

УДК 517.983.54+519.642

РАДИОЗОНДИРОВАНИЕ ИОНОСФЕРЫ НА ДВУХ ЧАСТОТАХ. АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА–СТИЛТЬЕСА

А.Л. Агеев, В.В. Васин

*Институт математики и механики
Уральского отделения Российской академии наук*

Э.Н. Бессонова, В.М. Маркушевич

*Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук*

Исследуется интегральное уравнение Фредгольма–Стилтьеса первого рода в задаче радиозондирования ионосферы с волноводами (т.е. участками убывания электронной плотности с высотой). Показано, что на паре пространств $(W_2^1[a, b], L_2[c, d])$ и $(V_a^b, L_2[c, d])$ задача является некорректно поставленной (неустойчивой). Для построения устойчивого приближенного решения применяется метод регуляризации Тихонова со стабилизаторами вида $\Omega[F] = \|F\|_{W_2^1}^2$ и $\Omega[F] = V_a^b$. Описан алгоритм исследования (не)единственности решения уравнения Фредгольма–Стилтьеса. Приведены результаты модельных численных экспериментов, показывающие работоспособность предложенной методики.

RADIO SOUNDING OF THE IONOSPHERE AT TWO FREQUENCIES: A SIMULATION ANALYSIS OF THE FREDHOLM–STIELTJES INTEGRAL EQUATION

A.L. Ageev, V.V. Vassin

*Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Division, Russian Academy of Sciences*

E.N. Bessonova, V.M. Markushevich

*International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences*

A Fredholm-Stieltjes integral equation of the first kind arising in radio sounding of ionosphere with waveguides (nonmonotonicity of electron density) is investigated. It is shown that this problem is ill-posed (unstable) on the pair of spaces $(W_2^1[a, b], L_2[c, d])$ and $(V_a^b, L_2[c, d])$. The Tikhonov regularization method with the stabilizers $\Omega[F] = \|F\|_{W_2^1}^2$ and $\Omega[F] = V_a^b$ is applied to construct a stable approximate solution for the original equation. An algorithm for determining (non)uniqueness of a solution is described. Numerical model experiments were carried out to demonstrate that the technique is efficient.

В предыдущей работе [1] поставлены математические проблемы, которые возникают в задаче радиозондирования ионосферы с поверхности Земли с целью определения вертикального профиля электронной концентрации по эпицентральным расстояниям (как функции лучевого параметра), полученным на двух частотах. При этом допускается немонотонный характер зависимости электронной концентрации от высоты, что приводит к проблеме долин (проблеме волноводов), существенно осложняющей исследование задачи ввиду неединственности решения [2]. Привлекая в качестве дополнительной информации зависимость скорости волны (коэффициента преломления) от частоты (закон Эпплтона–Хартри [3]), удается в некоторых случаях однозначно определить скорость (коэффициент преломления), а следовательно, электронную концентрацию вне волноводов, положение и "меру" волноводов, последовательно решая интегральные уравнения первого рода.

Интегральное уравнение, которое является предметом нашего рассмотрения, неустойчиво и может иметь неединственное решение. Это порождает две непростые проблемы. Первая – создание численных методов (поскольку аналитическое исследование этой проблемы, как правило, затруднено), которые позволяли бы решать вопрос о единственности или неединственности решения. Вторая – построение регулярных алгоритмов, которые бы, при наличии дополнительной информации о решении, гарантированно аппроксимировали искомое решение, отвечающее физической реальности для имеющихся исходных данных.

1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАДИОЗОНДИРОВАНИЯ

Пусть $u(y)$ – скорость в среде ($u(0) = 1$), а $\alpha(y)$ – угол ветви луча с вертикалью. Если определить лучевой параметр p соотношением $p = \sin \alpha(0)$, то, согласно закону Снеллиуса,

$$\sin \alpha(y) = p u(y),$$

из которого вытекают формулы для $X(p)$ – половины расстояния вдоль поверхности от источника до точки возвращения луча на Землю, и для $T(p)$ – половины времени движения радиоимпульса вдоль луча с параметром p :

$$\begin{aligned} X(p) &= \int_0^{Y(p)} \frac{p \, dy}{\sqrt{n^2(y) - p^2}}, \\ T(p) &= \int_0^{Y(p)} \frac{n^2(y) \, dy}{\sqrt{n^2(y) - p^2}}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $n(y)$ – коэффициент преломления, являющийся величиной, обратной скорости: $n(y) = 1/u(y)$, $Y(p)$ – наибольшая высота на луче с параметром p .

Как известно, $Y(p)$ связана с $n(y)$ формулой

$$Y(p) = \inf\{y: n(y) < p\}, \tag{1.2}$$

и, следовательно, на участках монотонности $n(y)$ является обратной функции $Y(p)$.

В обратной задаче радиозондирования функции $Y(p)$, $T(p)$, $p \in (0, 1)$, считаются заданными, а требуется определить коэффициент преломления $n(y)$, $0 \leq y < \infty$, который, согласно закону Эпплтона–Хартри, связан определенной функциональной зависимостью с концентрацией электронов N_e , напряженностью магнитного поля H и частотой источника излучения ω (см. [1, 3])

$$n = n(N_e, H, \omega). \quad (1.3)$$

Основополагающим для данной проблематики является соотношение, которое связывает три функции [1, 4]

$$Y(p) = \Phi(p) + \Psi(p), \quad (1.4)$$

где в случае нескольких волноводов (на рис. 2, а в работе [1] представлен случай двух волноводов)

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= \frac{2}{\pi} \int_p^1 \frac{X(q) dq}{\sqrt{q^2 - p^2}}, \\ \Psi(p) &= \sum_{i=1}^n A_i(p), \\ A_i(p) &= \begin{cases} 0, & p > p_i, \\ \frac{2}{\pi} \int_{p_i}^1 \arctg \sqrt{\frac{r^2 - p_i^2}{p_i^2 - p^2}} dF_i(r), & 0 \leq p \leq p_i, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$F_i(r) = \text{mes} \{y: y \in (y_i, \bar{y}_i), n(y) \leq r\}, \quad r \in [p_i, 1]. \quad (1.6)$$

Функции $F_i(r)$, определяющие меру i -го волновода, удовлетворяют следующему уравнению Фредгольма–Стилтьеса [4]:

$$\sum_{i, p_i \geq p} \int_{p_i}^1 \left[\arctg \sqrt{\frac{r^2 - p_i^2}{p_i^2 - p^2}} - \arctg \sqrt{\frac{g^2(r) - g^2(p_i)}{g^2(p_i) - g^2(p)}} \right] dF_i(r) = R(p). \quad (1.7)$$

Здесь $p \in (0, 1)$; $R(p)$ – известная функция, выражающаяся через значения функции $X(p)$ на двух частотах ω_j ($j = 1, 2$) (см. [4]), функция $g: n_2 = g(n_1)$, $n_j = n(\omega_j)$, $j = 1, 2$.

Заметим, что функции $F_i(r)$ могут быть определены последовательно, начиная с $i = 1$. Действительно, обозначив ядро в квадратных скобках через $K_i(p, r)$, рассмотрим уравнение (1.7) при $p \in [p_1, p_2]$. Имеем

$$\int_{p_1}^1 K_1(p, r) dF_1(r) = R(p), \quad p_1 \leq p \leq p_2. \quad (1.8)$$

Определив F_1 и положив $p \in [p_2, p_3]$, на основании (1.6) получаем уравнение для F_2

$$\int_{p_2}^1 K_2(p, r) dF_2(r) = R(p) - \int_{p_1}^1 K_1(r, p) dF_1(r), \quad (1.9)$$

где правая часть уже известна, и т.д.

Если функция F_i определяется однозначно, то по известным F_i согласно формулам (1.5) вычисляется функция $\Psi(p)$. Так как функция $\Phi(p)$ известна, то по формуле (1.4) находится $Y(p)$ вне волноводов. Наконец соотношение (1.3) позволяет определить концентрацию электронов в ионосфере по коэффициенту преломления $n(y)$. Таким образом, базовым является уравнение вида (1.7), которое будет основным объектом нашего рассмотрения.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕКТНОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Перепишем уравнение (1.7) в несколько более общем виде

$$AF \equiv \int_a^b K(t, s) dF(s) = R(t), \quad c \leq t \leq d \quad (2.1)$$

и займемся изучением вопроса о его корректности. Начнем рассмотрение с выбора пространства решений \mathfrak{F} и пространства правых частей \mathfrak{R} . Исходя из требования существования интеграла Стильтьеса и физического смысла решения $F(s)$, естественно выбрать в качестве \mathfrak{F} пространство функций ограниченной вариации с нормой $\|F\| = |F(a)| + V_a^b[F]$, в качестве \mathfrak{R} – пространство $C[c, d]$ или $L_p[c, d]$, а функцию $K(t, s)$ считать непрерывной в $\Pi = \{a \leq s \leq b, c \leq t \leq d\}$. Наряду с V_a^b будем рассматривать также случай пространства Соболева $\mathfrak{F} = W_2^1$ с нормой $\|F\|^2 = \int_a^b |F(s)|^2 ds + \int_a^b |F'(s)|^2 ds$.

Теорема 2.1. *Интегральный оператор A из (2.1) вполне непрерывен из пространства $\mathfrak{F} = V_a^b$ в $\mathfrak{R} = C[c, d]$ (или $\mathfrak{R} = L_2[c, d]$).*

Доказательство. Пусть

$$\psi(t) = \int_a^b K(t, s) dF(s), \quad \max_{t, s \in \Pi} |K(t, s)| \leq M.$$

Принимая во внимание известные свойства интеграла Стильтьеса [5], имеем

$$\|\psi(t)\|_C = \max_{a \leq t \leq b} |\psi(t)| = \max_{a \leq t \leq b} \left| \int_a^b K(t, s) dF(s) \right| \leq M V_a^b[F].$$

Далее для заданного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta(\varepsilon)$ такое, что $\forall t_1, t_2: |t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon) \forall s \in [a, b]$ выполнено $|K(t_1, s) - K(t_2, s)| < \varepsilon$. Тогда

$$|\psi(t_1) - \psi(t_2)| \leq \int_a^b |K(t_1, s) - K(t_2, s)| dF(s) \leq \varepsilon V_a^b[F].$$

Из полученных оценок следует, что оператор A переводит каждое ограниченное множество в ограниченное и равномерно непрерывное семейство, которое,

согласно критерию Арцела–Асколи (см. [5], с.110), является предкомпактным. Это означает, что A – вполне непрерывный оператор. На основе критерия Рисса (см. [6], с.242) аналогично устанавливается вполне непрерывность оператора A из V_a^b в $L_2[a, b]$.

Следствие 2.1. Оператор A вполне непрерывен из $W_2^1[a, b]$ в $C[c, d]$ (или $L_2[c, d]$).

Доказательство. Достаточно проверить, что ограниченное множество в W_2^1 ограничено в пространстве функций V_a^b . Действительно, так как функция $F \in W_2^1$ абсолютно непрерывна, то (см. [7], с.279)

$$V_a^b[F] = \int_a^b |F'(s)| ds \leq (b-a)^{1/2} \left(\int_a^b |F'(s)|^2 ds \right)^{1/2} \leq (b-a)^{1/2} \|F\|_{W_2^1}.$$

Теорема 2.2. Оператор $A: V_a^b \rightarrow C[c, d]$ (или $L_2[c, d]$), а также из пространства $W_2^1[a, b]$ в $C[c, d]$ (или $L_2[c, d]$) не может иметь ограниченного обратного, т.е. задача (2.1) (и, следовательно, (1.8)) существенно некорректна – нет непрерывной зависимости решения от правой части.

Доказательство. Рассмотрим первый случай. Заметим сначала, что единичный шар в пространстве V_a^b некомпактен. Действительно, для последовательности

$$F_n(s) = \begin{cases} 1, & a \leq s < a - 1/n, \\ 0, & s \geq a - 1/n, \end{cases}$$

где $\|F_n\|_{V_a^b} = 1$, нельзя выбрать сходящейся подпоследовательности, так как $\|F_m - F_n\|_{V_a^b} = 2$. Если теперь предположить, что A^{-1} ограничен, то оператор $I = AA^{-1}$, как суперпозиция ограниченного и вполне непрерывного операторов, должен быть вполне непрерывным. Это влечет предкомпактность единичного шара, что противоречит установленному выше факту.

Случай $A: W_2^1 \rightarrow C(L_2)$ рассматривается аналогично.

Замечание 2.1. Как установлено [1, 4], при некоторых функциях g ядро интегрального уравнения (1.8) незамкнуто. Следовательно, для (1.8), (1.9) может быть нарушено каждое из трех условий корректности Адамара (см. [8], с.9). Поэтому для построения устойчивого к возмущениям исходных данных приближенного решения необходимо привлекать идеи регуляризации, т.е. конструировать регуляризирующие алгоритмы (см. [8], с.42).

Замечание 2.2. Утверждения теорем 2.1, 2.2 и следствия 2.1 сохраняют силу, если пространство $W_2^1[a, b]$ заменить на $W_p^n[a, b]$ ($p \geq 2, n \geq 1$), а $L_2[c, d]$ – на $L_p[c, d]$ ($p > 2$).

3. МЕТОДЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Предположив, что решение уравнения (2.1) принадлежит пространству $W_2^1[a, b]$, привлечем для построения приближенного решения метод Тихонова первого порядка

$$\min \left\{ \|AF - R_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|F - F^0\|_{W_2^1}^2 : F \in W_2^1 \right\}, \quad (3.1)$$

где R_δ – возмущенная правая часть,

$$\|R_\delta - R\| \leq \delta, \tag{3.2}$$

F^0 – некоторое пробное решение. Обозначим через \hat{F} решение, наименее уклоняющееся от F^0 .

Теорема 3.1. Для любого $\alpha > 0$, элемента $R_\delta \in L_2[c, d]$ и $F^0 \in W_2^1[a, b]$ существует единственное решение (обозначим его через F^α) экстремальной задачи (3.1). Если параметр регуляризации удовлетворяет соотношениям $\alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\delta^2/\alpha(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, то имеет место сходимость

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|F^{\alpha(\delta)} - \hat{F}\|_{W_2^1} = 0.$$

Доказательство. Обозначим целевой функционал в задаче (3.1) через G^α , а оптимальное значение – через G^* . Пусть F^m – минимизирующая последовательность $G^\alpha(F^m) \rightarrow G^*$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда при $\alpha > 0$ последовательность F^m равномерно ограничена

$$\|F^m\|_{W_2^1} \leq \text{const}. \tag{3.3}$$

Так как для функции $F \in W_2^1$ вариация представима в виде (см. [7], с.279)

$$V_a^b[F] = \int_a^b |F'(s)| ds,$$

то с учетом (3.3) имеем оценку

$$V_a^b[F^m] = \int_a^b |F^{m'}(s)| ds \leq (b-a)^{1/2} \left(\int_a^b |F^{m'}(s)|^2 ds \right)^{1/2} \leq \text{const}. \tag{3.4}$$

В силу (3.3) и компактности оператора вложения $J: W_2^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$ существует подпоследовательность $\{F^{m_k}\}$ такая, что

$$F^{m_k} \xrightarrow{\text{слабо}} \bar{F} \text{ в } W_2^1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|F^{m_k} - \bar{F}\|_{C[a, b]} = 0. \tag{3.5}$$

Из соотношений (3.4), (3.5) по первой теореме Хелли (см. [5], с.366) следует поточечная сходимость

$$\forall t \quad \psi^{m_k}(t) = \int_a^b K(t, s) dF^{m_k}(s) \rightarrow \bar{\psi}(t) = \int_a^b K(t, s) dF(s),$$

откуда

$$\forall t \quad |\psi^{m_k} - R_\delta(t)|^2 \rightarrow |\bar{\psi}(t) - R_\delta(t)|^2,$$

$$|\psi^{m_k}(t)| \leq \max_{t, s \in \prod} |K(t, s)| V_a^b[F^{m_k}] \leq \text{const}.$$

По теореме Лебега о предельном переходе

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|AF^{m_k} - R_\delta\|_{L_2}^2 &= \lim \int_a^b |\psi^{m_k}(t) - R_\delta(t)|^2 dt = \\ &= \int_a^b \lim |\psi^{m_k}(t) - R_\delta(t)|^2 dt = \|A\bar{F} - R_\delta\|_{L_2}^2. \end{aligned}$$

Объединяя последнее соотношение с (3.5), имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} G^* \leq \|A\bar{F} - R_\delta\|^2 + \alpha \|\bar{F}\|_{W_2^1}^2 &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \{ \|AF^{m_k} - R_\delta\|^2 + \\ &+ \alpha \|F^{m_k}\|^2 \} = \lim_{k \rightarrow \infty} G^\alpha(F^{m_k}) = G^*, \end{aligned}$$

из которой заключаем, что $\bar{F} = F^\alpha$ – решение экстремальной задачи (3.1). Единственность решения F^α следует из строгой выпуклости функционала G^α .

Из очевидных неравенств

$$\begin{aligned} G(F^\alpha) &= \|AF^\alpha - R_\delta\|^2 + \alpha \|F^\alpha - F^0\|^2 \leq G(\hat{F}) \leq \\ &\leq (\|A\hat{F} - R_\delta\| + \|R - R_\delta\|)^2 + \alpha \|\hat{F} - F^0\|^2 \leq \delta^2 + \alpha \|\hat{F} - F^0\|^2, \end{aligned}$$

ввиду условий теоремы на параметры, получаем оценку

$$\|F^\alpha - F^0\|_{W_2^1}^2 \leq \frac{\delta^2}{\alpha} + \|\hat{F} - F^0\|_{W_2^1}^2 \leq \text{const}, \quad (3.6)$$

что влечет за собой существование подпоследовательности $\alpha_k = \alpha(\delta_k)$ такой, что

$$F^{\alpha_k} \xrightarrow{\text{слабо}} \tilde{F} \text{ в } W_2^1 \Rightarrow F^{\alpha_k} \xrightarrow{C} \tilde{F}, \quad \sup V_a^b[F^{\alpha_k}] \leq \text{const}. \quad (3.7)$$

По второй теореме Хелли (см. [5], с.368)

$$\forall t \quad \varphi^k(t) = \int_a^b K(t, s) dF^{\alpha_k}(t, s) \rightarrow \varphi(t) = \int_a^b K(t, s) d\tilde{F}(s), \quad |\varphi^k(t)| \leq \text{const}.$$

Снова используя теорему Лебега о предельном переходе, имеем соотношения

$$\begin{aligned} 0 \leq \|A\tilde{F} - R\|^2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b |\varphi^k(t) - R(t)|^2 dt \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup [\|AF^{\alpha_k} - R_\delta\| + \|R_\delta - R\|]^2 \leq \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup [(\|AF^{\alpha_k} - R_\delta\|^2 + \alpha_k \|F^{\alpha_k} - F^0\|^2)^{\frac{1}{2}} + \delta_k]^2 \leq \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup [(\delta^2 + \alpha_k \|\hat{F} - F^0\|^2)^{1/2} + \delta_k]^2 = 0, \end{aligned}$$

т.е. \tilde{F} – решение исходного уравнения (2.1).

Принимая во внимание (3.6) и (3.7) и определение нормального решения \hat{F} , получаем неравенства

$$\|\hat{F} - F^0\|^2 \leq \|\tilde{F} - F^0\|^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|F^{\alpha k} - F^0\|^2 \leq \|\hat{F} - F\|,$$

что влечет за собой $\tilde{F} = \hat{F}$. Из слабой сходимости и сходимости норм вытекает сильная сходимость

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|F^{\alpha k} - \hat{F}\|_{W_2^1} = 0.$$

Так как \hat{F} — единственная предельная точка, то вся последовательность $\{F^{\alpha(\delta)}\}$ также сходится к \hat{F} .

Следствие 3.1. $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|F^{\alpha(\delta)} - \hat{F}\|_C = 0$, т.е. $F^{\alpha(\delta)}(t)$ равномерно сходится к \hat{F} на отрезке $[a, b]$.

Из физического смысла решения вытекает, что функция $F(s)$ может быть разрывной. Это означает, что использование стабилизатора в методе Тихонова в форме $\Omega[F] = \|F - F^0\|_{W_2^1}^2$ может привести к сильно заглаженному решению (см. разд. 5). Это наводит на мысль использовать более слабый регуляризатор $\Omega(F) = V_a^b[F - F^0] + |F(a) - F^0(a)|$. Поскольку интеграл Стильтьеса не зависит от значений функции F в счетном числе точек отрезка $[a, b]$ (см. [5], с.364), то, как отмечено [9], в случае разрешимости задачи (2.1) всегда существует множество решений, в том числе F^0 — нормальных решений, этой задачи. Поэтому далее будем предполагать, что все F^0 — нормальные решения — совпадают между собой за исключением их общих точек разрыва. Обозначим одно из таких решений через \hat{F} . Сформулируем теорему сходимости для этого случая.

Теорема 3.2. Пусть задача (2.1) разрешима в пространстве $\mathfrak{S} = V_a^b$ при заданном R и выполнено условие аппроксимации (3.2): $\hat{F}(a) - F^0(a) = 0$.

Тогда при любых $\alpha > 0$, $R_\delta \in L_2$, $F^0 \in V_a^b$ экстремальная задача

$$\min\{\|AF - R_\delta\|^2 + \alpha V_a^b[F - F^0] : F \in V_a^b\} \tag{3.8}$$

имеет непустое множество решений \mathfrak{S}^α и при $\alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\delta^2/\alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{F^\alpha \in \mathfrak{S}^\alpha} \|F^{\alpha(\delta)} - \hat{F}\|_{L_2} &= 0, \\ V_a^b[F^{\alpha(\delta)}] &\rightarrow V[\hat{F}], \\ F^{\alpha(\delta)}(t) &\rightarrow \hat{F}(t), \quad \delta \rightarrow 0 \end{aligned}$$

в каждой точке $t \in [a, b]$ за исключением, быть может, точек разрыва функции \hat{F} .

Показательство поточечной сходимости F^α к \hat{F} и сходимость вариаций вытекает из результатов работы [9] (лемма 6). Сходимость F^α в $L_2[a, b]$ можно получить, привлекая теорему Лебега о предельном переходе.

Следствие 3.2. Если решение \hat{F} задачи (2.1) абсолютно непрерывно на некотором подсегменте $[a_1, b_1] \subset [a, b]$, то в условиях теоремы $F^{\alpha(\delta)}$ сходится равномерно к $\hat{F}(t)$ на $[a_1, b_1]$.

Доказательство может быть получено на основе методики работ [9] (теорема 3), [10] (теорема 1), [11] (теорема 4).

Таким образом, последнее следствие показывает, что метод Тихонова в форме (3.8) гибко учитывает свойства решения и на участках с большей гладкостью имеет место более сильная сходимости (равномерная вместо поточечной). Однако необходимо отметить, что выбор стабилизатора в форме $\Omega[F] = V_a^b[F - F^0]$ приводит к негладкой минимизации, что усложняет численную реализацию метода.

Прежде чем изложить еще один подход к построению регуляризованного семейства приближенных решений на основе вариационных методов, преобразуем исходное уравнение к классическому уравнению Фредгольма 1-го рода. Действительно, в предположении непрерывной дифференцируемости (по s) $K(t, s)$ уравнение (2.1) может быть записано в следующей форме (см. [7], с.250):

$$\int_a^b K'_s(t, s)F(s)ds - F(s)K(t, s)|_a^b = -R(t). \quad (3.9)$$

Если предположить, что известны значения нормального решения на концах, то внеинтегральный член можно перенести в правую часть как известную функцию и получить классическое уравнение Фредгольма.

Как было отмечено выше, использование метода Тихонова со стабилизатором $\Omega[F] = \|F - F^0\|_{W_2^1}$ может привести к заглаженному решению. Вместе с тем, выбор стабилизатора в форме $\Omega[F] = V_a^b[F - F^0]$ порождает проблемы с численным решением задачи (3.8), поскольку целевой функционал не является дифференцируемым и квадратичным. Поэтому более оправданным может оказаться привлечение в качестве пространства решений \mathfrak{F} пространства Соболева $W_2^\beta[a, b]$ с дробным $0 < \beta < 1$ и выбор стабилизатора в виде $\Omega[F] = \|F - F^0\|_{W_2^\beta}^2$ для регуляризации уравнения (3.9). Напомним, что под пространством $W_2^\beta[a, b]$ здесь понимается совокупность функций F , для которых

$$\|F\|_{W_2^\beta}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2(1 + i^{2\beta}) < \infty,$$

где c_i – коэффициенты Фурье функции F по системе $\{\sin[i\pi(t-a)/(b-a)]\}_1^\infty$.

Аргументацией к такому выбору является тот факт, что $W_2^1 \subset V_a^b[a, b] \subset W_2^\beta$ ($0 < \beta < 1/2$) и, следовательно, W_2^β ($\beta < 1/2$) содержит разрывные функции. Кроме того, для таких стабилизаторов построены экономичные конечномерные квадратичные аппроксимации [12].

Теорема 3.3. Пусть уравнение (3.9) разрешимо в пространстве $\mathfrak{F} = W_2^\beta$ ($0 < \beta < 1$) и выполнено условие аппроксимации (3.2). Тогда при любых $\alpha > 0$, $R_\delta \in L_2$, $F^0 \in W_2^\beta$ экстремальная задача

$$\min\{\|AF - R_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha\|F - F^0\|_{W_2^\beta}^2 : F \in W_2^\beta\}$$

разрешима единственным образом и при связи параметров $\alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\delta^2/\alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ выполняется соотношение

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|F^{\alpha(\delta)} - \hat{F}^0\|_{W_2^\beta} = 0 \Rightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0} \|F^{\alpha(\delta)} - \hat{F}\|_{L_2} = 0,$$

где \hat{F} есть F^0 – нормальное решение уравнения (3.9).

Доказательство сходимости в W_2^β проводится по обычной схеме (см., например, [8], с.71) для гильбертовых пространств. Что касается сходимости в L_2 , то это следует из вполне непрерывности оператора вложения $J: W_2^\beta \rightarrow L_2$. Действительно, если $\{\xi_i\}_1^\infty$ – коэффициенты Фурье по ортогональной системе $\{\sin[i\pi(t - a)/(b - a)]\}_1^\infty$, то для всех $F \in S_r(0) \subset W_2^\beta$ справедлива оценка

$$\sum_{i=n+1}^\infty \xi_i^2 = \sum_{i=n+1}^\infty \xi_i^2 i^{2\beta} \frac{1}{i^{2\beta}} \leq \frac{1}{(n+1)^{2\beta}} \sum_{i=n+1}^\infty c_i^2 i^{2\beta} \leq \frac{r^2}{(n+1)^{2\beta}},$$

из которой по критерию (см. [6], с.248) компактности в пространстве с базисом следует вполне непрерывность оператора J .

4. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ (НЕ)ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Для одного частного случая была доказана единственность решения уравнения (1.7) на основе аналитической техники [12]. Однако в общей ситуации вопрос оставался открытым. Предлагается использовать другой подход. А именно: наша цель – построить алгоритм определения базиса в $\ker A = \{F: AF = 0\}$ (или проверки, что $\ker A = \{0\}$), который может быть применен единым образом для любой функции g , в том числе и заданной, например, в виде таблицы. Задача определения $\ker A$ неустойчива относительно возмущений оператора A [13]. Ниже приведены теоремы сходимости для построенных численных процедур. Предлагаемая методика позволяет на основе правильным образом проведенных численных расчетов давать заключение о (не)единственности решения уравнения (1.7). Модельные расчеты, приведенные в разд. 5, иллюстрируют ее работоспособность.

На практике в задаче зондирования ионосферы условия проведения эксперимента и, следовательно, выбор функции g в уравнении (1.7) до некоторой степени в распоряжении экспериментатора. Поэтому применение описываемой методики, как надеются авторы, позволит обеспечить более качественное решение уравнения (1.7). Отметим, что постановка задачи по выбору из множества операторов такого, который порождает уравнение с единственным решением, не встречалась ранее и представляет, по мнению авторов, самостоятельный математический интерес.

Перейдем к изложению основ методики определения $\ker A$ по возмущенному оператору $A_h \in L(\mathfrak{Z}, \mathfrak{R})$: $\|A - A_h\| \leq h$ (см. [14], гл. 3). Конструктивное описание подпространств, в том числе $\ker A$, производится с помощью ортонормированного базиса в соответствующем подпространстве. Использование дополнительной информации о гладкости приводит к тому, что базис в $\ker A$ обладает определенным свойством: его элементы упорядочены по гладкости.

Введем необходимые определения и понятия.

Пусть $\mathfrak{Z}, \mathfrak{R}, Z$ – бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства; A – линейный непрерывный оператор из \mathfrak{Z} в \mathfrak{R} ; L – линейный неограниченный

оператор из \mathfrak{Z} в Z с областью определения $D(L)$, всюду плотной в \mathfrak{Z} . Относительно L везде далее будем также предполагать, что $\ker L$ конечномерно, область значений L есть все пространство Z и на Z существует вполне непрерывный правый обратный оператор L^{-1} и $D(L^{-1}) = \ker L^\perp$. Можно показать, что L^*L имеет чисто дискретный спектр, для которого ∞ является предельной точкой. Заметим, что примером оператора L , наиболее часто используемым на практике, является оператор, обратный оператору вложения соболевского пространства W_2^1 в L_2 . Дадим определение L -базиса. Обозначим L_1 – сужение оператора L на $\ker A \cap D(L)$. Напомним, что правыми сингулярными числами ν_i и правыми сингулярными векторами F_i оператора L_1 называются квадратные корни из собственных чисел оператора $L_1^*L_1$ и соответствующие собственные функции: $L_1^*L_1F_i = \nu_i^2F_i$.

Определение 4.1. Ортонормированный базис из правых сингулярных векторов $\{F_i\}$ оператора L_1 , занумерованных так, что соответствующие собственные числа ν_i упорядочены по возрастанию, называется L -базисом ядра оператора A или просто L -базисом. Совокупность всех L -базисов обозначается ML .

Для исследования свойств L -базисов удобно дать другое определение для его элементов, являющееся выражением экстремального свойства для сингулярных векторов оператора L_1 . Корректность определений и их эквивалентность обсуждаются ниже.

Определение 4.2. Пусть $\mathfrak{Z}_1 = \ker A \cap D(L) \neq \{0\}$. Обозначим через F_i решения экстремальных задач

$$\min\{\|LF\| : F \in \mathfrak{Z}_i, \|F\| = 1\}, \quad (4.1)$$

где $\mathfrak{Z}_i = \{F \in \mathfrak{Z}_1 : \langle F, F_j \rangle = 0 \text{ для } j = 1, 2, \dots, i-1\}$. Совокупность $\{F_i\}$ решений (4.1) называется L -базисом ядра оператора A .

Заметим, что если для некоторого N $\mathfrak{Z}_N = \{0\}$, то последовательность $\{F_i\}$ состоит из $N-1$ элемента. Обратим также внимание на то, что задачи (4.1) могут иметь неединственное решение.

Поскольку ML состоит, вообще говоря, не из одного элемента, то нам в дальнейшем понадобится понятие близости между совокупностями ортонормированных базисов. Введем сначала функцию

$$r_N(\{F_i\}, \{\hat{F}_i\}) = \max_{1 \leq i \leq N} \|L(F_i - \hat{F}_i)\|.$$

Пусть M_1 и M_2 есть два множества ортонормированных базисов. Определим расстояние между ними:

$$\tau_N(M_1, M_2) = \sup_{\{F_i\} \in M_1} \inf_{\{\hat{F}_i\} \in M_2} r_N(\{F_i\}, \{\hat{F}_i\}). \quad (4.2)$$

В выражение (4.2) входит число N . Для удобства обозначений желательно связать его с размерностью подпространства $\ker A \cap D(L)$, аппроксимация которого нас интересует. Обозначим через $\dim \mathfrak{Z}^1$ размерность (конечную или бесконечную) подпространства \mathfrak{Z}^1 . Пусть подпространствам $\mathfrak{Z}^1(\Delta)$ и \mathfrak{Z}^2 отвечают совокупности ортонормированных базисов $M_1(\Delta)$ и M_2 соответственно, где Δ – параметр.

Определение 4.3. Будем говорить, что $M_1(\Delta)$ L сходится к M_2 при $\Delta \rightarrow 0$, и обозначать $M_1(\Delta) \xrightarrow{L} M_2$ при $\Delta \rightarrow 0$, если $\dim \mathfrak{S}^1(\Delta) \geq \dim \mathfrak{S}^2$ и для любого натурального $N : 1 \leq N \leq \dim \mathfrak{S}^2$ справедливо

$$\tau_N(M_1(\Delta), M) \rightarrow 0, \quad \Delta \rightarrow 0.$$

Заметим, что построенные ниже методы восстанавливают элементы L -базиса $\{F_i\}$ тем хуже, чем меньше их гладкость, т.е. чем больше номер i и, следовательно, $\nu_i = \|LF_i\|$. Теоретически при стремлении погрешности h задания оператора к нулю восстанавливается весь L -базис, но практически при фиксированном возмущении можно надеяться на восстановление только нескольких первых элементов L -базиса.

Пусть вместо точного оператора $A \in L(\mathfrak{S}, \mathfrak{R})$ известен возмущенный оператор $A_h \in L(\mathfrak{S}, \mathfrak{R})$ такой, что $\|A - A_h\| \leq h$. Выпишем последовательность вариационных задач, порождающих регулярный алгоритм определения базиса $\ker A \cap D(L)$ по оператору A_h . Положим

$$G^{\alpha h}[F] = \|A_h F\|^2 + \alpha \|LF\|^2, \quad \alpha > 0; \quad \mathfrak{S}_1 = D(L).$$

Определим $F_i^{\alpha h}$ как решение задачи

$$\min\{G^{\alpha h}[F] : \|F\| = 1, F \in \mathfrak{S}_i\}, \quad (4.3)$$

где $\mathfrak{S}_i = \{F \in \mathfrak{S}_1 : \langle F, F_j^{\alpha h} \rangle = 0 \text{ для } j = 1, 2, \dots, i-1\}$.

Отметим, что задачи (4.3) невыпуклы и имеют, вообще говоря, неединственное решение. Поэтому введем обозначение $M^{\alpha h}$ для множества всех ортонормированных последовательностей $\{F_i^{\alpha h}\}$. Далее рассмотрим неограниченный самосопряженный оператор, связанный с задачами (4.3),

$$S^{\alpha h} = A_h^* A_h + \alpha L^* L.$$

Оказывается, что если занумеровать собственные числа $\lambda_i^{\alpha h}$ оператора $S^{\alpha h}$ по возрастанию, то соответствующие собственные векторы удовлетворяют (4.3), т.е. выполняется известное экстремальное свойство собственных векторов симметричного оператора. Основная трудность здесь заключается в неограниченности оператора $S^{\alpha h}$. Например, в случае произвольного оператора L решения задач (4.3) может просто не существовать. Свойства оператора L позволяют при $\alpha > 0$ обосновать наличие у оператора $S^{\alpha h}$ чисто дискретного спектра.

Теорема 4.1. При $\alpha > 0$ оператор $S^{\alpha h}$ имеет чисто дискретный спектр $\{\lambda_i^{\alpha h}\}$. При этом $\lambda_i^{\alpha h} \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$ и каждое собственное число $\lambda_i^{\alpha h}$ имеет конечную кратность. Для собственных векторов справедливо экстремальное свойство (4.3), а для собственных чисел – равенство $\lambda_i^{\alpha h} = G^{\alpha h}\{F_i^{\alpha h}\}$.

Вариационная форма (4.3) определения $M^{\alpha h}$ используется в теоретических рассуждениях. Практическое отыскание $M^{\alpha h}$ сводится к решению частичной проблемы собственных значений для симметричной матрицы S^n , аппроксимирующей при $n \rightarrow \infty$ оператор $S^{\alpha h}$. Для краткости опустим соответствующую теорему о конечномерной аппроксимации задачи (4.3) (см. [14], гл. 5).

Для сокращения записи введем обозначение $\Delta = (\alpha, h, h^2/\alpha)$ и условимся, что $(\alpha, h, h^2/\alpha) \rightarrow 0$ эквивалентно записи $\Delta \rightarrow 0$.

Теорема 4.2. Если $\ker A \cap D(L) \neq \{0\}$, то $M^{\alpha h} \xrightarrow{L} ML$ при $\Delta \rightarrow 0$.

В теории линейных некорректно поставленных задач известно [15], что при некоторых условиях существование решения эквивалентно сходимости регуляризующего алгоритма, т.е. если решение не существует, то алгоритм расходится. Подобную теорему можно доказать и в нашем случае.

Теорема 4.3. Если $\ker A \cap D(L) = \{0\}$ и $R(A)$ незамкнуто в \mathfrak{F} , то

$$\min_{\{F_i^{\alpha h}\} \in M^{\alpha h}} \|LF_1^{\alpha h}\| \rightarrow \infty \quad (4.4)$$

при $\alpha, h \rightarrow 0, h^2/\alpha \leq \text{const}$.

Практическое исследование уравнения первого рода на (не)единственность заключается в вычислении элементов $F_1^{\alpha h}$ при убывающих значениях α . При этом необходимо отслеживать две характеристики: $\|AF_1^{\alpha h}\|$ и $\|LF_1^{\alpha h}\|$ (первая монотонно убывает, а вторая возрастает по α [16]). Первую характеристику необходимо сравнивать с $\|R\|$, вторую – с заданным уровнем гладкости, отделяющим "физические" осцилляции от "нефизических". В результате (при достаточно малом h) либо будет конструктивно построено хорошее приближение к первому элементу L -базиса, когда величина $\|AF_1^{\alpha h}\|$ практически равна нулю, либо будет установлена единственность, если наблюдается тенденция выполнения соотношения (4.4) (см. теорему 4.3).

Остановимся на вопросе применимости изложенной теории к исследованию уравнения (1.7). Если искомая мера $F \in W_2^1$, то в качестве оператора L можно взять оператор, обратный оператору вложения W_2^1 в L_2 , и все условия теорем 4.1–4.3 выполнены. В случае если искомая мера F есть кусочно-непрерывная функция, можно использовать (см. [14], гл. 5) пространство W_2^β при $\beta < 0.5$. В этом случае, как уже отмечалось выше (см. формулу (3.9)), с помощью интегрирования по частям можно перейти к рассмотрению оператора Фредгольма A из L_2 в L_2 . Дальнейшее обсуждение применения теорем 4.2 и 4.3 для исследования уравнения (1.7) на (не)единственность проводится в следующем разделе.

5. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

5.1. Численные алгоритмы построения исходного уравнения (функции g). Для построения исходного уравнения (1.7) необходимо определить функцию $n_2 = g(n_1)$ [4]. При некоторых значениях параметров это можно сделать аналитически. Напомним (см. формулу (1.3)), что задача состоит в вычислении функции $n_2 = g(n_1)$ по двум известным зависимостям

$$\begin{aligned} n_1 &= n_1(N_e, H, \omega_1), \\ n_2 &= n_2(N_e, H, \omega_2), \end{aligned}$$

где H, ω_1, ω_2 – известные константы, а N_e – независимая переменная, подлежащая исключению. Заметим, что в общем случае формула (1.3) достаточно громоздка и исключение переменной N_e аналитическими методами затруднительно.

Для определения функции g предлагается следующий численный алгоритм. Выберем равномерную сетку $N_i, i = 1, \dots, M$ на интервале $[0, N^{\max}]$, где N^{\max} –

максимальное значение, которое принимает переменная N_e , и рассмотрим таблицу $n_1(N_i), n_2(N_i), i = 1, \dots, M$. Ясно, что на участках монотонного изменения (возрастания или убывания) последовательности чисел $n_1(N_i)$ соответствующую часть таблицы можно рассматривать как представление функции g , заданной на неравномерной сетке $n_1(N_i)$. Добавляя алгоритм выделения участков монотонности $n_1(N_i)$ и алгоритм интерполяции с неравномерной сетки на равномерную, получаем численную процедуру вычисления функции g на равномерной сетке.

В настоящих модельных расчетах рассматривалась ситуация, когда плоская траектория распространения радиоволн перпендикулярна направлению магнитного поля Земли. Также предполагалось, что электронным "трением" можно пренебречь (коэффициент трения $\nu = 0.0$ в обозначениях [3], с.177). В этом случае формула (1.3) существенно упрощается и возможно аналитическое определение функции g . Расчеты проводились при следующих значениях параметров: гирмагнитная частота $He\mu_0/(2\pi mc) = 1.5$ МГц (здесь H – напряженность внешнего магнитного поля, e, m – заряд электрона и его масса, c – скорость света, μ_0 – магнитная проницаемость вакуума), частоты радиосигналов $f_1 = 4.0$ МГц и $f_2 = 5.0$ МГц. На рис. 1 приведен график функции g , полученный с помощью численной процедуры при $M = 200$, который совпадает с графиком функции g , полученным аналитическим путем.

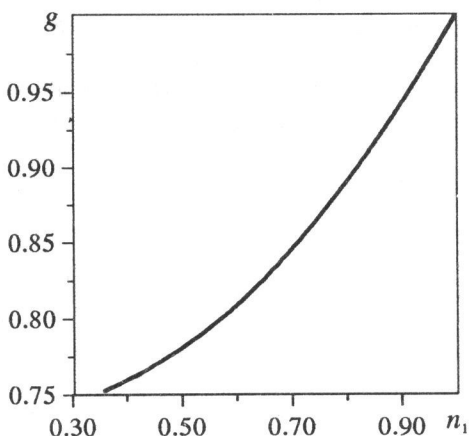


Рис. 1. Функция $g(n_1)$

5.2. Метод Тихонова. Уравнение (1.7) в случае одного волновода имеет следующий вид:

$$AF \equiv \int_{p_1}^1 \left[\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r^2 - p_1^2}{p_1^2 - p^2}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{g^2(r) - g^2(p_1)}{g^2(p_1) - g^2(p)}} \right] dF(r) = R(p), \quad (5.1)$$

где $p \in [p_2, p_1]$; r – высота над поверхностью Земли, км.

Процедура вычисления функции g описана в п.5.1. Сначала в практических расчетах был выбран технически самый простой путь решения уравнения (1.7) из всех рассмотренных в разд. 2: предполагалось, что искомая функция $F \in W_2^1$, оператор A рассматривался действующим из W_2^1 в L_2 .

Опишем метод дискретизации уравнения (5.1). Выберем две равномерные сетки $\{r_i\}$, $\{p_j\}$ соответственно на $[p_1, 1]$ и $[p_2, p_1]$. При $p = p_j$ аппроксимируем интеграл Стильтеса в (5.1) суммой $\sum_{i=0}^N K(p_j, r_i)[F_i - F_{i+1}]$, где F_i ($i = 1, \dots, N$) есть значения искомого вектора F в точках r_i . Отметим, что в сумму входят значения F_0 и F_{N+1} . Чтобы замкнуть систему, выставим следующие граничные условия: $F_{N+1} = F_N$ (производная в N -й точке равна 0) и $F_0 = 0$ (значение функции в 1-й точке равно 0). Стабилизатор в (3.1) аппроксимировался второй разностью. Используя необходимые условия экстремума для дискретного аналога задачи (3.1), приходим к системе линейных алгебраических уравнений, которая затем решается методом Холесского (квадратного корня).

Модельные расчеты состояли в следующем: для функции электронной плотности $N_e(r)$ (рис. 2) в волноводе вычислялась функция меры $F_{\text{mod}}(x)$, к которой применялся оператор (5.1) и определялась $R_{\text{mod}}(y) = AF_{\text{mod}}$. Затем уравнение (5.1) решалось методом Тихонова (3.1), соответствующее регуляризованное решение на сетке с $N = 200$ обозначено F^α . Результаты расчетов (рис. 3) показывают, что в отсутствие ошибок регуляризирующий алгоритм позволяет восстанавливать искомую меру с удовлетворительной точностью. Заметим, что кривые $R_{\text{mod}}(y)$ и AF^α практически совпадают (поэтому нет необходимости их приводить).

Отметим, что хотя условие монотонности искомого решения F_{mod} в алгоритме не учитывалось, полученное в этом эксперименте регуляризованное приближение (см. рис. 3) является близким к монотонному. При необходимости ограничение $dF \geq 0$ можно ввести в задачу (3.1) и затем использовать подходящий метод решения квадратичной задачи с ограничениями в форме линейных неравенств $F_{i+1} - F_i \geq 0$, либо применить итерированный вариант метода Тихонова с оператором проектирования на множество монотонных функций (см. [14], с.136,235).

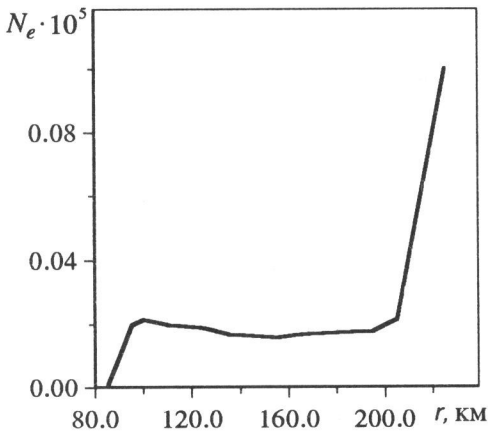


Рис. 2. Зависимость концентрации электронов от высоты

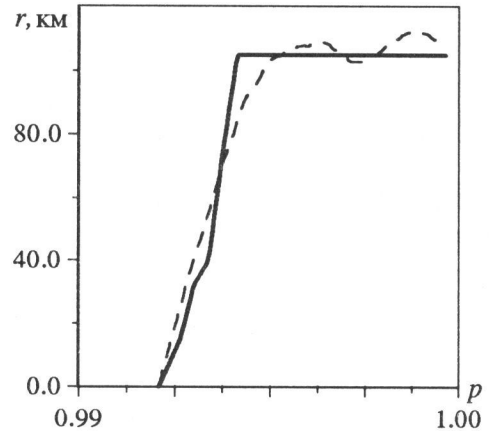


Рис. 3. Функции меры в волноводе
Сплошная линия – заданная ($F_{\text{mod}}(p)$);
штриховая – восстановленная функция меры ($F^\alpha(p)$) при $\alpha = 2.0 \cdot 10^{-14}$

5.3. Исследование на (не)единственность для модельных уравнений.

Рассмотрим следующий модельный интегральный оператор, имеющий [14] тривиальное ядро (нуль-подпространство).

$$AF \equiv \int_0^{\sqrt{1-p_1^2}} \ln \frac{x+y}{x+y+1} dF, \quad x \in [0, \sqrt{1-p_1^2}]. \tag{5.2}$$

Предполагается, как и прежде, что функция $F \in W_2^1$. Аппроксимация оператора проводится аналогично тому, как это делается в п. 5.2.

Вычислительные эксперименты для оператора (5.2), связанные с реализацией метода (4.3), показывают (рис. 4), что с уменьшением α функции $F_1^{\alpha h}$ становятся все более и более осциллирующими (величина $\|F_1^{\alpha h}\|$ возрастает), что иллюстрирует теорему 4.3 и согласуется с тривиальностью ядра оператора (5.2). При этом величина $F_1^{\alpha h}$ монотонно убывает, ее значения: 0.211 при $\alpha_1 = 10^{-3}$, $0.837 \cdot 10^{-2}$ при $\alpha_2 = 10^{-5}$, $0.99 \cdot 10^{-5}$ при $\alpha_3 = 10^{-9}$. Для сравнения $\|AF_{\text{mod}}\| = 0.551$. (Все функции для удобства сравнения нормированны: $\|F_{\text{mod}}\| = \|F_1^{\alpha_i}\|$, $i = 1, 2, 3$.)

Чтобы продемонстрировать работоспособность предложенной методики, рассмотрим оператор, имеющий нетривиальное известное одномерное ядро; для простоты опишем все на конечномерном уровне. Пусть A^n – матрица, аппроксимирующая оператор A (введенный выше), и соответствующее уравнение имеет единственное решение. Рассмотрим матрицу

$$A_1^n = A^n - A^n \phi \cdot \phi^T, \tag{5.3}$$

где ϕ – есть некоторый фиксированный вектор-столбец единичной длины. Легко видеть, что $\ker A_1^n$ есть одномерное пространство, натянутое на вектор ϕ .

Расчеты показывают (рис. 5), что в широком диапазоне по параметру регуляризации α -метод (4.3) позволяет восстановить вектор ϕ с удовлетворительной точностью. При этом $\|A_1 F_1^{\alpha h}\| = 0.24 \cdot 10^{-3}$ при $\alpha = 10^{-3}$ (ср. с $\|AF_1^{\alpha h}\| = 0.211$ при $\alpha = 10^{-3}$).

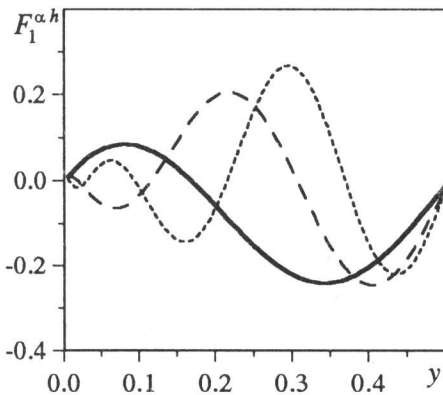


Рис. 4. Решение задачи (4.3) для модельного оператора

Сплошная линия соответствует $\alpha = 10^{-3}$, штриховая – 10^{-5} , пунктир – 10^{-9}

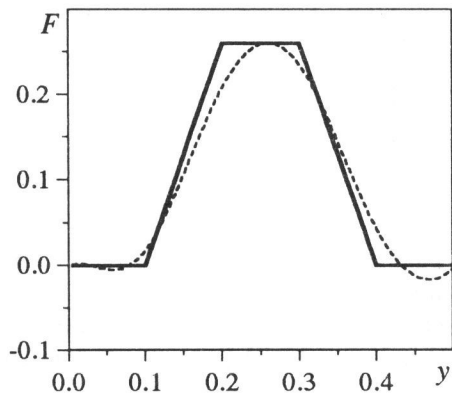


Рис. 5. Аппроксимация базисной функции $\ker A_1$

Сплошная линия – ϕ , пунктир – $F_1^{\alpha h}$ при $\alpha = 10^{-3}$

5.4. Исследование на (не)единственность для уравнения в волноводе (5.1). Практическое применение методики исследования уравнения на (не)единственность к конкретному уравнению первого рода с приближенно заданным оператором позволяет получить важную информацию о точности, с которой должны быть заданы экспериментальные данные, чтобы обеспечить приемлемое качество определения искомого решения. Действительно, рассмотрим вариацию точного решения в направлении $F_1^{\alpha h}$: $\lambda F_1^{\alpha h}$, где λ – неопределенная константа, подлежащая оценке. Тогда соответствующая вариация правой части уравнения (5.1) будет $\lambda A F_1^{\alpha h}$. Таким образом, чтобы обеспечить относительную погрешность в решении в $k\%$ (в направлении $F_1^{\alpha h}$), необходимо обеспечить относительную точность задания правой части уравнения (5.1) в $\|A F_1^{\alpha h}\| / \|A F_{\text{mod}}\| k\%$. Направление $F_1^{\alpha h}$ выделено потому [12, 14], что вариация решения в этом направлении максимальна среди всех направлений, характеристика гладкости которых не превосходит $\|F_1^{\alpha h}\|_{W_2^1}$. Наша цель состоит не в демонстрации формального применения теоремы 4.3, а в оценке необходимого уровня точности задания исходных данных.

На рис. 6 приведены графики $F_1^{\alpha h}$, F_{mod} (первые две функции для удобства сравнения нормированы: $\|F_1^{\alpha h}\| = \|F_{\text{mod}}\|$ при $\alpha = 1.5 \cdot 10^{-7}$ и $\alpha = 10^{-14}$). Величина $\|F_1^{\alpha h}\|_{W_2^1}$ монотонно возрастает, она принимает значения: $2.5 \cdot 10^4$ при $\alpha = 1.5 \cdot 10^{-4}$ и $4.23 \cdot 10^4$ при $\alpha = 10^{-14}$ ($\|A F_{\text{mod}}\| = 1139.97 \cdot 10^{-2}$). Величина $\|A F_1^{\alpha h}\|$ монотонно убывает, ее значения $9.97 \cdot 10^{-2}$ при $\alpha = 1.5 \cdot 10^{-4}$ и $2.9 \cdot 10^{-3}$ при $\alpha = 10^{-14}$ ($\|A F_{\text{mod}}\| = 1.13$).

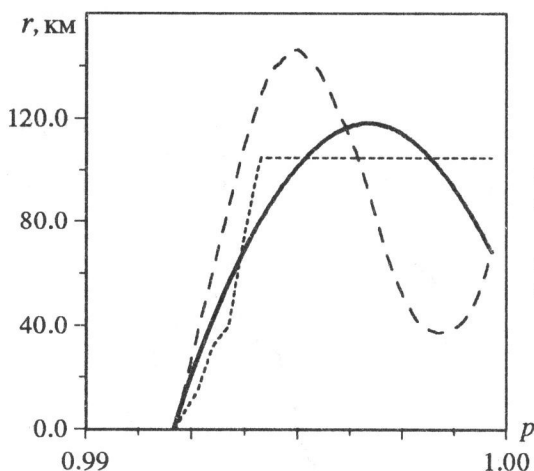


Рис. 6. Решение задачи (4.3) для уравнения (5.1)

Сплошная и штриховая линии – $F_1^{\alpha h}$ при $\alpha = 1.5 \cdot 10^{-7}$ и $\alpha = 10^{-14}$ соответственно; пунктир – F_{mod}

Таким образом, для функции g , вычисление которой описано в п. 5.1, в рамках заданной информации об искомой функции меры можно говорить о практической неединственности решения уравнения (5.1), поскольку найдена гладкая функция $F_1^{\alpha h}$ при $\alpha = 10^{-14}$ (см. рис. 6), для которой выполняется

$$\frac{\|A(F_{\text{mod}} \pm F_1^{\alpha h}) - A F_{\text{mod}}\|}{\|A F_{\text{mod}}\|} \approx 0.0029.$$

Чтобы относительная погрешность решения $\|\Delta F\| / \|F_{\text{mod}}\|$ не превышала 10%, относительная погрешность правой части $\|\Delta R\| / \|R_{\text{mod}}\|$ должна быть не более 0.029%. Подобная точность для экспериментальных данных практически недостижима. Один из возможных путей преодоления этой трудности заключается в привлечении дополнительной априорной информации об искомой функции F . Другой путь состоит в подборе условий эксперимента (функции g), для которых требования к точности задания правой части уравнения (5.1) менее жесткие, что будет предметом дальнейших исследований. В качестве предварительного шага в этом направлении (чтобы продемонстрировать возможность улучшения ситуации) приведем результаты расчетов при частотах: $f_h = 1.5$, $f_1 = 2.0$, $f_2 = 10$ МГц. В этом случае для обеспечения относительной точности решения порядка 10% необходимо обеспечить относительную погрешность задания правой части $\|\Delta R\| / \|R_{\text{mod}}\|$ порядка 0.5%. Для этих частот можно сделать вывод о практической единственности решения уравнения (5.1), и требования к точности задания правой части не являются чрезмерно жесткими.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как показано в работе, исследуемое уравнение после дискретизации можно также редуцировать к канонической задаче линейного программирования и использовать традиционный набор методов ее решения. Такая методика успешно применялась для решения задачи сеймики [17]. Однако в отличие от предлагаемого нами подхода эта методика более трудоемка, и обоснование ее устойчивости (регулярности), по-видимому, возможно только в случае компактного множества допустимых решений.

Благодарности. Авторы выражают признательность А.С.Игумнову за помощь в эксплуатации системных программных средств. Работа финансировалась Международным центром науки и технологии (грант 008-94).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бессонова Э.Н., Маркушевич В.М., Савин И.В. и др. Обратная задача радиозондирования ионосферы при наличии волноводов (долин). Единственность решения // Наст. сб.
2. Гервер М.Л., Маркушевич В.М. Определение по годографу скорости распространения сейсмической волны // Методы и программы для анализа сейсмических наблюдений. М.: Наука, 1967. С.3-51. (Вычисл. сейсмология; Вып.3).
3. Митра С.К. Верхняя атмосфера. М.: Изд-во иностр.лит., 1955. 640 с.
4. Маркушевич В.М., Левшенко В.Т. Об определении скорости по годографу в диспергирующей среде с известным законом дисперсии // Методы и алгоритмы интерпретации сейсмологических данных. М.: Наука, 1980. С.84-90. (Вычисл. сейсмология; Вып.13).
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 542 с.
6. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 316 с.
7. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: ГИТТЛ, 1957. 519 с.

8. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
9. *Леонов А.С.* Кусочно-равномерная регуляризация некорректных задач с разрывными решениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1982. Т.22, N 3. С.516-531.
10. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995. 311 с.
11. *Агеев А.Л.* Регуляризация нелинейных операторных уравнений на классе разрывных функций // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т.20, N 4. С.819-826.
12. *Молчан Г.М.* О единственности обратной кинематической задачи для диспергирующих сред // Методы и алгоритмы интерпретации сейсмологических данных. М.: Наука, 1980. С.84-90. (Вычисл. сейсмология; Вып.13).
13. *Агеев А.Л.* Алгоритмы конечномерной аппроксимации стабилизирующих добавок // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1991. Т.31, N 7. С.943-952.
14. *Васин В.В., Агеев А.Л.* Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Наука, 1993. 262 с.
15. *Маслов В.П.* Существование решения некорректной задачи эквивалентной сходимости регуляризационного процесса // УМН. 1968. Т.23, N 3. С.183-184.
16. *Агеев А.Л.* К вопросу о построении оптимального метода решения линейного уравнения 1 рода // Изв. вузов. Математика. 1983. Т.250, N 3. С.67-68.
17. *Молчан Г.М.* Об использовании отраженных волн в рамках τ -метода для диспергирующих сред // Теория и анализ сейсмологических наблюдений. М.: Наука, 1979. С.115-124. (Вычисл. сейсмология; Вып.12).