

УДК 517.984.54+519.642

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАДИОЗОНДИРОВАНИЯ ИОНОСФЕРЫ ПРИ НАЛИЧИИ ВОЛНОВОДОВ (ДОЛИН) ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

Э.Н. Бессонова, В.М. Маркушевич, И.В. Савин

*Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук*

А.Л. Агеев, В.В. Васин

*Институт математики и механики
Уральского отделения Российской академии наук*

Рассматривается определение профиля электронной плотности с помощью радиозондирования ионосферы на двух частотах (бистатическое зондирование). Исследуются два случая: источник и приемник находятся на Земле или на спутниках над ионосферой, второй случай называется методом радиозатмения. Если этот профиль содержит зоны с низкой плотностью, т.е. волноводы (или "долины"), то стандартный метод определения профиля электронной плотности по данным радиозондирования неприменим. При зондировании ионосферы с Земли эта задача, известная как *задача долин*, решается с помощью методов, развитых в сейсмологии, и с помощью закона дисперсии радиоволн – а именно, закона Эпплтона–Хартри. При зондировании со спутников применяется преобразование "уплощения Земли", чтобы показать, что при достаточно высокой частоте зондирования ионосфера не содержит волноводов. Однако высокочастотные радиоволны мало чувствительны к электронной плотности, поэтому эта обратная задача требует более тщательного изучения.

RADIO SOUNDING IN THE IONOSPHERE IN THE PRESENCE OF WAVEGUIDES OR VALLEYS: UNIQUENESS OF INVERSION

E.N. Bessonova, V.M. Markushevich, I.V. Savin

*International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences*

A.L. Ageev, V.V. Vassin

*Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Division, Russian Academy of Sciences*

The paper deals with determination of the electronic density profile by radio sounding ionosphere at two fixed frequencies (bistatic radio sounding). Two cases are considered: of the source and receiver are both on the ground and, conversely, when both of them are on

satellites above the ionosphere; the latter case is called the radio occultation method. If the profile has low density zones, that is, waveguides (or valleys), then the standard method of inversion of radio sounding data to determine the electronic density profile can not be used. When ionosphere is sounded from the ground, this problem, known as the valley problem, is solved in this paper by combining a technique developed in seismology and the dispersion law for radio waves, namely, the Appleton-Hartree law. For sounding from satellites, the "Earth flattening" transformation is applied to show that for sufficiently high radio frequency there is no waveguide in the ionosphere. On the other hand, high frequency radio waves are rather insensitive to the electronic density, so the inverse problem for radio occultation needs to be considered more carefully.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является продолжением исследования, со времени публикации которого прошло около 15 лет [1]. За это время атмосфера Земли (и в частности, ионосфера) изучалась как снизу – с поверхности Земли, так и сверху – со спутников, однако со временем зондирование со спутников, или метод радиозатмения [2], начинает играть все большую роль.

Мы рассмотрим обратные математические задачи, возникающие как при радиозондировании ионосферы с поверхности Земли, так и при радиозатмении спутников. Будем считать, что источник излучает монохроматические сигналы, иногда существенно, чтобы сигнал одновременно излучался на двух и более частотах. Предположим также, что этот сигнал зарегистрирован на той же высоте, где находится источник, и на некотором множестве расстояний от него. Очевидно, что на самом деле достаточно, чтобы и источник, и все приемники находились либо ниже ионосферы (ниже 100 км), либо выше нее (выше 3000 км). Очевидно также, что расстояние между источником и приемником должно быть таким, чтобы их можно было соединить радиолучом. В противном случае принято говорить, что приемник находится в радиотени по отношению к источнику. На основе этих данных требуется определить профиль электронной концентрации, которая считается зависящей только от высоты (этот профиль нужен для прогноза распространения радиоволн); мы допускаем что на некоторых участках концентрация может падать с высотой [3-5]. Отслеживание суточных колебаний электронной концентрации может позволить определять концентрацию озона в озоновом слое с помощью "озоновой тени". Другим важным приложением радиопросвечивания может стать определение концентрации воды на разных высотах [2]. Дополненные аэрофото-снимками облаков со спутников, такие данные могут улучшить прогноз погоды.

При радиозатмении спутников обратим особое внимание на преобразование уплощения, т.е. переход от сферической геометрии к плоской. При зондировании снизу ионосфера может считаться плоской средой, так как ее толщина до главного максимума составляет около 250 км, а частоты радиосигнала сравнительно невысоки: около 1 МГц. При радиозатмении же используется частота порядка 100–1000 МГц и сигнал пронизывает всю толщу атмосферы, которая равна приблизительно 3000 км. Поэтому полезно ввести плоскую среду, которая эквивалентна заданной сферической в том смысле, что радиолучи в этих двух средах связаны простым преобразованием, а продолжительность распространения сигнала вдоль любого луча и его образа одинакова, т.е. применить преобразование уплощения. Это преобразование описано при исследовании лучевых задач в сейсмике [6], но еще

раньше оно было использовано в ионосферных задачах [7]. Тем не менее, во многих книгах по зондированию ионосферы (например, в [4]), задача рассматривается в сферических координатах, что значительно усложняет формулы. Помимо упрощения аналитических выражений, преобразование уплощения показывает, что при достаточно высокой частоте самая низкая точка радиолуча может находиться на любом расстоянии от Земли (но, конечно, меньшем, чем высота излучающего спутника). Отличительной особенностью волновода является отсутствие внутри него точек поворота лучей, источник которых расположен вне волновода. Таким образом, при достаточно высокой частоте волноводы в сферически-симметричной ионосфере исчезают. Это свойство и используется для преодоления сложностей, возникающих при радиозатмении из-за присутствия долин.

Два десятилетия тому назад было замечено [8], что обратная задача радиозондирования ионосферы имеет много общего с обратной задачей геометрической сейсмологии, или кинематической обратной задачей сейсмологии. Методы, развитые в сейсмологии [8], были предложены для обработки данных радиозондирования. Однако эти методы применимы только к средам с монотонным изменением скорости, т.е. не содержащим волноводов (в сейсмической терминологии), или долин (в ионосферной терминологии). Однако волноводы есть как в Земле, так и в ионосфере. Решение обратной кинематической задачи для сред с волноводами было получено [6], оно оказалось неединственным. Техника решения задачи [6] была частично использована в работе [1], а именно, свойство, которое характерно только для радиоволн, т.е. зависимость фазовой скорости волны от частоты. Эта зависимость, называемая дисперсией, описывается законом Эпплтона-Хартри [3].

Мы исследовали решение обратной задачи радиозондирования ионосферы, основанное на методе, описанном в [6], и дисперсии радиоволн. Далеко не все возникшие при этом математические задачи удалось решить. Формулировки некоторых нерешенных задач приведены в заключении.

1. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРЯМОЙ ЛУЧЕВОЙ ЗАДАЧИ В ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим радиозондирование ионосферы с поверхности Земли. Ионосфера при этом считается горизонтально-однородной средой, в которой скорость распространения радиоволны зависит только от высоты.

Луч в такой среде является кривой, симметричной относительно вертикали, проходящей через самую высокую точку этой кривой. Это утверждение легко доказать для изотропной горизонтально-слоистой неоднородной среды. Оно обычно принимается на веру, а между тем для анизотропной среды оно может быть неверным [9]. С учетом воздействия магнитного поля ионосфера анизотропна, так как скорость вдоль луча зависит от угла между ним и вектором напряженности магнитного поля. Кроме того, скорость зависит от взаимного расположения плоскости поляризации волны и магнитного поля Земли. Если эта плоскость перпендикулярна вектору напряженности магнитного поля, то луч называется обыкновенным, если она содержит этот вектор, то – необыкновенным.

Сложности, возникающие при решении обратной задачи, можно преодолеть нашим методом по данным о различном распространении этих лучей. Как и в большинстве трудов по прохождению радиоволн в ионосфере [4, 5], допустим, что

радиолуч распространяется в изотропной среде и является плоской симметричной кривой, а скорость его распространения зависит от угла между лучом и вектором напряженности магнитного поля, а также от положения плоскости поляризации электромагнитных колебаний; магнитное поле считается постоянным. Более того, рассмотрим только лучи в плоскости магнитного поля или перпендикулярные к нему. Общий случай произвольного распространения сигнала остается за рамками этой статьи.

Распространяющийся в изотропной среде луч удовлетворяет закону Снеллиуса. Сформулируем этот закон. Пусть $u(y)$ – скорость в среде (здесь y – высота); допустим, что $u(0) = 1$, что всегда может быть обеспечено соответствующей нормировкой, а именно: таким изменением единицы скорости и одновременным изменением единицы длины, при котором время распространения сигнала не изменяется.

Обозначим угол между восходящей ветвью луча и вертикалью через $\alpha(y)$, расстояние вдоль поверхности плоской Земли через x (рис. 1). (Соответствующие линейные величины, нормированные на скорость света в вакууме, обозначены прописными буквами.)

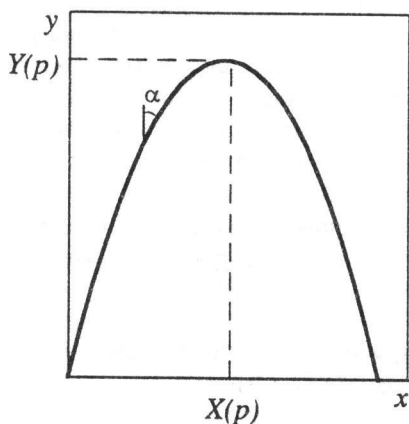


Рис. 1. Схема луча в градиентной среде

Введем лучевой параметр p : $p = \sin \alpha(0)$. Тогда закон Снеллиуса будет иметь вид $\sin \alpha(y) = pu(y)$.

Отсюда получаем (ср. с [6]) формулы для $X(p)$ – половины расстояния вдоль поверхности от источника до точки возвращения луча на Землю и для $T(p)$ – половины времени движения радиоимпульса вдоль луча с лучевым параметром p :

$$X(p) = \int_0^{Y(p)} \frac{p dy}{\sqrt{n^2(y) - p^2}},$$

$$T(p) = \int_0^{Y(p)} \frac{n^2(y) dy}{\sqrt{n^2(y) - p^2}},$$

$$p \in (0, 1),$$

где $n(y) = 1/u(y)$ – коэффициент преломления, $Y(p)$ – высота вершины луча с параметром p .

Функция $Y(p)$ связана с $n(y)$ формулой

$$Y(p) = \inf\{y : n(y) < p\}.$$

Допустим, что функция $n(y)$ имеет вид, показанный на рис. 2, а. Негоризонтальные участки кривой на рис. 2, б, являющиеся частью кривой рис. 2, а, определяют функцию $u(y)$, взаимно обратную с $Y(p)$.

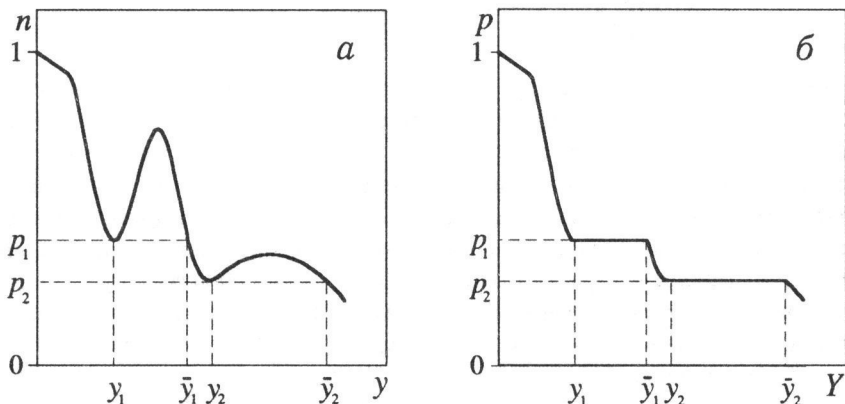


Рис. 2. Коэффициент преломления n как функция высоты y (а) и $p = u(y)$ – функция, обратная к $Y(p)$ (б)

При значениях p_1 и p_2 эта функция терпит разрыв; величина скачка (y_1, \bar{y}_1) определяет первый волновод, (y_2, \bar{y}_2) – второй волновод. Если бы мы строили график скорости $u(y)$, а не коэффициента преломления, то волноводы (y_i, \bar{y}_i) , $i = 1, 2$, имели бы на графике вид долин.

2. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЛУЧЕВОЙ ЗАДАЧИ

В обратной задаче функции $X(p)$ и $T(p)$ считаются заданными при $p \in (0, 1)$, а требуется определить коэффициент преломления $n(y)$, $0 \leq y < \infty$.

Справедливо следующее соотношение [6]:

$$Y(p) = \Phi(p) + \Psi(p), \tag{1}$$

где

$$\Phi(p) = \frac{2}{\pi} \int_p^1 \frac{X(q) dq}{\sqrt{q^2 - p^2}}, \quad \Psi(p) = \sum A_i(p), \tag{2}$$

$$A_i(p) = \begin{cases} 0, & p > p_i, \\ \frac{2}{\pi} \int_{y_i}^{\bar{y}_i} \arctg \sqrt{\frac{n^2(y) - p_i^2}{p_i^2 - p^2}} dy, & p \leq p_i. \end{cases} \tag{3}$$

Перепишем (3) в более удобном виде, введя функции

$$F_i(r) = \text{mes}\{y : y \in (y_i, \bar{y}_i), n(y) \leq r\}, \quad r \in [p_i, 1). \quad (4)$$

Получим

$$A_i(p) = \begin{cases} 0, & p > p_i, \\ \frac{2}{\pi} \int_{p_i}^1 \arctg \sqrt{\frac{r^2 - p_i^2}{p_i^2 - p^2}} dF_i(r), & p \leq p_i. \end{cases} \quad (5)$$

Из (1)–(5) следует, что при $p \in (1, p_1)$ $Y(p)$ определяется по $X(p)$ единственным образом, а следовательно (см. рис. 2), коэффициент преломления $n(y)$ определяется единственным образом на интервале $[0, y_1]$. Если бы коэффициент преломления $n(y)$ был известен в первом волноводе, т.е. при $y \in (y_1, \bar{y}_1)$, то по формуле (1) его можно было определить на интервале $[\bar{y}_1, y_2]$ между первым и вторым волноводами.

Однако в обычной ситуации в сейсмологии коэффициент преломления в волноводах не известен. Доказано [6], что в этом случае решение обратной лучевой задачи становится неединственным. Первоначальное описание множества решений [6] затем уточнялось во многих работах (см., например, [10]). Последние результаты получены совсем недавно [11].

Тем удивительнее, что при радиозондировании ионосферы возникает совершенно другой способ уменьшения неединственности решения обратной лучевой задачи, не имеющий аналога в сейсмологии. Он связан с законом Эпплтона–Хартри [3], который определяет коэффициент преломления как функцию электронной концентрации в ионосфере и частоты ω радиосигнала. Эта зависимость имеет монотонный характер, по крайней мере в большом диапазоне частот. Оказывается, что использование этого закона и монотонного характера зависимости коэффициента преломления от электронной концентрации позволяет определить коэффициент преломления вне волноводов и функции $F_i(r)$ в каждом из них единственным образом. Для этого нам потребуется функция $X(p)$ на двух частотах. Время распространения радиосигнала $T(p)$ не участвует непосредственно в решении обратной задачи. Однако это время нужно для определения лучевого параметра p (см. [6]) в том случае, если для этого не используются другие способы, например доплеровский сдвиг частоты из-за быстрого перемещения приемника.

Перейдем к изложению способа решения обратной задачи по данным зондирования на двух частотах. (Содержание разд. 3 совпадает с частью статьи [1].)

3. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПО ДАННЫМ ВИСТАТИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТОЙ ИОНОСФЕРЫ

Итак, пусть горизонтально-однородная, но изменяющаяся с высотой ионосфера зондируется радиоволнами на двух частотах с поверхности Земли; сферичностью Земли пренебрегаем.

Допустим, что

$$n = n(\omega, f(y)), \quad f(y) > 0 \quad (6)$$

и $n(\omega, f)$ – монотонно возрастающая функция f (ω – круговая частота).

Тогда справедливы следующие предложения.

Предложение 1. Функции

$$Y_\omega(p) = \inf\{y : p > n(\omega, f(y))\},$$

$$Y_f(p) = \inf\{y : p > f(y)\}$$

связаны соотношением

$$Y_\omega(n(\omega, s)) = Y_f(s), \tag{7}$$

и, следовательно, $Y_\omega(n(\omega, s))$ как функция от s не зависит от ω .

Доказательство. Так как $n(\omega, f)$ монотонно возрастает по f , то

$$Y_\omega(n(\omega, s)) = \inf\{y : n(\omega, s) > n(\omega, f(y))\} = \inf\{y : s > f(y)\} = Y_f(s).$$

Следствие. Количество скачков и величина каждого скачка функции $Y_\omega(n(\omega, s))$ не зависят от ω .

Воспользовавшись счетностью множества точек разрыва монотонной функции, обозначим через s_k ($k = 1, 2, \dots$) множество точек разрыва функции $Y_f(s)$. Тогда $y_k = \lim_{s \rightarrow s_k + 0} Y_\omega(n(\omega, s))$, $\bar{y}_k = \lim_{s \rightarrow s_k - 0} Y_\omega(n(\omega, s))$ не зависят от ω .

Предложение 2. Функции

$$F_{k,\omega}(r) = \text{mes}\{y : y \in (y_k, \bar{y}_k), n(\omega, f(y)) \leq r\},$$

$$F_{k,f}(r) = \text{mes}\{y : y \in (y_k, \bar{y}_k), f(y) \leq r\}$$

удовлетворяют соотношению

$$F_{k,\omega}(n(\omega, s)) = F_{k,f}(s).$$

Доказательство.

$$F_{k,\omega}(n(\omega, s)) = \text{mes}\{y : y \in (y_k, \bar{y}_k), n(\omega, f(y)) \leq n(\omega, s)\} =$$

$$= \text{mes}\{y : y \in (y_k, \bar{y}_k), f(y) \leq s\} = F_{k,f}(s).$$

Следствие. Функции $F_{k,\omega}(n(\omega, s))$ как функции от s не зависят от ω .

С помощью установленных в Предложениях 1 и 2 свойств выведем уравнение, которое позволит (при некотором дополнительном предположении) определять последовательно электронную концентрацию до первого волновода, функцию меры в первом волноводе, концентрацию электронов между первым и вторым волноводами, функцию меры во втором волноводе и т.д. Исходными данными при этом являются функции $X_{\omega_i}(p)$, $i = 1, 2, \dots$ на двух частотах зондирования. Способ определения этих функций хорошо отработан в экспериментах по радиозатмиению [2], параметр p при этом определяется по доплеровскому сдвигу частоты. Дополнительное предположение состоит в том, что ядро уравнения Фредгольма 1-го рода, в котором неизвестной является функция меры, замкнуто для необыкновенного луча, перпендикулярного магнитному полю. Пока мы не умеем доказывать это утверждение теоретически; тем более невозможно это сделать, по-видимому, для ядер, заданных с погрешностью в дискретном числе точек. Но разработанная методика [12] (см. также [13]) позволяет надежно численно решать упомянутую

проблему именно в этой ситуации. Однако мы надеемся, что утверждение о замкнутости ядра верно, так как нетривиальные (ненулевые) незамкнутые ядра, по нашему мнению, являются очень специальным классом. В остальных случаях при распространении радиосигнала, которые мы здесь рассматриваем, а именно: для обыкновенного и необыкновенного лучей, параллельных магнитному полю, и для обыкновенного луча, перпендикулярного этому полю, ядро оказывается тривиальным; поэтому функция меры в этих случаях не определяется.

Вывод основного уравнения. Рассмотрим уравнение (1) для двух частот:

$$Y_{\omega_i}(n(\omega_i, s)) = \Phi_{\omega_i}(n(\omega_i, s)) + \Psi_{\omega_i}(n(\omega_i, s)), \quad i = 1, 2.$$

Здесь $\Phi_{\omega_i}(p)$ определяются формулой (2) по $X_{\omega_i}(p)$, т.е. по сигналу на соответствующей частоте.

С помощью (7) получаем

$$\begin{aligned} \Phi_{\omega_1}(n(\omega_1, s)) + \Psi_{\omega_1}(n(\omega_1, s)) - \Phi_{\omega_2}(n(\omega_2, s)) - \Psi_{\omega_2}(n(\omega_2, s)) = \\ = Y_{\omega_1}(n(\omega_1, s)) - Y_{\omega_2}(n(\omega_2, s)) = 0 \end{aligned}$$

или

$$\Psi_{\omega_1}(n(\omega_1, s)) - \Psi_{\omega_2}(n(\omega_2, s)) = \Phi_{\omega_2}(n(\omega_2, s)) - \Phi_{\omega_1}(n(\omega_1, s)). \quad (8)$$

В правой части (8) стоит функция, которая вычисляется по данным радиозондирования. Положим

$$\Phi_{\omega_2}(n(\omega_2, s)) - \Phi_{\omega_1}(n(\omega_1, s)) = U(s).$$

С помощью (2) и (3) и следствий из предложений 1 и 2 уравнение (8) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \sum_{i, s_i \geq s} \int_{y_i}^{\bar{y}_i} \left[\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{n^2(\omega_1, f(y)) - n^2(\omega_1, s_i)}{n^2(\omega_1, s_i) - n^2(\omega_1, s)}} - \right. \\ \left. - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{n^2(\omega_1, f(y)) - n^2(\omega_1, s_i)}{n^2(\omega_1, s_i) - n^2(\omega_1, s)}} \right] dy = U(s). \end{aligned}$$

Вводя $F_{i, \omega_k}(r)$ ($k = 1, 2$), преобразуем это уравнение к виду

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \sum_{i, s_i \geq s} \left[\int_{n(\omega_1, s_i)}^1 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r^2 - n^2(\omega_1, s_i)}{n^2(\omega_2, s_i) - n^2(\omega_2, s)}} dF_{i, \omega_1}(r) - \right. \\ \left. - \int_{n(\omega_1, s_i)}^1 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r^2 - n^2(\omega_2, s_i)}{n^2(\omega_2, s_i) - n^2(\omega_2, s)}} dF_{i, \omega_2}(r) \right] = U(s). \end{aligned}$$

Воспользовавшись строгой монотонностью функции $n(\omega_1, f(y))$ по переменной f , можно определить коэффициент преломления $n_2(y) = n(\omega_2, f(y))$ как функцию от $n_1(y) = n(\omega_1, f(y))$, т.е. ввести функцию $n_2 = g(n_1)$.

Заменяв переменную s на p при помощи соотношения $n(\omega_1, s) = p$, получим

$$\frac{2}{\pi} \sum_{i, p_i \geq p} \left[\int_{p_i}^1 \arctg \sqrt{\frac{r^2 - p_i^2}{p_i^2 - p^2}} dF_{i, \omega_1}(r) - \int_{g(p_i)}^1 \arctg \sqrt{\frac{r^2 - g^2(p_i)}{g^2(p_i) - g^2(p)}} dF_{i, \omega_2}(r) \right] =$$

$$= U(s(p)) = U_1(p). \quad (9)$$

Из Предложения 2 следует, что

$$F_{i, \omega_2}(g(p)) = F_{i, \omega_1}(p).$$

Поэтому, полагая во втором интеграле (9) $r = g(q)$, получаем, в силу этой связи между функциями меры,

$$\frac{2}{\pi} \sum_{i, p_i \geq p} \int_{p_i}^1 \left[\arctg \sqrt{\frac{r^2 - p_i^2}{p_i^2 - p^2}} - \arctg \sqrt{\frac{g^2(r) - g^2(p_i)}{g^2(p_i) - g^2(p)}} \right] dF_{i, \omega_1}(r) = U_1(p),$$

где во втором интеграле мы снова для единообразия возвратились от q к переменной r .

Умножив обе части предыдущего выражения на $\pi/2$ и обозначив $R(p) = (\pi/2)U_1(p)$, получим

$$\sum_{i, p_i \geq p} \int_{p_i}^1 \left[\arctg \sqrt{\frac{r^2 - p_i^2}{p_i^2 - p^2}} - \arctg \sqrt{\frac{g^2(r) - g^2(p_i)}{g^2(p_i) - g^2(p)}} \right] dF_{i, \omega_1}(r) = R(p), \quad p \in (0, 1). \quad (10)$$

Если допустить, что ядро уравнения (10) замкнуто, то с помощью этого уравнения и соотношений (1)–(5) можно последовательно определять функцию меры $F_n(r)$ с номером n и коэффициент преломления между n -м и $(n+1)$ -м волноводами ($n = 1, 2, \dots$), при этом коэффициент преломления до первого волновода определяется формулой (1), так как $\Psi(p) \equiv 0$ при $p \in (p_1, 1)$.

Свойства ядра уравнения (10) зависят от функции $g^2(p)$, которую в подразд. 4.1 мы получим с помощью закона Эпплтона–Хартри.

4. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПРЕЛОМЛЕНИЯ НА РАЗНЫХ ЧАСТОТАХ

Уравнение Эпплтона–Хартри в наиболее простом (но все еще интересном для нас) случае, когда учитывается влияние магнитного поля, а поглощение не принимается во внимание, выглядит так [3] (все величины заданы в системе CGS):

$$n^2 = 1 + \frac{1}{\beta - \frac{\gamma_T^2}{2(1+\beta)} \pm \sqrt{\frac{\gamma_T^4}{4(1+\beta)^2} + \gamma_L^2}}. \quad (11)$$

Здесь $\beta = -\omega^2/\omega_0^2$, где ω – угловая частота волны ($\omega = 2\pi f$, f – линейная частота волны); ω_0 – плазменная частота; $\omega_0^2 = 4\pi N_e e^2/m$, где N_e – электронная концентрация, e , m – заряд и масса электрона;

$$\begin{aligned}(\gamma, \gamma_L, \gamma_T) &= (\omega_H, \omega_L, \omega_T)\omega/\omega_0^2; \\ (\omega_H, \omega_L, \omega_T) &= (H, H_L, H_T)e/mc,\end{aligned}$$

где H , H_L и H_T – напряженность магнитного поля в гауссах и ее составляющие вдоль и поперек направления распространения, c – скорость света в вакууме.

Рассмотрим несколько частных случаев.

4.1. Магнитное поле отсутствует (случай Эклса–Лармора). Если $\gamma_T = \gamma_L = 0$, то

$$n^2 = 1 - \omega_0^2/\omega^2.$$

Обозначив $f(y) = -\omega_0^2$, получим

$$n^2 = 1 + \omega^{-2}f(y).$$

Эта функция удовлетворяет основному условию (6), т.е. монотонно возрастает с ростом $f(y)$. Найдем функцию $n_2 = g(n_1)$.

Так как

$$\omega_1^2(n_1^2 - 1) = \omega_2^2(n_2^2 - 1),$$

то

$$n_2^2 = g^2(n_1) = (\omega_1^2/\omega_2^2)n_1^2 + (\omega_1^2/\omega_2^2 + 1).$$

Следовательно, $g^2(x)$ оказывается линейной функцией относительно x^2 , поэтому ядро уравнения (10) нулевое и, следовательно, функции $F_{i,\omega}(r)$ найти нельзя.

4.2. Распространение радиосигнала вдоль магнитного поля. В этом случае

$$n^2 = 1 + \frac{1}{-\omega/\omega_0^2 \pm \omega\omega_L/\omega_0^2} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega \mp \omega_L)}.$$

Снова введем $f(y) = -\omega_0^2$, и пусть

$$\omega \neq \omega_L.$$

Тогда функция

$$n^2 = 1 + \frac{f(y)}{\omega(\omega \mp \omega_L)}$$

будет удовлетворять основному условию (6). Найдем функцию $n_2 = g(n_1)$.

Исключая $f(y)$ из уравнений

$$n_i^2 - 1 = \frac{f(y)}{\omega_i(\omega_i \mp \omega_L)}, \quad i = 1, 2,$$

снова получаем зависимость вида $n_2^2 = kn_1^2 + l$ (где k, l – константы), для которой ядро уравнения (10) нулевое.

4.3. Распространение радиосигнала поперек магнитного поля. В этом случае γ_L в формуле (11) равно нулю, поэтому если в этой формуле выбрать знак минус, то она совпадет с соответствующим выражением, которое получится в том случае, если магнитное поле отсутствует, и, следовательно, снова ядро уравнения (10) оказывается нулевым. Знак минус соответствует обыкновенному лучу.

Для необыкновенного луча в формуле (11) нужно выбрать знак плюс. Тогда

$$n^2 = 1 + \left(-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - \frac{\omega_T^2 \omega^2 / \omega_0^4}{1 - \omega^2 / \omega_0^2} \right)^{-1} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{\omega_T^2}{\omega^2 - \omega_0^2 - \omega_T^2} \right).$$

Считая, что $\omega^2 > \omega_0^2 + \omega_T^2$, и положив $f(y) = -\omega_0^2$, т.е.

$$n^2 = 1 + \frac{f(y)}{\omega^2} \left(1 + \frac{\omega_T^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + f(y)} \right), \quad (12)$$

получим, что эта функция – монотонно возрастающая по f .

Найдем теперь $n_2 = g(n_1)$. Для этого перепишем (12) в виде

$$n^2 = \frac{W^2 - \omega_T^2}{\omega W - \omega_T^2}, \quad (13)$$

где

$$W = \frac{\omega^2 + f}{\omega}. \quad (14)$$

Выписывая, как и в предшествующих случаях, уравнение (13) для частот ω_1 и ω_2 , при которых коэффициенты преломления обозначаются n_1 и n_2 , а вспомогательные функции W_1 и W_2 , соответственно получаем

$$W_1 = \frac{\omega_1 n_1^2}{2} + \sqrt{\frac{\omega_1^2 n_1^4}{4} - (n_1^2 - 1)\omega_T^2}, \quad (15)$$

$$W_2 = \frac{\omega_2^2 + f}{\omega_2} = \frac{\omega_2^2 + \omega_1(W_1 - \omega_1)}{\omega_2}.$$

В первой формуле (15) перед корнем выбран знак плюс, так как при $n_1 \rightarrow 0$ функция $W_1 \rightarrow \omega_T$.

Ядро уравнения (10) с функцией $n_2 = g(n_1)$, заданной (15), уже не равно тождественно нулю. В следующих статьях мы предполагаем теоретически исследовать свойства этого ядра и постараемся доказать его замкнутость, а подробный численный анализ этого интегрального уравнения дан в [13].

5. МЕТОД РАДИОЗАТМЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УПЛОЩЕНИЯ

Перейдем теперь к зондированию ионосферы сверху, со спутников. Пусть один из спутников излучает монохроматическую радиоволну. Удобно, хотя и совершенно не обязательно, считать этот спутник геостационарным. Второй спутник принимает сигнал и, вращаясь вокруг Земли, оказывается заслоненным от первого спутника сначала атмосферой, а затем и телом Земли. Будем считать, хотя это и

не обязательно, что орбита второго спутника располагается выше условной верхней границы ионосферы (высота, на которой расположена эта граница, обычно принимается равной 3000 км) (рис. 3).



Рис. 3. Схема радиозатмения
1 – источник излучения, 2 – приемник

Для описания распространения радиосигнала при такой схеме радиозондирования удобно сначала вернуться к плоскостной среде (которую мы рассматривали в предыдущих разделах). Для этого применим преобразование уплощения [6]

$$\begin{aligned} x &= \frac{R}{v(R)} \Theta, \\ y &= \frac{R}{v(R)} \ln \frac{R}{r}, \\ u(y) &= \frac{v(r)}{r} \frac{R}{v(R)}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $v(r)$ – скорость радиосигнала, R – радиус сферы, на поверхности которой расположены источник и приемник радиосигналов, Θ – угловое расстояние в радианах, $u(y)$ – скорость волн в плоской модели.

Это преобразование осуществляет конформное отображение круга на полуплоскость и обеспечивает одинаковое время движения радиоволны вдоль луча в круге и вдоль его образа в полуплоскости. Кроме того, скорость в полуплоскости нормируется так, чтобы $u(0) = 1$. Для того чтобы время движения по лучу при этом осталось прежним, соответственно изменяются масштабы по осям x и y . Под временем движения мы понимаем длину луча, деленную на фазовую скорость.

В применении к ионосфере преобразование уплощения позволяет понять важное свойство метода радиозатмения. Оно состоит в том, что с ростом частоты радиосигнала волноводы в ионосфере уменьшаются и, если градиент скорости конечен, исчезают полностью при достаточно высокой частоте, а при бесконечном градиенте становятся столь узкими, что практически исчезают.

Действительно, справедливо

Предложение 3. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует Ω такое, что при любом $\omega > \Omega$ коэффициент преломления (13) отличается от 1 меньше, чем на ε .

Доказательство. Подставляя (14) в (13), получим

$$n^2 = \frac{W^2 - \omega_T^2}{\omega W - \omega_T^2} = 1 + \frac{f}{\omega^2} \left(1 + \frac{(\omega_T/\omega)^2}{1 + f/\omega^2 - (\omega_T/\omega)^2} \right). \quad (17)$$

Пусть $|\Omega^{-2} \sup_{y \in I} f(y)| < \alpha$ и $\Omega^{-2} \omega_T^2 < \alpha$, где интервал I является слоем, в который отображилась атмосфера при уплощении. Тогда из (17) следует, что

$$|n^2 - 1| < \alpha \left(1 + \frac{\alpha}{1 - 2\alpha} \right).$$

Правая часть этого неравенства меньше ε при достаточно малом α , например при $\alpha < \min(2\varepsilon/3, 1/4)$. Предложение доказано.

Допустим, что производная электронной концентрации относительно высоты ограничена по абсолютной величине. Тогда это допущение выполнено и для dv/dr . Отсюда, из (16) и из Предложения 3 следует, что $|dv/dr| \rightarrow 0$ и

$$\left| u'(y) - \frac{d}{dy} \left(\exp \left(\frac{v(r)}{R} y \right) \right) \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } \omega \rightarrow \infty,$$

следовательно, скорость $u(y)$ в плоской модели становится монотонно возрастающей при достаточно высокой частоте и волноводы исчезают. Однако с увеличением частоты зондирования и стремлением коэффициента преломления к единице понижается чувствительность метода радиозатмения к электронной концентрации. Возрастает сложность обработки сигнала для уверенного выделения доплеровского сдвига. И хотя современные методы определения частоты монохроматической посылки чрезвычайно точны, важно исследовать определение электронной концентрации в сферически-симметричной ионосфере при промежуточной частоте сигнала, когда волноводы-долины еще есть. Для такой задачи обязан существовать аналог уравнения (10).

Предположение об ограниченности градиента концентрации подтверждается измерениями, по крайней мере, для устойчивых, не спорадических слоев [14].

6. ПРИМЕРЫ СКОРОСТНЫХ РАЗРЕЗОВ В УПЛОЩЕННЫХ МОДЕЛЯХ ИОНОСФЕРЫ

Рассмотрим распространение радиоволны в сферической атмосфере, пользуясь уплощенными скоростными моделями ионосферы, которые соответствуют стандартным распределениям электронной концентрации [15] и определяются частотой зондирования в соответствии с (12)–(15). При увеличении частоты характер зависимости скорости от y , т.е. от глубины погружения в атмосферу, изменяется следующим образом.

Для заданного распределения электронной плотности существуют две критические частоты ω_1 и ω_2 , при которых поведение лучей, проходящих через ионосферу, качественно изменяется.

До частоты ω_1 вся ионосфера ниже главного максимума электронной концентрации и нижележащие слои атмосферы являются волноводом, нижнюю границу которого образует земная поверхность. Следовательно, все радиоволны, посланные со спутника и проникшие в слой ионосферы ниже главного максимума электронной концентрации, обязательно отражаются от поверхности Земли и только после этого возвращаются в ионосферу и попадают на принимающий спутник. Сигна-

лы, частота которых меньше ω_1 , нельзя использовать для исследования ионосферы ниже этого главного максимума, так как отражение от поверхности Земли вносит в эти сигналы сильные искажения [2].

Пусть теперь частота превышает ω_1 , но не достигает ω_2 . Тогда преобразованная уплощением скорость радиоволн $u(y)$ (а не $v(r)$) на некоторой высоте становится равной максимальной (также полученной уплощением) скорости в ионосфере и затем продолжает увеличиваться при приближении к поверхности Земли. Эта высота, определяющая нижнюю границу волновода, мала при частотах зондирования, лишь немного превышающих ω_1 , и возрастает с ростом частоты зондирования. Радиолуч при этом не касается поверхности Земли. С точки зрения сферической, не преобразованной уплощением геометрии это означает только, что электронная концентрация мало влияет на форму радиолуча. Кривизна луча настолько мала, что его можно считать прямым, и луч соединяет два спутника, не входя в соприкосновение с поверхностью Земли.

Выше частоты ω_1 уже возможно использовать данные радиозатмения для изучения нижних слоев атмосферы и ионосферы, однако обработка данных затруднена присутствием долин, т.е. волноводов. Поэтому следующей частотой, характерной для заданного распределения электронной концентрации, является частота ω_2 , при которой волноводы исчезают и преобразованная уплощением скорость $u(y)$ становится монотонно возрастающей.

Конечно, критические частоты определяются электронной концентрацией в ионосфере, которая зависит от множества факторов: концентрация различна на разных широтах и изменяется периодически в зависимости от времени суток, сезона и цикла солнечной активности. На эти изменения накладываются изменения случайные, спорадические, связанные с всплесками солнечной активности, вулканической деятельностью. В связи с этим мы продемонстрируем изменение зависимости уплощенной скорости радиоволн от частоты на примере четырех распределений электронной концентрации [15] (рис. 4).

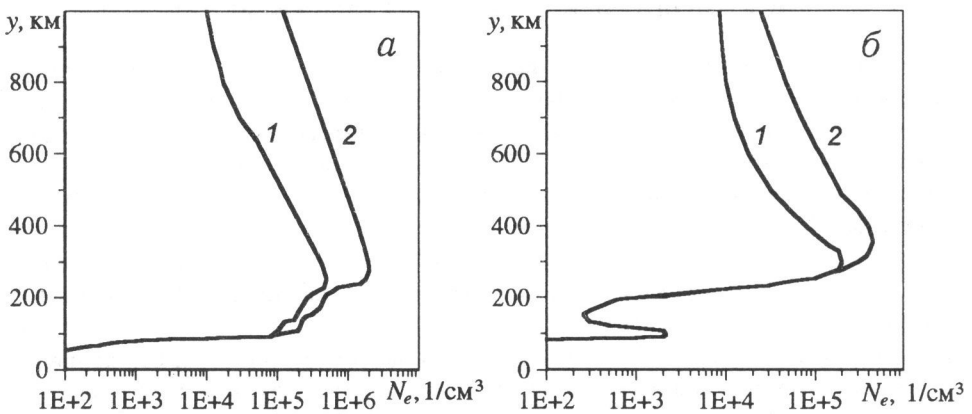


Рис. 4. Пример зависимости электронной концентрации от высоты для минимальной (1) и максимальной (2) солнечной активности
а – в дневное, б – в ночное время суток

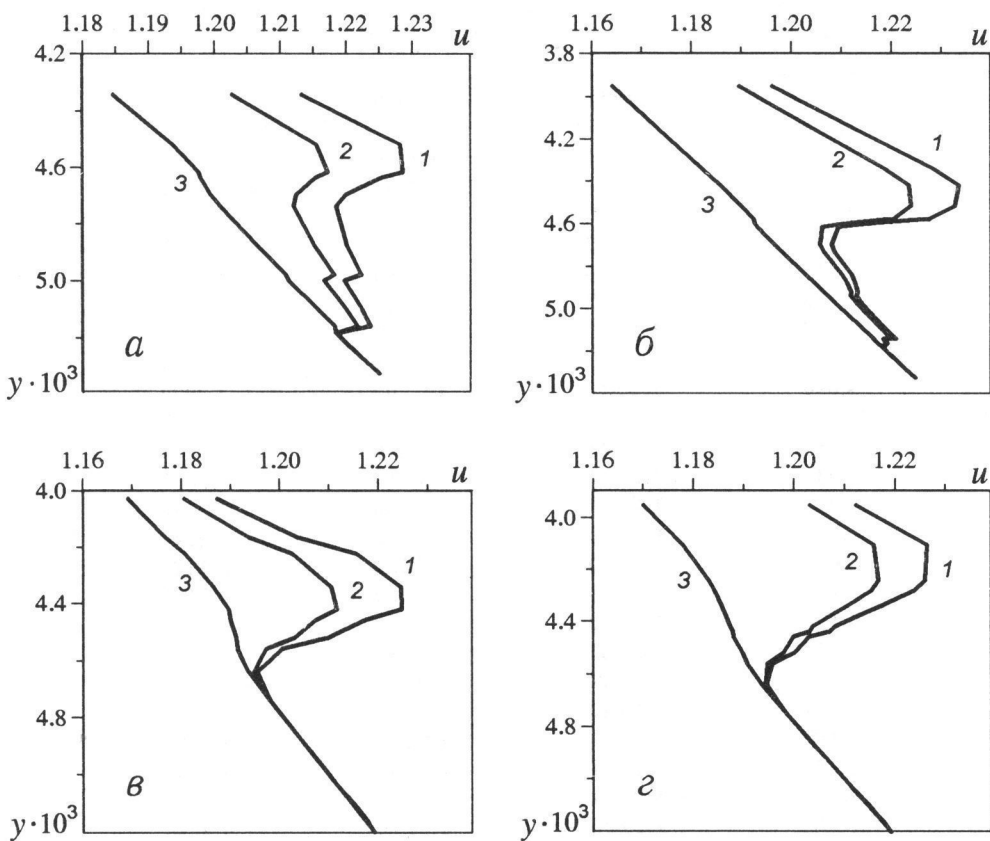


Рис. 5. Уплотненные скоростные разрезы, соответствующие разным кривым рис. 4 для различных значений частот радиоволн

- а – для кривой 1, рис. 4, а: 1 – $f = 25$ МГц, 2 – 30 МГц, 3 – 65 МГц;
 б – для кривой 2, рис. 4, а: 1 – $f = 45$ МГц, 2 – 50 МГц, 3 – 200 МГц;
 в – для кривой 1, рис. 4, б: 1 – $f = 15$ МГц, 2 – 18 МГц, 3 – 38 МГц;
 г – для кривой 2, рис. 4, б: 1 – $f = 20$ МГц, 2 – 22 МГц, 3 – 50 МГц

На рис. 5 приведены соответствующие этим четырем распределениям уплотненные скоростные разрезы, чтобы показать, как меняется волновод с изменением частоты f (здесь f – линейная частота). Кривая 1 на рис. 5 всегда соответствует частоте ω_1 , при которой вся атмосфера ниже главного максимума электронной концентрации является волноводом; для кривой 2 выбиралась такая промежуточная частота, при которой волновод кончается выше поверхности Земли; кривой 3 соответствует частота ω_2 или выше, при которой уплотненный разрез вообще не содержит волновода. Следует отметить, что из-за слишком грубого задания зависимости электронной концентрации от высоты для максимума солнечной активности в дневное время на кривой 2 рис. 4, а появляется скачок электронной концентрации на высоте примерно 100 км над поверхностью Земли. Это приводит к тому, что в соответствующих уплотненных разрезах волновод не исчезает совсем даже при очень высоких частотах (на рис. 5, б кривая 3 соответствует частоте $f = 200$ МГц). Волновод при этом занимает столь малый интервал высот, что на

$y \cdot 10^3$	$u(y)$ для f , МГц.		
	45	50	200
3.950	1.1963	1.1896	1.1641
4.340	1.2286	1.2189	1.1822
4.419	1.2336	1.2236	1.1858
4.518	1.2329	1.2240	1.1901
4.577	1.2279	1.2205	1.1924
4.597	1.2160	1.2112	1.1927
4.617	1.2094	1.2061	1.1932
4.656	1.2087	1.2059	1.1949
4.696	1.2081	1.2058	1.1966
4.736	1.2087	1.2066	1.1984
4.836	1.2121	1.2102	1.2029
4.876	1.2129	1.2112	1.2047
4.917	1.2134	1.2120	1.2065
4.937	1.2131	1.2119	1.2073
4.977	1.2143	1.2133	1.2092
5.078	1.2184	1.2175	1.2138
5.139	1.2210	1.2201	1.2166
5.139	1.2188	1.2183	1.2165
5.159	1.2192	1.2189	1.2174
5.179	1.2185	1.2184	1.2182
5.187	1.2187	1.2187	1.2186
5.199	1.2192	1.2192	1.2192
5.212	1.2198	1.2198	1.2197
5.220	1.2201	1.2201	1.2201
5.240	1.2211	1.2211	1.2211
5.260	1.2220	1.2220	1.2220
5.281	1.2230	1.2230	1.2230
5.322	1.2249	1.2249	1.2249

графике он не заметен, но присутствует (в интервале глубин $y \in (5.139 \cdot 10^{-3}, 5.159 \cdot 10^{-3})$) в таблице, где приведены численные значения скоростей радиоволн в уплотненных разрезах, представленных на рис. 5, б. Частоты волн для всех уплотненных разрезов рис. 5 выбирались исходя из следующих соображений: первая частота принималась такой, чтобы весь разрез до поверхности Земли для этой волны был волноводным (во всех этих примерах предполагалось, что источник находится на высоте 1500 км). Для второй частоты волновод должен заканчиваться на нижней границе ионосферы – в данном случае на высоте 60 км. Для третьей частоты весь уплотненный разрез предполагался монотонным. Численные значения скоростей разрезов для рис. 5, б приведены для того, чтобы показать, что уплотненный разрез не всегда можно сделать монотонным даже для очень высоких частот (в данном случае для частоты 200 МГц остается узенький волновод, значения соответствующих скоростей в таблице выделены полужирным шрифтом). Отношение ω_2 к ω_1 (соответственно, отношение f) в ночное время невелико. В дневное же время оно увеличивается, а для максимума солнечной активности вообще равно бесконечности (бесконечность появляется, скорее всего, из-за грубого задания электронной плотности).

7. О РЕШЕНИИ ПРОБЛЕМЫ ДОЛИН ДЛЯ РАДИОЗАТМЕНИЯ

Исчезновение волноводов при радиозатмении на достаточно высокой частоте сигнала подсказывает простейший способ решения проблемы долин для этого вида радиозондирования. Допустим, что по некоторым причинам нам нужно обработать данные радиозатмения на частоте, при которой ионосфера образует волноводы. Это бывает нужно в основном при изучении электронной концентрации в ионосфере, а не при исследовании нижней части атмосферы, так как чем выше частота сигнала, тем менее чувствителен он к строению ионосферы. Наряду с этой частотой будем зондировать атмосферу на более высокой частоте, при которой волноводов уже нет. Определив на высокой частоте, хотя и грубо, электронную концентрацию во всей ионосфере, мы сможем затем уточнить ее по данным зондирования на низкой частоте, используя формулы (1)–(3). При этом неизвестные скорости в волноводах, появляющихся в скоростных разрезах для радиосигналов с низкой частотой, можно найти по электронной концентрации, полученной из высокочастотного эксперимента. В свою очередь, данные о скоростных разрезах, полученные при экспериментах с радиосигналами с низкими частотами, в дальнейшем используются для определения скорости между этими волноводами и, тем самым, для уточнения распределения электронной концентрации на этих интервалах высот.

Как отмечалось в разд. 5, было бы полезно научиться решать задачу, аналогичную той, которая была решена для радиозондирования плоской ионосферы (т.е. по данным о распространении радиосигналов в условиях экспериментов, при которых источник и приемник радиосигналов находятся на спутниках и, следовательно, необходимо учитывать сферичность ионосферы). А именно: пусть имеются данные радиозатмения на двух частотах, для каждой из которых ионосфера все еще сохраняет волноводную структуру. Нужно выяснить, можно ли по этим данным найти электронную концентрацию единственным образом. Если этого сделать нельзя, то требуется описать множество решений. Характер возникающих сложностей можно понять из формулы (16): если в плоскостной среде закону Эпплтона–Хартри подчиняется скорость $u(y)$, то в сферической модели закону Эпплтона–Хартри подчиняется $v(r)$, а не $u(y)$, полученная преобразованием (16). Было бы интересно математически исследовать эту задачу; правда, она очень специфична, и поэтому здесь мощным стимулом могли бы стать запросы практики радиозондирования ионосферы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой статье нам удалось продвинуться дальше, по сравнению с работой [1], в следующих направлениях:

1) выписано ядро интегрального уравнения (10) для некоторых конкретных случаев. Хотя мы рассмотрели только частные случаи распространения волны по отношению к магнитному полю, исследование общей ситуации технически лишь немного более сложно;

2) осознано различие в решении задачи радиозондирования атмосферы снизу и сверху. Если в первом случае вполне допустимо считать атмосферу плоскостной средой, то во втором – сферичность существенна;

3) с помощью преобразования уплощения показано, как при зондировании сверху (или при радиозатмении) волноводы в ионосфере уменьшаются с ростом частоты сигнала и, наконец, исчезают.

Однако исследование, приведенное в этой статье, породило новые задачи и напомнило о тех, которые мы пытались решить раньше, но не смогли.

Первая задача состоит в доказательстве замкнутости ядра уравнения (10). Г.М. Молчан [16] описал широкий класс функций $n_2 = g(n_1)$, для которых ядро (10) замкнуто. Однако, к сожалению, $g(p)$, задаваемое (12)–(15), не принадлежит к этому классу. Хотя мы считаем, что должны быть очевидные физические соображения, когда возникает ненулевое и незамкнутое ядро, но этот вопрос требует аккуратного изучения.

Вторая задача – исследовать решение обратной задачи при двухчастотном радиозатмении аналогично тому, как это было сделано для радиозондирования снизу. При этом хотелось бы изучить общий случай, когда волноводы существуют на обеих частотах зондирования.

Наконец, третья задача состоит в следующем. Мы рассматриваем двухчастотное зондирование с длинным профилем регистрирующих приемников или, что то же самое, с одним быстро перемещающимся приемником. В практике радиозондирования чаще встречается другая ситуация, когда частота зондирования непрерывно изменяется в широком диапазоне, а приемник один или их несколько. Было бы интересно рассмотреть решение обратной задачи по данным такого эксперимента. Можно надеяться, что и здесь окажется полезным применение комбинированной техники решения обратной задачи сейсмологии [6] и закона Эпплтона–Хартри.

Благодарности. Это исследование докладывалось в Объединенном институте физики Земли им. О. Ю. Шмидта на семинаре доктора физ.-мат. наук О. А. Похотелова. Мы благодарны всем участникам семинара и особенно Г. А. Гусеву за полезное обсуждение. Вопросы, рассмотренные в этой статье, не раз обсуждались с проф. О. И. Яковлевым. Эти обсуждения многое прояснили для нас в теории и практике метода радиозатмения, за что мы очень признательны О. И. Яковлеву. Исследование финансировалось Международным научно-техническим центром (грант 008-94).

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркушевич В.М., Левшенко В.Т. Об определении скорости по годографу в диспергирующей среде с известным законом дисперсии // Методы и алгоритмы интерпретации сейсмологических данных. М.: Наука, 1980. С.84–90. (Вычисл. сейсмология; Вып. 13).
2. Яковлев О.И. Распространение радиоволн в космосе. М.: Наука, 1985. 214 с.
3. Митра С.К. Верхняя атмосфера. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 640 с.
4. Kelso J.M. Radio ray propagation in the ionosphere. N.-Y: Mc Graw-Hill book company, 1964. 408 p.
5. Budden K.G. Radio waves in the ionosphere. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1961. 580 p.

6. Гервер М.Л., Маркушевич В.М. Определение по годографу скорости распространения сейсмической волны // Методы и программы для анализа сейсмических наблюдений. М.: Наука, 1967. С.3–51. (Вычисл. сейсмология; Вып. 3).
7. Koo Y.C., Katzin M. An exact earth-flattening procedure in propagation around a sphere // J. Res. Nat. Bur. Stand. 1960. 64D. P.61–64.
8. Phinney R.A., Anderson D.L. On the radio occultation method for studying planetary atmospheres // J. of Geophys. Res., Space Physics, 1968. Vol.73, N 5. P.1819-1827.
9. Маркушевич В.М., Цемацман А.С. Определение скорости сейсмического сигнала по τ -функции для некоторого класса анизотропных сред // Проблемы прогноза землетрясений и интерпретации сейсмологических данных. М.: Наука, 1992. С.200-209. (Вычисл. сейсмология; Вып.25).
10. Маркушевич В.М., Резников Е.Л. Определение скоростного разреза по годографу при заданной нижней границе скорости // Вычислительные и статистические методы интерпретации сейсмических данных. М.: Наука, 1973. С.160–198. (Вычисл. сейсмология; Вып. 6).
11. Гервер М.Л., Кудрявцева Е.А. О границе множества решений в задаче обращения годографа // ДАН. 1996. Т.346, N 5. С.672–674.
12. Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Наука, 1993. 262 с.
13. Агеев А.Л., Васин В.В., Бессонова Э.Н., Маркушевич В.М. Радиозондирование ионосферы на двух частотах. Алгоритмический анализ интегрального уравнения Фредгольма-Стильтеса // Наст. сб.
14. Альперт Я.Л. Распространение радиоволн и ионосфера. М.: Изд-во АН СССР, 1960. 480 с.
15. The encyclopedia of atmospheric sciences and astrogeology / Ed. Rh. W. Fairbridge. N.-Y.-Amsterdam-London: Reinhold Publishing Corporation, 1967. 1200 p.
16. Молчан Г.М. О единственности обратной кинематической задачи для диспергирующих сред // Методы и алгоритмы интерпретации сейсмологических данных. М.: Наука, 1980. С.90–96. (Вычисл. сейсмология; Вып. 13).