta > 0$. Следовательно, матрицу \mathbf{A} всегда можно привести к диагональному виду

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D} = i\Lambda,$$

где

$$\Lambda = \text{diag}[-q_\alpha, -q_\beta, q_\alpha, q_\beta],$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -iq_\alpha & p & iq_\alpha & p \\ p & -iq_\beta & p & iq_\beta \\ \rho(2\beta^2 p^2 - 1) & -2i\rho\beta^2 pq_\beta & \rho(2\beta^2 p^2 - 1) & 2i\rho\beta^2 pq_\beta \\ -2i\rho\beta^2 pq_\alpha & \rho(2\beta^2 p^2 - 1) & 2i\rho\beta^2 pq_\alpha & \rho(2\beta^2 p^2 - 1) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Положим

$$\mathbf{b} = \mathbf{D}\mathbf{v}, \quad (4)$$

тогда \mathbf{v} удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dz}\mathbf{v} = i\omega\Lambda\mathbf{v}, \quad (5)$$

через пропагатор которого

$$\mathbf{Q}(z, z') = \exp[i\omega(z - z')\Lambda] \quad (6)$$

выражается пропагатор уравнения (1):

$$\mathbf{P}(z, z_0) = \mathbf{D}\mathbf{Q}(z, z_0)\mathbf{D}^{-1}. \quad (7)$$

Если среда неоднородна, то выписать явное выражение для пропагатора можно не всегда. Поэтому исследуемую среду необходимо аппроксимировать средой, составленной из n слоев, для которых это сделать возможно. Если обозначить пропагатор j -го слоя через $\mathbf{P}(z_{j-1}, z_j)$, то полный пропагатор n слоев будет

$$\mathbf{P}(z_0, z_n) = \prod_{j=1}^n \mathbf{P}(z_{j-1}, z_j), \quad (8)$$

так как смещения и напряжения $\mathbf{b}(z)$ на границах слоев непрерывны. Свободная поверхность обозначена $z_0 = 0$. Граница самого глубокого слоя z_n . Ниже этой границы среда обычно аппроксимируется однородным полупространством. Решение в полупространстве должно удовлетворять условию излучения. Это решение можно записать, используя (4), в виде

$$\mathbf{v}(z_n) = \mathbf{D}(z_n+)[0, 0, c_P, c_S]^T, \quad (9)$$

где c_P и c_S – неизвестные пока амплитуды нисходящих волн P и S , а амплитуды восходящих волн равны нулю. Такой смысл этим элементам придает выбор линейно независимых столбцов \mathbf{D} в формуле (3). В данном случае "+" в выражении z_n+ означает точку ниже границы z_n , так как матричная функция $\mathbf{D}(z)$ разрывна на границах слоев. Для расчета теоретических сейсмограмм необходимо решение $\mathbf{V}(z)$ на свободной поверхности z_0 . Его можно написать, подставляя (9) в (2), в следующем виде:

$$\mathbf{b}(z_0) \begin{bmatrix} U \\ V \\ P_0 \\ S_0 \end{bmatrix} = \mathbf{P}(z_0, z_n+)\mathbf{D}(z_n+) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_P \\ c_S \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Если в выражении $\mathbf{P}(z_0, z_n+)\mathbf{D}(z_n+)$, которое представляет собой матрицу 4×4 , выделить блок-матрицы 2×2 , то тогда можно избавиться от неизвестных констант c_P и c_S . Обозначим

$$\mathbf{P}(z_0, z_n+)\mathbf{D}(z_n+) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_U & \mathbf{W}_D \\ \mathbf{Y}_U & \mathbf{Y}_D \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где \mathbf{W}_U , \mathbf{W}_D , \mathbf{Y}_U и \mathbf{Y}_D – матрицы размерности 2×2 , тогда из (10) следует

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \mathbf{W}_D[\mathbf{Y}_D]^{-1} \begin{bmatrix} P_0 \\ S_0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Это окончательное выражение позволяет вычислять теоретические сейсмограммы, которые являются двойным преобразованием Фурье функций $U = U(\omega, \xi)$ и $V = V(\omega, \xi)$ по частоте ω и волновому числу ξ .

Однако при аппроксимации однородными слоями сред с быстро меняющимися с глубиной свойствами необходимо слишком большое количество аппроксимирующих слоев.

НЕОДНОРОДНАЯ СРЕДА

Чтобы использовать меньшее количество слоев, можно для аппроксимации использовать неоднородные слои, для которых находится пропагатор в явном виде. Это, например, среды Пикериса [6]. Они, во-первых, являются пуассоновыми, т.е. $\lambda = \mu$, и, во-вторых, их плотность ρ и сдвиговой модуль упругости μ зависят от глубины z следующим образом:

$$\mu(z) = \mu_0 \kappa^2(z), \quad \rho(z) = \rho_0 \kappa^2(z),$$

где $\kappa = [\cos(Rz/2) + \frac{\sigma}{R} \sin(Rz/2)]$, а R и σ – свободные параметры.

Как будет видно из дальнейшего изложения, ограничение $\lambda = \mu$ не принципиально для решаемой задачи, а является лишь частным свойством сред Пикериса.

Коэффициенты уравнения (1) для сред Пикериса являются непостоянными, и непосредственное повторение в этом случае выкладок метода отражений невозможно, в частности не выполнится (5). Однако известно [6], что существует подстановка, сводящая (1) в случае сред Пикериса к уравнению с постоянными коэффициентами. Пусть

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1/\kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\kappa & 0 & 0 \\ -\kappa' \rho_0 \alpha^2 / \omega & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & -\kappa' \rho_0 \beta^2 / \omega & 0 & \kappa \end{bmatrix},$$

где ()' означает $d()/dz$. Непосредственно проверяем, что подстановка $\mathbf{b} = \mathbf{G}\mathbf{w}$ в уравнение (1) приводит его к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\mathbf{w}' = [\omega \mathbf{G}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{G} - \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}'] \mathbf{w} = \omega \mathbf{A}_c \mathbf{w},$$

где

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & p/3 & 1/(3\beta^2 \rho_0) & 0 \\ -p & 0 & 0 & 1/(\beta^2 \rho_0) \\ -\rho_0 (1 + 3\beta^2 R^2 / (4\omega^2)) & 0 & 0 & p \\ 0 & \rho_0 (-1 + \frac{8}{3}\beta^2 p^2 - \beta^2 R^2 / (4\omega^2)) & -p/3 & 0 \end{bmatrix}$$

При $R = 0$ матрица \mathbf{A}_c совпадает с \mathbf{A} . Следовательно, при этом условии можно вместо однородного слоя просто использовать неоднородный, заменяя во всех последующих выражениях матрицу \mathbf{D} матрицей

$$\mathbf{D}_P = \mathbf{G} \mathbf{D},$$

так как подстановка $\mathbf{b} = \mathbf{D}_P \mathbf{v}$ в уравнение (1) в случае сред Пикериса приводит к уравнению (5). Матрица \mathbf{D}_P имеет вид

$$\mathbf{D}_P = \frac{1}{\kappa} \mathbf{D} + \frac{\rho_0 \beta^2 \sigma}{2\omega} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3iq_\alpha & -3p & 3iq_\alpha & -3p \\ -p & iq_\beta & -p & -iq_\beta \end{bmatrix} \quad (13)$$

и при $\sigma = 0$ переходит в \mathbf{D} .

Однако возможность аппроксимировать изучаемую среду более толстыми неоднородными слоями является кажущейся. В самом деле, пропагатор каждого слоя рассчитывается по формуле (7). Когда экспоненциальные функции, входящие в это выражение через (6), становятся действительными при некоторых p , то при больших ω и/или $z - z'$ возникают вычислительные проблемы. Элементы матрицы $\mathbf{Q}(z, z')$ оказываются несоизмеримо велики по сравнению с элементами $\mathbf{P}(z, z')$, причем последние вычисляются как разности первых. Этот недостаток метода матричного пропагатора существен даже при аппроксимации однородными слоями. Применение более толстых неоднородных слоев только усугубляет вычислительные трудности, которые можно разрешить в методе отражений.

РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ОТРАЖЕНИЙ

Основная идея метода отражений состоит в том, чтобы, как и в методе матричного пропагатора, используя решение в подстилающем однородном полупространстве, которое удовлетворяет требуемым граничным условиям, получить решение на поверхности путем последовательного учета слоев, начиная от более глубоких. При этом, в отличие от метода матричного пропагатора, осуществляется не "сшивание" по непрерывности решений в каждом слое, а последовательная (по мере добавления новых, лежащих выше слоев) модификация отражающих и пропускающих свойств лежащей ниже слоистой структуры. Это дает то преимущество, что вместо расчетов $\mathbf{Q}(z, z')$ и $\mathbf{P}(z, z')$ производятся расчеты элементов матричных (размерности 2×2) коэффициентов отражения и прохождения, которые, по определению, не могут быть по модулю больше единицы.

Введем понятия матричных коэффициентов отражения \mathbf{R}_U , \mathbf{R}_D и прохождения \mathbf{T}_U , \mathbf{T}_D и выразим через них элементы пропагатора $\mathbf{Q}(z, z')$.

Определения матричных коэффициентов. Пусть имеется область слоистого пространства, окруженная сверху и снизу однородными полупространствами со свойствами, непрерывными на границах. Нижняя граница находится на глубине z' , верхняя – на глубине z .

Рассмотрим случай падения плоской волны из верхнего полупространства на рассматриваемую область. Обозначим: $\mathbf{b}(z-)$ – решение вблизи z в верхнем полупространстве, $\mathbf{b}(z'+)$ – вблизи z' в нижнем полупространстве. Согласно (2)

$$\mathbf{b}(z-) = \mathbf{P}(z-, z'+)\mathbf{b}(z'+). \quad (14)$$

Используя (4), получим

$$\mathbf{D}(z-)\mathbf{v}(z-) = \mathbf{P}(z-, z'+)\mathbf{D}(z'+)\mathbf{v}(z'+). \quad (15)$$

Обозначив

$$\mathbf{Q}(z-, z'+) = \mathbf{D}^{-1}(z-)\mathbf{P}(z-, z'+)\mathbf{D}(z'+), \quad (16)$$

из (15) получим $\mathbf{v}(z-) = \mathbf{Q}(z-, z'+)\mathbf{v}(z'+)$.

Выделим в $\mathbf{Q}(z-, z'+)$ блок-матрицы 2×2

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_U(z-) \\ \mathbf{v}_D(z-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{UU} & \mathbf{Q}_{UD} \\ \mathbf{Q}_{DU} & \mathbf{Q}_{DD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_U(z'+) \\ \mathbf{v}_D(z'+) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Так как в данном случае волна падает сверху, то в нижнем полупространстве отсутствует восходящая волна, т.е. $\mathbf{v}_U(z'+) = 0$. Тогда (17) примет вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_U(z-) \\ \mathbf{v}_D(z-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{UU} & \mathbf{Q}_{UD} \\ \mathbf{Q}_{DU} & \mathbf{Q}_{DD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_D(z'+) \end{bmatrix},$$

откуда получим

$$\mathbf{v}_U(z-) = \mathbf{Q}_{UD} \mathbf{Q}_{DD}^{-1} \mathbf{v}_D(z-) = \mathbf{R}_D \mathbf{v}_D(z-), \quad (18)$$

$$\mathbf{v}_D(z'+) = \mathbf{Q}_{DD}^{-1} \mathbf{v}_D(z-) = \mathbf{T}_D \mathbf{v}_D(z-). \quad (19)$$

Выражение $\mathbf{Q}_{UD} \mathbf{Q}_{DD}^{-1}$ в формуле (18) называется матрицей отражения \mathbf{R}_D , а выражение \mathbf{Q}_{DD}^{-1} в формуле (19) – матрицей прохождения \mathbf{T}_D . Индекс "D" означает, что рассматривается нисходящее распространение волн. Физический смысл такого определения очевиден: матрица отражения, например, преобразует падающую волну в отраженную.

Случай восходящего распространения волн рассматриваем аналогично и соответствующие коэффициенты определяем следующими выражениями:

$$\mathbf{R}_U = -\mathbf{Q}_{DD}^{-1} \mathbf{Q}_{DU}, \quad \mathbf{T}_U = \mathbf{Q}_{UU} - \mathbf{Q}_{UD} \mathbf{Q}_{DD}^{-1} \mathbf{Q}_{DU}.$$

Непосредственно из определений \mathbf{R}_D , \mathbf{T}_D , \mathbf{R}_U и \mathbf{T}_U нетрудно выразить

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{UU} &= \mathbf{T}_U - \mathbf{R}_D \mathbf{T}_D^{-1} \mathbf{R}_U, & \mathbf{Q}_{UD} &= \mathbf{R}_D \mathbf{T}_D^{-1}, \\ \mathbf{Q}_{DU} &= -\mathbf{T}_D^{-1} \mathbf{R}_U, & \mathbf{Q}_{DD} &= \mathbf{T}_D^{-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Если область содержит лишь границу между однородными полупространствами, матричные коэффициенты отражения и прохождения легко вычислить в явном виде, используя их определения и формулу (16), в которой $\mathbf{P}(z-, z'+)$ становится в этом случае единичной матрицей. Если область толщиной d не содержит никаких слоев, то, очевидно, коэффициенты отражения равны нулю, а коэффициенты прохождения находятся из формулы (6):

$$\mathbf{T}_D = \mathbf{T}_U = \begin{bmatrix} \exp(i\omega d q_\alpha) & 0 \\ 0 & \exp(i\omega d q_\beta) \end{bmatrix} = \mathbf{E}_D.$$

Правило объединения областей. Если область разделена на две подобласти и для каждой из них известны матричные коэффициенты отражения и прохождения, то их можно рассчитать и для всей области. При этом на границе подобластей предполагается непрерывность свойств. Пусть область (z_A, z_C) разделена на две подобласти на уровне z_B . С учетом (8) аналогично (14) имеем

$$\mathbf{b}(z_A-) = \mathbf{P}(z_A-, z_B) \mathbf{P}(z_B, z_C+) \mathbf{b}(z_C+).$$

Снова используя (4) и вставляя между пропагаторами единичную матрицу в виде $\mathbf{D}(z_B)\mathbf{D}^{-1}(z_B)$ (в силу непрерывности свойств в точке z_B можно не указывать, выше или ниже границы подобластей точка, в которой вычисляется матрица), получим выражение

$$\mathbf{D}(z_{A-})\mathbf{v}(z_{A-}) = \mathbf{P}(z_{A-}, z_B)\mathbf{D}(z_B)\mathbf{D}^{-1}(z_B)\mathbf{P}(z_B, z_{C+})\mathbf{D}(z_{C+})\mathbf{v}(z_{C+}),$$

из которого следует

$$\mathbf{Q}(z_{A-}, z_{C+}) = \mathbf{Q}(z_{A-}, z_B)\mathbf{Q}(z_B, z_{C+}).$$

Подставляя для блок-матриц пропагаторов их выражения через коэффициенты отражения и прохождения (20), получим соотношения

$$(\mathbf{T}_D^{AC})^{-1} = (\mathbf{T}_D^{AB})^{-1}[\mathbf{I} - \mathbf{R}_U^{AB}\mathbf{R}_D^{BC}](\mathbf{T}_D^{BC})^{-1},$$

$$\mathbf{R}_D^{AC}(\mathbf{T}_D^{AC})^{-1} = \mathbf{T}_U^{AB}\mathbf{R}_D^{BC}(\mathbf{T}_D^{BC})^{-1} + \mathbf{R}_D^{AB}(\mathbf{T}_D^{AB})^{-1}[\mathbf{I} - \mathbf{R}_U^{AB}\mathbf{R}_D^{BC}](\mathbf{T}_D^{BC})^{-1},$$

$$(\mathbf{T}_D^{AC})^{-1}\mathbf{R}_U^{AC} = (\mathbf{T}_D^{AB})^{-1}\mathbf{R}_U^{AB}\mathbf{T}_U^{BC} + (\mathbf{T}_D^{AB})^{-1}[\mathbf{I} - \mathbf{R}_U^{AB}\mathbf{R}_D^{BC}](\mathbf{T}_D^{BC})^{-1}\mathbf{R}_U^{BC},$$

из которых следуют искомые правила объединения областей

$$\mathbf{T}_D^{AC} = \mathbf{T}_D^{BC}[\mathbf{I} - \mathbf{R}_U^{AB}\mathbf{R}_D^{BC}]^{-1}\mathbf{T}_D^{AB},$$

$$\mathbf{R}_D^{AC} = \mathbf{R}_D^{AB} + \mathbf{T}_U^{AB}\mathbf{R}_D^{BC}[\mathbf{I} - \mathbf{R}_U^{AB}\mathbf{R}_D^{BC}]^{-1}\mathbf{T}_D^{AB},$$

$$\mathbf{T}_U^{AC} = \mathbf{T}_U^{AB}[\mathbf{I} - \mathbf{R}_D^{BC}\mathbf{R}_U^{AB}]^{-1}\mathbf{T}_U^{BC},$$

$$\mathbf{R}_U^{AC} = \mathbf{R}_U^{BC} + \mathbf{T}_D^{BC}\mathbf{R}_U^{AB}[\mathbf{I} - \mathbf{R}_D^{BC}\mathbf{R}_U^{AB}]^{-1}\mathbf{T}_U^{BC}.$$

(21)

Слоистое полупространство. Используя правила объединения подобластей (21), можно рассчитать отражающие и пропускающие свойства всего слоистого полупространства. Если источник и приемник расположены на поверхности, то из четырех матричных коэффициентов потребуется лишь один \mathbf{R}_D – коэффициент отражения всего слоистого полупространства. В самом деле, используя обозначение (16) для $\mathbf{P}(z_0, z_n+)$ в (11), получим

$$\mathbf{D}(z_0)\mathbf{Q}(z_0, z_n+) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_U & \mathbf{W}_D \\ \mathbf{Y}_U & \mathbf{Y}_D \end{bmatrix}.$$

Подставляя в эту формулу (20) и выделяя блок-матрицы у $\mathbf{D}(z_0)$ в виде

$$\mathbf{D}(z_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_U & \mathbf{M}_D \\ \mathbf{N}_U & \mathbf{N}_D \end{bmatrix},$$

получим

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_U & \mathbf{W}_D \\ \mathbf{Y}_U & \mathbf{Y}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_U & \mathbf{M}_D \\ \mathbf{N}_U & \mathbf{N}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_U - \mathbf{R}_D\mathbf{T}_D^{-1}\mathbf{R}_U & \mathbf{R}_D\mathbf{T}_D^{-1} \\ -\mathbf{T}_D^{-1}\mathbf{R}_U & \mathbf{T}_D^{-1} \end{bmatrix},$$

откуда

$$\mathbf{W}_D = (\mathbf{M}_D + \mathbf{M}_U\mathbf{R}_D)\mathbf{T}_D^{-1}, \quad \mathbf{Y}_D = (\mathbf{N}_D + \mathbf{N}_U\mathbf{R}_D)\mathbf{T}_D^{-1}.$$

С учетом этого формула (12) принимает вид

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = (M_D + M_U R_D)(N_D + N_U R_D)^{-1} \begin{bmatrix} P_0 \\ S_0 \end{bmatrix}.$$

Действительно, в нее входит лишь коэффициент отражения всего лежащего ниже слоистого полупространства R_D . Если бы это было однородное полупространство, то, очевидно, $R_D = 0$, так как в нем должны присутствовать только нисходящие волны в соответствии с условиями излучения. Чтобы добавить к нему один однородный слой, необходимо дважды применить правило объединения областей (21): для границы и для части однородного пространства, равной толщине слоя. Все слоистое полупространство рассчитывается последовательным добавлением всех слоев. Причем это могут быть и неоднородные слои Пикериса, так как для них также выведена матрица D (см. формулу (13)).

ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

В качестве примера рассмотрим среду, образованную одним слоем с линейно растущей скоростью и постоянной плотностью, который лежит на однородном полупространстве. Таким слоем удобно моделировать участки с плавно меняющимися свойствами среды. Кроме того, на этом примере удобно сравнить, насколько аппроксимация слоями Пикериса экономит необходимое количество слоев. Для этого осуществим аппроксимацию слоя двумя способами: традиционным при помощи n однородных слоев равной толщины и усовершенствованным при помощи слоев Пикериса также равной толщины. Целью будет сравнение необходимого количества аппроксимирующих слоев при заданной точности вычисления трансформанты смещения. При первом способе аппроксимации плотность аппроксимирующих слоев точно повторяет плотность аппроксимируемого слоя. Во втором способе это условие выполняется для модуля упругости $\mu(z)$, как показано на рис. 1.

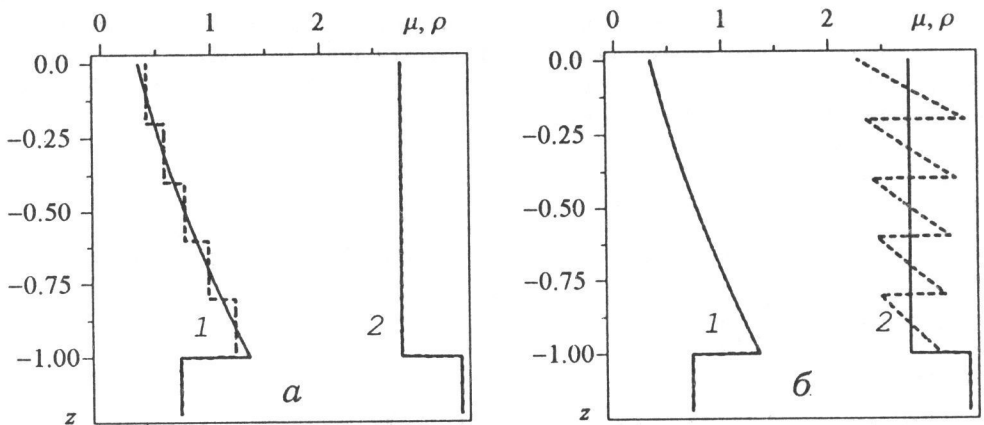


Рис. 1. Два способа аппроксимации заданной среды

a – традиционный, при помощи пяти однородных слоев; b – модифицированный, при помощи пяти слоев Пикериса. Сплошные линии – параметры заданной среды: 1 – модуль сдвига, 2 – плотность; штриховые – то же для аппроксимирующей среды

Результаты расчетов приведены на рис. 2. Видно, что если задаться какой-то фиксированной погрешностью вычисления трансформант смещения, то при аппроксимации слоями Пикериса требуется меньшее количество слоев. Частота и медленность выбраны следующими: $\omega = 0.25$ рад/с, $p = 0.3$ с/км.

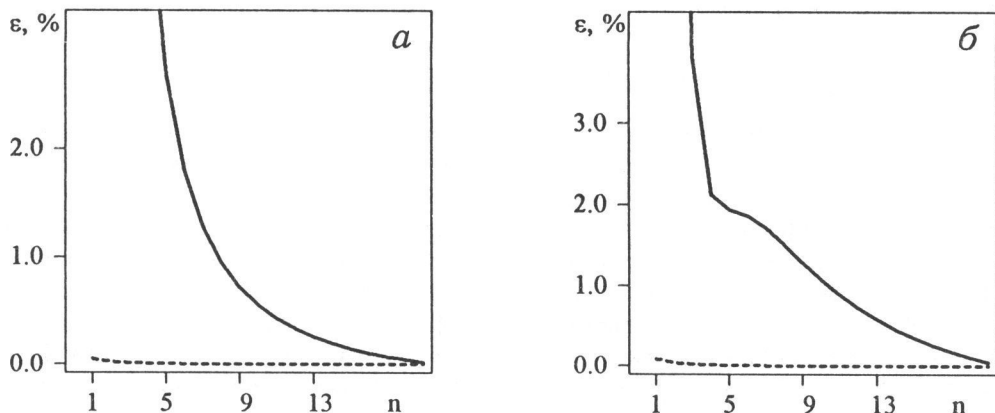


Рис. 2. Сходимость трансформант горизонтального (а) и вертикального (б) смещений при увеличении количества аппроксимирующих слоев

Сплошные линии – аппроксимация однородными слоями, штриховые – слоями Пикериса

Требуемое количество аппроксимирующих слоев будет, естественно, зависеть от этих параметров (рис. 3). Погрешность вычисления трансформант выбрана 1%. Если зафиксировать волновое число ξ и двигаться в сторону уменьшения частоты (вниз по оси), то предел будет соответствовать статической деформации. Видно, что выигрыш в требуемом количестве аппроксимирующих слоев увеличивается.

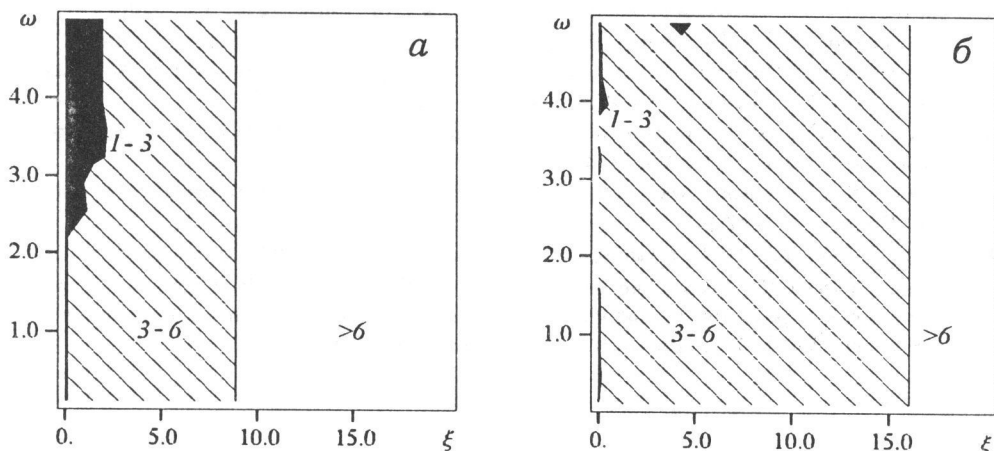


Рис. 3. Эффект уменьшения необходимого числа аппроксимирующих слоев (цифры обозначают величину эффекта уменьшения)

а – горизонтальная, б – вертикальная компонента

Это согласуется с представлением о том, что вблизи статической деформации важнее аппроксимировать более точно модуль упругости, чем плотность, так как при малых частотах и больших волновых числах он имеет большее значение. Рис. 3 показывает, что основной выигрыш в скорости счета получается для горизонтальной компоненты. Общий выигрыш определяется средним по области значений ω и ξ , по которым производится интегрирование.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанный способ позволяет уменьшить требуемое количество аппроксимирующих слоев при заданной погрешности вычисления трансформант смещения и, следовательно, увеличить скорость вычисления теоретических сейсмограмм. Можно также при фиксированной скорости вычисления (и количестве аппроксимирующих слоев) увеличить точность вычислений за счет более аккуратной аппроксимации. Полученный эффект существенно зависит от области частот и волновых чисел, по которой производится интегрирование трансформант смещения. При выбранном способе аппроксимации эффект увеличивается с уменьшением частоты при фиксированном ξ , т.е. при стремлении к статической деформации. Можно предположить, что если более аккуратно аппроксимировать плотность, то эффект будет увеличиваться с ростом частоты. В любом случае описываемый метод предоставляет широкие возможности конструирования различных гибридных способов аппроксимации, имеющих преимущество в той или иной области частот и волновых чисел.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 94-05-16524) и ИНТАС – РФФИ (грант 95-865).

ЛИТЕРАТУРА

1. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. М.: Мир, 1983. Т.1. 520 с.
2. Маркушевич В.М., Стеблов Г.М., Цемазман А.С. Быстрый метод матричного пропагатора в пуассоновом случае // Геодинамика и прогноз землетрясений. М.: Наука, 1994. С.202-211. (Вычисл. сейсмология; Вып. 26).
3. Abo-Zena A. Dispersion function computations for unlimited frequency values // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1979. Vol.58. P.91-105.
4. Kennett B.L.N. Seismic wave propagation in stratified media. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1983. 342 p.
5. Muller G. The reflectivity method: a tutorial // J. Geophys. 1985. Vol.58. P.153-174.
6. Маркушевич В.М. Рэлеевские волны в средах Пикериса. I. Исследование системы уравнений и ее решение // Теоретические проблемы геодинамики и сейсмологии. М.: Наука, 1994. С.145-157. (Вычисл. сейсмология; Вып. 27).