УДК 519.711.3

РЕКОНСТРУКЦИЯ ПОЛЯ ОБЪЕМНЫХ СИЛ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ НЕТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

В.И.Максимов
Институт математики и механики
Уральского отделения Российской академии наук

Изучается задача реконструкции неизвестных возмущений, действующих на динамическую систему, описываемую волновым уравнением. Указывается устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм, который основан на одном из подходов к решению обратных задач [1–4].

RECONSTRUCTION OF DISTRIBUTED FORCES BASED ON INACCURATE MEASUREMENTS

V.I.Maksimov
Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Division, Russian Academy of Sciences

The problem of reconstruction of unknown disturbances acting upon a dynamical system described by the wave equation is considered. A regularized algorithm stable with respect to information noise and computational errors is constructed. The algorithm is based on the approach developed in [1–4].

ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена изучению волновых уравнений, которые описывают в рамках линейной теории упругости смещения точек среды. Эти уравнения формализуются в виде абстрактных операторных уравнений второго порядка. Последние решаются методом транспонирования, который был предложен известным французским математиком Ж.Л.Лионсом. Большое внимание к этому методу обусловлено, в частности, тем, что, используя аппарат транспонирования, удается дать математически строгие определения решений для широкого круга новых классов систем математической физики.

Сформулируем обсуждаемую в работе задачу – обратную задачу реконструкции, или, как часто говорят, восстановления неизвестных возмущений, действующих на заданную динамическую систему, описываемую волновым уравнением. Коротко суть этой задачи состоит в следующем. Имеется упругое тело, подверженное воздействию поля объемных сил. В дискретные, достаточно частые моменты времени в некоторых участках тела замеряются средние смещения материальных точек. Требуется синхронно с развитием процесса деформации и перемещения тела организовать процедуру восстановления истинной (неизвестной) интенсивности действующего поля сил. Так как из-за погрешности измерений точно восстановить это поле не представляется возможным, мы ставим задачу о приближенном реконструировании этой интенсивности.

Обратные задачи в последние годы активно исследуются. Один из подходов к решению подобного рода задач был предложен А.В. Кряжимским и Ю.С. Осиповым в середине 80-х годов [1] и активно разрабатывался до настоящего времени [2–4]. В отмеченных работах построены алгоритмы реконструкции неизвестных возмущений, использующие измерения в достаточно частые моменты времени полных фазовых состояний изучаемых объектов, которые описываются различными классами распределенных систем. Указанное требование измерения полных состояний выглядит неестественно в задачах математической геофизики. Действительно, это требование означает, что при рассмотрении достаточно большой области упругой среды (например, участка земной коры) мы должны обрабатывать значительные массивы данных, характеризующих в определенные моменты времени смещения всех или почти всех точек. Предлагаемый в данной статье алгоритм позволяет отказаться от этого довольно обременительного требования.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассматривается упругое тело, которое в недеформированном состоянии занимает некоторую открытую связную область $\Omega \subset R^n$ $(n = 1, 2, 3)$ с границей Σ (в частности, Ω может совпадать со всем пространством R^n). Тело подвержено воздействию поля объемных сил $f = (f_i(t, \eta))$, вызывающих движение всех его точек $x = (x_i) \in \Omega$. Смещение каждой материальной точки изменяется во времени $x = (x_i(t, \eta))$ и описывается дифференциальным уравнением

$$\sigma_{ij,j} - f_i = \rho \ddot{x}_i, \qquad i \in [1:n], \quad t \in T = [0, \vartheta]. \tag{1}$$

Здесь σ_{ij} – компоненты симметрического тензора напряжений; f_i – компоненты поля объемных сил, отнесенных к единице объема; ρ – плотность; x_i – компоненты вектора смещений; индексы i, j принимают значения от единицы до n. Точки над буквой означают дифференцирование по времени, нижние индексы справа от запятой – дифференцирование по пространственным координатам η_j. Всюду, где это особо не оговорено, подразумевается суммирование по повторяющимся (немым) индексам. В предположении линейной теории упругости тензор напряжений σ_{ij} связан с тензором малых деформаций ε_{pq} законом Гука:

$$\sigma_{ij} = c_{ijpq} \varepsilon_{pq}, \tag{2}$$

где $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(x_{i,j} + x_{j,i})$, $c := c_{ijpq}$, $c_{ijpq} \in L_\infty(\Omega)$, – тензор коэффициентов упругости, зависящих от $\eta \in \Omega$, удовлетворяющий условиям симметричности и эллиптичности: $c_{ijpq} = c_{jiqp} = c_{pqij}$, $c_{ijqp}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{qp} \geq C\varepsilon_{ij}\varepsilon_{qp}$, $C > 0$. В момент $t = 0$ заданы начальные положения точек среды $x(0)$ и $\dot{x}(0)$. На границе Σ области Ω в каждый момент $t \in T$ выполняются те или иные краевые условия. В простейшем случае можно считать

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad x(t)|_\Sigma = 0 \quad \forall t \in T. \tag{3}$$

Система (1)–(3) может быть записана в виде волнового уравнения

$$\ddot{x} + Ax = f, \quad t \in [0, \vartheta], \tag{4}$$

$$x(0) = x_0 \in V, \quad \dot{x}(0) = x_1 \in H,$$

где оператор A действует из пространства V в соболевское пространство $V^* = [H^{-1}(\Omega)]^n$ и задается равенством

$$\langle Ax, y\rangle = \int\limits_\Omega c_{ijpq}(\eta)\varepsilon_{ij}(x(\eta))\varepsilon_{pq}(y(\eta))\,d\eta \qquad \forall x, y \in V.$$

Здесь и ниже: $H = [L_2(\Omega)]^n$ и $V = [H_0^1(\Omega)]^n$ – пространства n-мерных функций $x(\eta)$, $\eta \in \Omega$ с нормами

$$|x|_H = \left(\sum_{j=1}^n |x_i|^2_{L_2(\Omega)}\right)^{1/2} \quad \text{и} \quad |x|_V = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2{}_{H_0^1(\Omega)}\right)^{1/2},$$

$H_0^1(\Omega)$ – стандартное соболевское пространство [5].

В дальнейшем полагаем, что область Ω достаточно гладкая. Тогда при $f(\cdot) \in L_2(T; H)$ уравнение (4) имеет единственное решение $x(\cdot) = x(\cdot\,; f)$ со свойствами

$$x \in C(T; V), \quad \dot{x} \in C(T; H), \quad \ddot{x} \in L_2(T; V^*), \tag{5}$$

где $C(T; V)$ – пространство непрерывных на отрезке T функций со значениями в V, $L_2(T; V^*)$ – пространство суммируемых с квадратом нормы функций со значениями в V^* (см. [5], теоремы 8.1, 8.2).

В вычислительной сейсмологии принято считать [6–9], что область очага землетрясений есть совокупность точек пространства, в каждой из которых нарушен закон Гука, т.е. связь между напряжениями и деформациями в течение некоторого промежутка времени не подчиняется этому закону. При этом смещения точек также описываются гиперболической системой вида (1):

$$\rho\ddot{x}_i = \sigma_{ij,j} + g_i. \tag{6}$$

Однако роль входных воздействий $f_i(t, \eta)$ играют величины $g_i = -\Gamma_{ij,j}$, где $\Gamma_{ij}(t, \eta) = \sigma_{ij}(t, \eta) - s_{ij}(t, \eta)$ – тензор избыточных напряжений, являющийся разностью между σ_{ij} – теми напряжениями в среде, которые существовали бы, если бы повсеместно выполнялся закон Гука, и s_{ij} – фактическими напряжениями в среде. Как правило (см. [8], с.10), эквивалентые силы $g_i(t, \eta)$ в системе (6) удовлетворяют тем же условиям, что и поле объемных сил $f_i(t, \eta)$. Поэтому можно считать, что в функционально-аналитическом виде процесс перемещения точек среды, вызванный влиянием сейсмических возмущений, также описывается уравнением (4).

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ

В общем случае, когда правая часть этого уравнения $f(\cdot)$ есть элемент пространства $L_2(T;V^*)$, решение $x(\cdot)$ определяется методом транспонирования (см. [5], гл. 3,11). Именно, при $f(\cdot) \in L_2(T;V^*)$ под решением (4) понимается единственная функция $x(\cdot) = x(\cdot\,; f(\cdot))$, обладающая следующими свойствами (см.[5], (9.21′)):

$$
\begin{aligned}
&x(\cdot) \in C(T;H), \quad \dot{x}(\cdot) \in C(T;V^*),\\
&t \to Ax(t) \in L_2(T;A) = \{v : v \in L_2(T;V), v(t) \in D(A),\\
&\text{почти всюду (п.в.) } t \in T, t \to Av(t) \in L_2(T;H)\},\\
&\int_0^{\vartheta} (x(t), A\psi(t) + \ddot{\psi}(t))_H\, dt = \int_0^{\vartheta} \langle f(t), \psi(t)\rangle\, dt + \ (x_1, \psi(0))_H - (x_0, \dot{\psi}(0))_H\\
&\forall\, \psi(\cdot) \in X_\vartheta \cap L_2(T;A).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Здесь $D(A)$ – область определения оператора A; $(\cdot,\cdot)_H$ – скалярное произведение в гильбертовом пространстве H; X_ϑ – множество, пробегаемое решением $x(\cdot)$ уравнения (4) (с нулевым краевым условием $x(\vartheta) = \dot{x}(\vartheta) = 0$), когда $f(\cdot)$ пробегает $L_2(T;H)$. В частности, решение уравнения

$$
\ddot{x} + A_1 x = \sum_{j=1}^{\mu} u_j(t) \otimes \delta(\eta - \eta^j), \tag{8}
$$

$$
x = x(t,\eta) \in R, \quad \eta, \eta^j \in \Omega, \quad u = u(\cdot) = \{u_j(\cdot)\}_{j=1}^{\mu} \in L_2(T;R^\mu)
$$

может быть определено согласно правилу (7) (символ $\delta(\eta-\eta^j)$ означает δ-функцию Дирака). Именно: если в уравнении (8) A_1 – эллиптический оператор

$$
A_1 x = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \eta_j}\left(a_{ij}\frac{\partial x}{\partial \eta_j}\right),
$$

где $a_{ij} = a_{ij}(\eta)$ – достаточно гладкие коэффициенты, удовлетворяющие условию симметричности $a_{ij} = a_{ji}$ и коэрцитивности

$$
\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\eta)\xi_i\xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \ \text{ п.в. в } \Omega, \quad \alpha > 0,\ \xi_i \in R,
$$

то решение (8) есть функция $x(\cdot) = x(\cdot\,; u(\cdot))$ со свойствами

$$
\begin{aligned}
&x(\cdot) \in C(T; L_2(\Omega)) \cap L_2(T; H_0^1(\Omega)),\\
&\dot{x} \in L_2(T; H^{-1}(\Omega)), x(t) \in H_2(\Omega), \text{ п.в. } t \in T,\\
&\int_0^{\vartheta} (x(\tau), A_1\psi(\tau) + \ddot{\psi}(\tau))_{L_2(\Omega)}\, d\tau = \sum_{j=1}^{\mu} \int_0^{\vartheta} \psi(\eta^j,\tau) u_j(\tau)\, d\tau \ +\\
&+(x_1, \psi(0))_{L_2(\Omega)} - (x_0, \dot{\psi}(0))_{L_2(\Omega)} \qquad \forall \psi(\cdot) \in X_\vartheta \cap L_2(T; A_1),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$L_2(T; A_1) =$$
$$= \{v : v \in L_2(T; H_0^1(\Omega)), v(t) \in H_2(\Omega), \text{ п.в. } t \in T, \ t \to A_1 v(t) \in L_2(T; L_2(\Omega))\}.$$

В силу теорем вложения Соболева [5] при $n \leq 3$ $H^2(\Omega)$ вложено в $C(\Omega)$, следовательно, $\psi(\cdot) \in L_2(T; H^2(\Omega))$ и $\psi(\eta^j, t)$ имеет смысл (а отображение $t \to \psi(\eta^j, t)$ принадлежит пространству $L_2(T; R)$). В дальнейшем будем рассматривать систему (8), имея в виду, что все наши построения могут быть перенесены на случай других систем вида (4). Заметим, что система (8) описывает ситуацию, когда имеются точечные источники возмущений, например взрывы.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Обсуждаемая задача состоит в следующем. Имеется система (8), на которую действует неизвестное поле сил интенсивностью $\{u_j(t)\}_{j=1}^{\mu}$, $t \in T$, сосредоточенных в фиксированных точках $\eta^j \in \Omega$. В дискретные, достаточно частые моменты времени $\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^{m}$, $\tau_0 = 0$, $\tau_m = \vartheta$, $\tau_i = \tau_{i-1} + \delta$, $\delta > 0$ в некоторых областях $\Omega_k \in \Omega$, $k \in [1 : \nu]$ замеряются (с ошибкой) "средние" значения $x(\tau_i, \eta)$. Результаты измерений есть векторы $z^*(\tau_i) \in R^\nu$ такие, что

$$|z^*(\tau_i) - z(\tau_i)| \leq h, \quad i \in [0 : m], \quad z(t) = Px(t). \tag{10}$$

Здесь $|\cdot|$ – норма в R^ν, h – величина информационной погрешности, $Px = \{\int_\Omega \omega_j(\eta) x(\eta)\, d\eta\}_{j=1}^{\nu}$, функции $\omega_k(\eta)$ сосредоточены в областях Ω_k, т.е. $\omega_k(\eta) = 0$, если $\eta \in \Omega/\Omega_k$. Требуется указать процедуру приближенного вычисления функций $u_j(\cdot) \in L_2(T; R)$, $j \in [1 : \mu]$. Подчеркнем, что относительно функций $u_j(\cdot)$ известно лишь – это суммируемые с квадратом функции.

Ниже мы обоснуем один алгоритм решения рассматриваемой задачи для системы (8), который основан на идеях теории позиционного управления (см.[1–4]). В дальнейшем считаем выполненными следующие условия:

а) $\omega_k \in H_2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \ \ \forall k \in [1 : \nu]$;

б) система

$$\begin{aligned} &\ddot{w}_{tt}(t; \sigma) + A_1 w(t, \sigma) = 0, \quad t \in [0, \sigma - \varepsilon], \\ &w(\sigma - \varepsilon; \sigma) = \omega_k \varepsilon / 2, \quad \dot{w}_t(\sigma - \varepsilon; \sigma) = -\omega_k, \\ &k \in [1 : \nu], \ \sigma \in (0, \vartheta], \ \varepsilon \in (0, \sigma) \end{aligned} \tag{11}$$

имеет единственное решение $w(t; \sigma) = w_\varepsilon^{(k)}(t; \sigma)$, $t \in [0, \sigma - \varepsilon]$ такое, что

$$\int_0^{\sigma-\varepsilon} (w_\varepsilon^{(k)}(\eta^j, t; \sigma) - w^{(k)}(\eta^j, t; \sigma)) \varphi(t)\, dt \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0+$$
$$\forall \varphi(\cdot) \in L_2(T; R), \quad \forall j \in [1 : \mu].$$

Здесь $w^{(k)}(\cdot\,; \sigma)$ – решение системы (11) при $\varepsilon = 0$, символ $\dot{w}_t(t; \sigma)$ означает производную функции $w(t; \sigma)$ по первому аргументу.

Согласно теоремам 8.1 и 8.2 работы [5], $w^{(k)}(\cdot\,;\sigma) \in X_{\sigma-\varepsilon}$, причем функции из $X_{\sigma-\varepsilon}$ обладают свойствами (5) (в (5) следует заменить T на $[0,\sigma-\varepsilon]$). Условие б) выполнено для достаточно гладких ω, Σ и a_{ij}. Заметим, что свойства регулярности решений гиперболических уравнений систематически изучались в работах [10, 11].

4. УСЛОВИЕ РЕКОНСТРУИРУЕМОСТИ

Прежде чем переходить к алгоритму решения, опишем множество $U(z(\cdot))$ – совокупность всех функций $v(\cdot) \in L_2(T;R^\nu)$, совместимых с данным "измерением" $z(t) = Px(t)$, $t \in T$. Введем обозначения

$$\varphi_k(t;\sigma) = \{w^{(k)}(\eta^1,t;\sigma),\dots,w^{(k)}(\eta^\mu,t;\sigma)\},$$

$$g_k(z(\sigma),\sigma) = z_k(\sigma) - (x_1, w^{(k)}(0;\sigma))_{L_2(\Omega)} + (x_0, \dot{w}_t^{(k)}(0;\sigma))_{L_2(\Omega)}.$$

Теорема 1. *$v(\cdot) \in U(z(\cdot))$ тогда и только тогда, когда*

$$\int_0^\sigma (\varphi_k(t;\sigma), v(t))_{R^\mu}\, dt = g_k(z(\sigma),\sigma) \tag{12}$$

для любых $k \in [1{:}\nu]$ и $\sigma \in T$.

Таким образом, рассматриваемая задача состоит в построении алгоритма приближенного вычисления некоторой функции $u(\cdot)$ из множества $U(z(\cdot))$ функций $v(\cdot) \in L_2(T;R^\nu)$, удовлетворяющих (12). Когда множество $U(z(\cdot))$ одноэлементно, эта функция и есть истинная интенсивность действующего поля сил.

5. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Предположим, что $\nu = \mu$, матричная функция

$$\Phi^0(t,\sigma) = \{\varphi_k(\sigma,t)\}_{k=1}^{\nu}, \quad t \ge \sigma, \quad \Phi^0(t,\sigma) = 0, \quad t < \sigma,$$

непрерывна по совокупности переменных при $0 \le \sigma \le t \le \vartheta$, функции $g(z(t),t)$, $\Phi(t,\tau)$ и $\dot{\Phi}_t(t,\tau)$ непрерывно дифференцируемы по t. Интегральное уравнение Вольтерра II рода

$$\alpha I p(t) + \int_0^t \Phi(t,\tau)p(\tau)\,d\tau = g(z(t),t), \quad t \in T,$$

имеет при $\alpha > 0$ единственное (в $L_2(T;R^\nu)$) решение $p(t) = p_\alpha(t)$ такое, что

$$p_\alpha(\cdot) \to U_*(z(\cdot)) \quad \text{в} \quad L_2(T;R^\nu) \quad \text{при} \quad \alpha \to 0. \tag{13}$$

Здесь $U_*(z(\cdot)) = \{v(\cdot) : v(t) = \int_0^t v_*(\tau)\,d\tau,\ t \in T,\ v_*(\cdot) \in U(z(\cdot))\}$, $\Phi(t,\tau) = -\dot{\Phi}^0_\tau(t,\tau)$, I – единичная матрица, $g(z(t),t) = \{g_k(z(t),t)\}_{k=1}^{\nu}$. Будем считать также, что множество $U(z(\cdot))$ ограничено в $L_2(T;R^\nu)$. Сходимость (13) имеет место (см. например, [12]), когда решение $p(\cdot)$ уравнения Вольтерра I рода [13]

$$\int_0^t \Phi(t,\tau)p(\tau)\,d\tau = g(z(t),t), \quad t \in T,$$

таково, что $p(\cdot) \in C^1(T;R^\nu)$, причем ранг матрицы $\Phi(t,t) = \{\omega_k(i,j)\}_{j=1}^\nu$ равен ν (см. также [11], теорема 2.5.2). Заметим, что при выполнении последнего равенства множество $U(z(\cdot))$ одноэлементно (состоит из единственного элемента – истинной интенсивности $\{u_j(t)\}_{j=1}^\nu$, $t \in T$), если функция $t \to g(z(t),t)$ дифференцируема, причем $\dot{g}_t(z(t),t) \in L_2(T;R^\nu)$.

Перейдем к описанию алгоритма. Фиксируем семейство Δ_h разбиений интервала T с диаметрами $\delta(h)$:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta, \quad \tau_{h,i+1} - \tau_{h,i} = \delta(h).$$

Введем разностную управляемую систему

$$w^{(1)}(\tau_{i+1}) = w^{(1)}(\tau_i) + \delta\alpha I v_i^h, \quad w^{(j)}(0) = 0,$$

$$w^{(2)}(\tau_{i+1}) = \delta^2 \sum_{k=1}^{i+1}\sum_{j=1}^{k} \Phi(\tau_k,\tau_{j-1})v_{j-1}^h, \quad \tau_i = \tau_{h,i}, \quad i \in [1:m_{h-1}],$$

$$w^{(3)}(\tau_{i+1}) = \delta \sum_{j=1}^{i+1} \Phi(\tau_{i+2},\tau_{j-1})v_{j-1}^h, \quad w^{(j)} \in R^\nu, \quad j \in [1:3].$$

Перед началом процесса фиксируем значение $h \in (0,1)$ и разбиение $\Delta = \Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}$ отрезка T.

Работа алгоритма разбивается на $m_h - 1$ однотипных шагов. На i-м шаге, выполняющемся на интервале времени $\delta_{h,i} = [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$, $i \geq 1$, производятся следующие операции. В момент $\tau_{h,i}$ вычисляются вектора

$$\nu_i = g^*(\tau_i) - w^{(3)}(\tau_i), g^*(\tau_i) = \{g_j(\tau_i)\}_{j=1}^\nu,$$

$$g_k^*(\tau_i) = z_k^*(\tau_i) - (x_1, w^{(k)}(0;\tau_i))_{L_2(\Omega)} + (x_0, \dot{w}_t^{(k)}(0;\tau_i))_{L_2(\Omega)}, \quad k \in [1:\nu].$$

Затем определяется управление

$$v^h(t) = v_i^h, \qquad t \in \delta_{h,i},$$

$$v_i^h = \begin{cases} \alpha^{-1}|\nu_i|s_i \;/\; |s_i|, & |s_i| \neq 0, \\ 0, & |s_i| = 0, \end{cases}$$

$$s_i = \delta \sum_{j=0}^{i} g^*(\tau_j) - w^{(1)}(\tau_i) - w^{(2)}(\tau_i).$$

После этого разностная система переходит из состояния

$$w(\tau_{h,i}) = \{w^{(1)}(\tau_{h,i}), w^{(2)}(\tau_{h,i}), w^{(3)}(\tau_{h,i})\} \in R^{3\nu}$$

в состояние $w(\tau_{h,i+1})$. Процесс заканчивается в момент времени ϑ.

Пусть функции $\alpha(h) \in (0,1)$ и $\delta(h) \in (0,1)$ таковы, что

$$\delta(h) \to 0, \quad \alpha(h) \to 0, \quad \gamma(\alpha(h),\delta(h),h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0,$$

где $\gamma(\alpha,\delta,h) = \{h^2\delta^{-1} + \omega^2(\delta) + h + \delta^{1/2} + \omega_g(\delta)\}^{1/2}\beta(\alpha)$,

$$\beta(\alpha) = \exp\{d\alpha^{-(1+\varepsilon)}\},$$

$$d = d_1 + k_*\vartheta,$$

$$d_1 = 2\vartheta\max\{(1+g)^2, k_0^2\vartheta\},$$

$$k_* = \sup\{|\Phi(s,s)|_\nu + \vartheta|\dot\Phi_\tau(s,\tau)|_\nu:\ s\in[0,\vartheta], \tau\in[0,s]\},$$

$$g = \sup_{t\in T}|g(z(t),t)|,\ |\Phi(\tau,t)|_\nu \le k_0 \quad \forall t,\tau\in T,$$

$|\cdot|_\nu$ – норма матрицы, $\omega_g(\cdot)$ и $\omega(\cdot)$ – модули непрерывности функций $g(z(t),t)$ и $\Phi(\tau,\sigma)$, $0\le\sigma\le\tau\le\vartheta$, $\varepsilon>0$ – постоянная.

Когда функции $g^{1/4}(z(t),t)$ и $\Phi^{1/2}(\tau,\sigma)$ липшицевы, можно считать $\gamma(\alpha,\delta,h) = \{h^2\delta^{-1} + h + \delta^{1/2}\}^{1/2}\beta(\alpha)$. Если, кроме того, положить $\delta(h)=h$, то в качестве функции γ удобно взять функцию $\gamma(\alpha,h) = h^{1/2}\exp\{d\alpha^{-(1+\varepsilon)}\}$.

Теорема 2. При $h\to 0$

$$\inf_{v(\cdot)\in U_*(z(\cdot))}\sup_{t\in T}\left|\int_0^t\{v^h(\tau)-v(\tau)\}\,d\tau\right|\to 0.$$

Замечания.

1. Приведенный в работе алгоритм легко модифицируется для случаев, когда среда подвержена воздействию других типов полей объемных сил, например функции $f(t,\eta)$ (см. уравнения (1), (4)) являются элементами пространства $L_2(T;H)$.

2. Вместо разностной управляемой системы можно взять соответствующую систему, описываемую обыкновенными дифференциальными уравнениями.

3. Аналогичные конструкции для параболических систем обсуждались в работах [14–18].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство Теоремы 1. Пусть $v(\cdot)\in U(z(\cdot))$. Тогда для всех $k\in[1:\nu]$ имеем

$$z_k(t) = (\omega_k, x(t))_{L_2(\Omega)}.$$

Покажем, что справедливо равенство (12). Возьмем произвольные $\sigma\in(0,\vartheta)$ и $\varepsilon\in(0,\sigma)$. Введем семейство функций $\psi_\varepsilon^{(k)}(\cdot)$, $\varepsilon>0$, $k\in[1:\nu]$

$$\psi_\varepsilon^{(k)}(\tau;\sigma) = \begin{cases} w_\varepsilon^k(\tau;\sigma), & \tau\in[0,\sigma-\varepsilon],\\ \dfrac{\omega_k}{\varepsilon}\dfrac{(\sigma-\tau)^2}{2}, & \tau\in(\sigma-\varepsilon,\sigma),\\ 0, & \tau\in[\sigma,\vartheta]. \end{cases}$$

Заметим, что $\left|\dot\psi_{\varepsilon t}^{(k)}(t,\sigma)\right|_{t=\sigma} = 0$, $\quad\psi_\varepsilon^{(k)}(\sigma,\sigma)=0$, $\quad\psi^{(k)}(\sigma-\varepsilon,\sigma) = \omega_k\varepsilon/2$,

$$\left|\dot\psi_{\varepsilon t}^{(k)}(t;\sigma)\right|_{t=\sigma-\varepsilon+} = -\omega_k, \qquad \ddot\psi_{\varepsilon tt}^{(k)}(t;\sigma) = \frac{\omega_k}{\varepsilon}, \quad t\in(\sigma-\varepsilon,\sigma).$$

Подставив в равенство (9) вместо функции $\psi(\cdot)$ функцию $\psi_\varepsilon^{(k)}(\cdot\,;\sigma)$, а вместо функции $u(\cdot)$ – функцию $v(\cdot)$, получим в силу условия a)

$$\int_0^{\sigma-\varepsilon} (x(\tau),\, A_1\psi_\varepsilon^{(k)}(\tau;\sigma) + \ddot{\psi}_{\varepsilon\,\tau\tau}^{(k)}(\tau;\sigma))_{L_2(\Omega)}\, d\tau +$$

$$+ \int_{\sigma-\varepsilon}^{\sigma} \left(x(\tau),\, \frac{(\sigma-\tau)^2}{2\varepsilon} A_1\omega_k + \frac{\omega_k}{\varepsilon}\right)_{L_2(\Omega)} d\tau =$$

$$= \sum_{j=1}^{\mu} \int_0^{\sigma} \psi_\varepsilon^{(k)}(\eta^j,\tau;\sigma) v_j(\tau)\, d\tau + (x_1, \psi_\varepsilon^{(k)}(0))_{L_2(\Omega)} - (x_0, \dot{\psi}_\varepsilon^{(k)}(0))_{L_2(\Omega)}. \qquad (\Pi 1)$$

Переходя в (П1) к пределу при $\varepsilon \to 0+$, будем иметь при всех $\sigma \in T$

$$(x(\sigma), \omega_k) = \int_0^{\sigma} \sum_{j=1}^{\mu} w^{(k)}(\eta^j,\tau;\sigma) v_j(\tau)\, d\tau + (x_1, \psi^{(k)}(0))_{L_2(\Omega)} - (x_0, \dot{\psi}^{(k)}(0))_{L_2(\Omega)}.$$

Равенство (12) установлено. Обратно, пусть $v(\cdot)$ удовлетворяет (12) для всех $\sigma \in T$ и $k \in [1:\nu]$. Предположим, что $v(\cdot) \notin U(z(\cdot))$. Тогда существуют $\sigma \in (0,\vartheta)$ и $k_* \in [1:\nu]$ такие, что

$$z_{k_*}(\sigma) \neq (\omega_{k_*}, x_v(\sigma))_{L_2(\Omega)}, \qquad x_v(\cdot) = x(\cdot\,; v(\cdot)).$$

Повторяя те же рассуждения, что и выше, приходим к равенству (12), где $z(\sigma)$ заменено на $Px(\sigma)$. Вычтя это новое равенство из (12), получаем противоречие. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2 основывается на следующей лемме.

Лемма 1. Равномерно по всем $h, \alpha(h) \in (0,1)$, разбиениям $\{\Delta_h\}$ с диаметрами $\delta = \delta(h) \in (0,1)$ и $z^*(\cdot)$, удовлетворяющим (10), справедливы неравенства

$$\varepsilon(\tau_i) \equiv \left| \int_0^{\tau_i} g(\tau)\, d\tau - w^{(1)}(\tau_i) - w^{(2)}(\tau_i) \right|^2 \leq c\gamma_1(\alpha,\delta,h) \quad \forall i \in [1:m_h],$$

$$\sum_{j=1}^{m_h-1} \delta |v_{j-1}^h|^2 \leq c_* \varkappa(\alpha).$$

Здесь $\gamma_1(\alpha,\delta,h) = \{h^2\delta^{-1} + h + \delta + \omega_g(\delta)\}\varkappa(\alpha)$, $\varkappa(\alpha) = \alpha^{-4}\exp\{d\alpha^{-2}\}$.

Доказательство Леммы 1. Оценим изменение величины

$$\varepsilon(\tau_i) = \left| \int_0^{\tau_i} g(\tau)\, d\tau - \sum_{k=1}^{i} \alpha\delta I v_{k-1}^h - \sum_{k=1}^{i} \delta\Bigl(\sum_{j=1}^{k} \delta\Phi(\tau_k, \tau_{j-1}) v_{j-1}^h \Bigr) \right|^2, \quad i \in [1:m_h]. \qquad (\Pi 2)$$

Имеем при $s \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$

$$\left|\int_0^s \Phi(s,\tau)v^h(\tau)\,d\tau - \sum_{j=1}^{k}\delta\Phi(\tau_k,\tau_{j-1})v_{j-1}^h\right| \le$$
$$\le \left|\int_0^s \Phi(\tau_k,\tau)v^h(\tau)\,d\tau - \sum_{j=1}^{k}\delta\Phi(\tau_k,\tau_{j-1})v_{j-1}^h\right| + \int_0^s \omega(\delta)|v^h(\tau)|\,d\tau \le$$
$$\le \left|\int_0^{\tau_k} \Phi(\tau_k,\tau)v^h(\tau)\,d\tau - \sum_{j=1}^{k}\delta\Phi(\tau_k,\tau_{j-1})v_{j-1}^h\right| +$$
$$+ \int_0^s \omega(\delta)|v^h(\tau)|\,d\tau + k_0\int_{\tau_k}^s |v^h(\tau)|\,d\tau \le$$
$$\le 2\omega(\delta)\int_0^s |v^h(\tau)|\,d\tau + k_0\int_{\tau_k}^s |v^h(\tau)|\,d\tau \le 2\omega(\delta)\delta\sum_{j=1}^{k}|v_{j-1}^h| + k_0\delta|v_k^h|.$$

Кроме того,

$$\sum_{k=1}^{i}\delta\left\{2\omega(\delta)\delta\sum_{j=1}^{k}|v_{j-1}^h| + k_0\delta|v_k^h|\right\} \le \vartheta\left\{2\omega(\delta)\delta\sum_{j=1}^{i}|v_{j-1}^h|\right\} + k_0\delta\sum_{k=1}^{i}|v_k^h| =$$
$$= 2\vartheta\omega(\delta)\delta\sum_{j=1}^{i}|v_{j-1}^h| + \left\{\sum_{j=1}^{i}|v_{j-1}^h| + |v_k^h|\right\}k_0\delta \le \delta\{2\vartheta\omega(\delta)+k_0\delta\}\sum_{j=1}^{i+1}|v_{j-1}^h|.$$

Поэтому верна оценка

$$\varepsilon_1(\tau_i) \equiv \left|\int_0^{\tau_i}\left\{g(s) - \alpha I v^h(s) - \int_0^s \Phi(s,\tau)v^h(\tau)d\tau\right\}ds\right| \le \varepsilon^{1/2}(\tau_i) +$$
$$+ \left|\int_0^{\tau_i}\int_0^s \Phi(s,\tau)v^h(\tau)d\tau ds - \sum_{k=1}^{i}\sum_{j=1}^{k}\delta\Phi(\tau_k,\tau_{j-1})v_{j-1}^h\right| \le \varepsilon^{1/2}(\tau_i) + \lambda(\delta,i,v^h(\cdot)), \quad (\Pi 3)$$

где $\lambda(\delta,i,v^h(\cdot)) = \delta\{2\vartheta\omega(\delta)+k_0\delta\}\sum_{j=1}^{i+1}|v_{j-1}^h|$.

Далее справедливы равенства

$$\sum_{k=1}^{i+1}\sum_{j=1}^{k}\Phi(\tau_k,\tau_{j-1})v_{j-1}^h = \sum_{j=1}^{i+1}\left\{\sum_{k=j}^{i+1}\Phi(\tau_k,\tau_{j-1})v_{j-1}^h\right\}, \quad (\Pi 4)$$

$$\sum_{j=1}^{i+1}\sum_{k=j}^{i+1}\Phi(\tau_k,\tau_{j-1})v_{j-1}^h = \sum_{j=1}^{i}\sum_{k=j}^{i}\Phi(\tau_k,\tau_{j-1})v_{j-1}^h +$$
$$+ \sum_{j=1}^{i}\Phi(\tau_{i+1},\tau_{j-1})v_{j-1}^h + \sum_{k=j}^{i+1}\Phi(\tau_k,\tau_i)v_i^h. \quad (\Pi 5)$$

Из (П2)–(П5) следуют соотношения

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) = \varepsilon(\tau_i) + 2r_i'\mu_i + |\mu_i|^2, \tag{П6}$$

$$r_i = \int\limits_0^{\tau_i} g(\tau)\,d\tau - w^{(1)}(\tau_i) - w^{(2)}(\tau_i),$$

$$\mu_i = \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} g(\tau)\,d\tau - \delta^2\{2\Phi(\tau_{i+1},\tau_i) + \Phi(\tau_i,\tau_i)\}v_i^h -$$

$$-\delta^2\sum_{j=1}^{i}\Phi(\tau_{i+1},\tau_{j-1})v_{j-1}^h - \alpha\delta I v_i^h.$$

Воспользовавшись неравенством $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \le n\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$, получаем

$$|r_i| \le c_1 + c_2\delta\sum_{j=1}^{i}|v_{j-1}^h| \le c_1 + c_2\left\{\delta\vartheta\sum_{j=1}^{i}|v_{j-1}^h|^2\right\}^{1/2},$$

$$|\mu_i|^2 \le c_3\delta\left\{\delta g^2 + \sum_{j=1}^{i+1}\delta^2|v_{j-1}^h|^2 + \delta(\alpha^2+\delta^2)|v_i^h|^2\right\}.$$

Здесь константы c_j, $j\in[1:3]$ не зависят от i,δ. Далее, имеем в силу неравенств $|r_i - s_i| \le \vartheta h$ и (10)

$$r_i'\mu_i \le \vartheta h|\mu_i| + s_i'\left(\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} g(\tau)\,d\tau - \delta w_3(\tau_i) - \alpha\delta I v_i^h\right) + 3k_0\delta^2|s_i|\,|v_i^h| \le$$

$$\le \vartheta h|\mu_i| + 3k_0(\vartheta h + |r_i|)\delta^2|v_i h| + s_i'\delta(\omega_g(\delta) + g^*(\tau_i) - w_3(\tau_i) - \alpha I v_i^h) +$$

$$+h(\vartheta h + |r_i|).$$

Поэтому, принимая во внимание правило определения v_i^h, выводим из (П6)

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \le \varepsilon(\tau_i) + 2\vartheta h|\mu_i| + C_4(h + |r_i|)\delta^2|v_i^h| + |\mu_i|^2 + C_5\delta(h + \omega_g(\delta))(|r_i| + h). \tag{П7}$$

Заметим, что

$$|v_i^h|^2 \le |\nu_i|^2\alpha^{-2},$$

$$|\nu_i|^2 \le \{h + g + |w^{(3)}(\tau_i)|\}^2 \le 2(h+g)^2 + 2\vartheta k_0^2\delta\sum_{j=1}^{i}|v_{j-1}^h|^2.$$

Следовательно,

$$d_i \equiv |v_{i-1}^h|^2 \le c_0\alpha^{-2}\left\{1 + \delta\sum_{j=1}^{i-1} d_j\right\},$$

$$c_0 = 2\{(h+g)^2 + \vartheta k_0^2\}.$$

Отсюда, учитывая дискретное неравенство Гронуолла (см. [18], с.311, Лемма 6), заключаем

$$d_i \le c_0\alpha^{-2}\{1 + c_0\alpha^{-2}\vartheta\exp(c_0\vartheta\alpha^{-2})\} \le c_6\varkappa(\alpha),$$

$$\text{т.е.}\quad \sum_{j=1}^{m_h-1}\delta|v_{j-1}^h|^2 \le c_7\varkappa(\alpha).$$

Кроме того, верны оценки

$$|r_i| \le c_8\varkappa^{1/2}(\alpha), \qquad |\mu_i|^2 \le c_9\delta^2\varkappa(\alpha), \tag{П8}$$

$$(h + |r_i|)\delta^2|v_i^h| \le \delta^2(h^2 + |r_i|^2) + \delta^2|v_i^h|^2 \le c_{10}\delta^2\varkappa(\alpha). \tag{П9}$$

Следовательно,

$$2\vartheta h|\mu_i| \le \vartheta c_9^{1/2}h\delta(1 + \varkappa(\alpha)) \le c_{11}\{h^2 + \delta^2\}\varkappa(\alpha), \tag{П10}$$

$$\delta(h + \omega_g(\delta))(h + |r_i|) \le c_{12}\delta(h + \omega_g(\delta))\varkappa(\alpha). \tag{П11}$$

Объединив (П7)–(П11), получаем

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \le \varepsilon(\tau_i) + c_{13}\delta\{h^2\delta^{-1} + h + \delta + \omega_g(\delta)\}\varkappa(\alpha).$$

Лемма доказана.

Доказательство Теоремы 2. Из (П3) следует при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ неравенство

$$\alpha\varrho_{\alpha,h}(t) \le \mu_1(t, p_\alpha(\cdot), v^h(\cdot)) + \alpha\int_{\tau_i}^{t}|p_\alpha(\tau) - v^h(\tau)|\,d\tau +$$

$$+\varepsilon^{1/2}(\tau_i) + \lambda(\delta, i, v^h(\cdot)), \tag{П12}$$

$$\text{где}\quad \varrho_{\alpha,h}(t) = \left|\int_0^t\{p_\alpha(\tau) - v^h(\tau)\}\,d\tau\right|,$$

$$\mu_1(t, p_\alpha(\cdot), v^h(\cdot)) = 2\left|\int_0^t\int_0^s\Phi(s,\tau)\{p_\alpha(\tau) - v^h(\tau)\}\,d\tau\,ds\right|.$$

Учитывая Лемму 1, ограниченность множества $U(z(\cdot))$ и оценку для d_i (см. доказательство Леммы 1), получаем

$$\alpha\int_{\tau_i}^{t}|p_\alpha(\tau) - v^h(\tau)|\,d\tau \le \alpha\delta^{1/2}c_1\varkappa^{1/2}(\alpha), \tag{П13}$$

$$\lambda(\delta, i, v^h(\cdot)) \le c_2(\delta + \omega(\delta))\left\{\delta\sum_{j=1}^{i}|v_i^h|^2\right\}^{1/2} \le c_3(\delta + \omega(\delta))\varkappa^{1/2}(\alpha). \tag{П14}$$

Ввиду непрерывной дифференцируемости функций $\Phi(t,\tau)$ для оценки первого слагаемого в правой части неравенства (П12) можно воспользоваться интегрированием по частям:

$$\mu_1(t, p_\alpha(\cdot), v^h(\cdot)) \le \int_0^t \left| \int_0^s \Phi(s,\tau)\{p_\alpha(\tau) - v^h(\tau)\}\, d\tau \right| ds =$$

$$= \int_0^t \left\{ |\Phi(s,s)| \varrho_{\alpha,h}(s) + \int_0^s |\dot{\Phi}_\tau(s,\tau)| \varrho_{\alpha,h}(\tau)\, d\tau \right\} ds \le k_* \int_0^t \varrho_{\alpha,h}(\tau)\, d\tau. \qquad (\text{П}15)$$

Объединив (П12)–(П15) и учитывая Лемму 1, выводим

$$\alpha \varrho_{\alpha,h}(t) \le k_* \int_0^t \varrho_{\alpha,h}(\tau)\, d\tau + \gamma_2(\alpha,\delta,h),$$

$$\gamma_2(\alpha,\delta,h) = c^*[\{h^2\delta^{-1} + \alpha\delta^{1/2} + \omega^2(\delta) + h + \delta + \omega_g(\delta)\}\varkappa(\alpha)]^{1/2}.$$

Поэтому в силу дискретного неравенства Гронуолла имеем

$$\varrho_{\alpha,h}(t) \le c\gamma_2(\alpha,\delta,h)\alpha^{-2}\exp\{k_*\vartheta\alpha^{-1}\}, \quad t \in T. \qquad (\text{П}16)$$

Так как $\alpha = \alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$, то при достаточно малых h

$$\varkappa^{1/2}(\alpha)\alpha^{-2}\exp\{k_*\vartheta\alpha^{-1}\} \le \beta(\alpha). \qquad (\text{П}17)$$

Утверждение теоремы следует из (П16),(П17) и равенств $\Phi^0(t,t) = 0$, $\int_0^t \Phi^0(t,\tau)p(\tau)\,d\tau = \int_0^t \Phi(t,\tau)\int_0^\tau p(\xi)\,d\xi\,d\tau$. Теорема доказана.

Благодарности. Автор благодарит Б.Г. Букчина, А.В. Ландера и Е.Л. Резникова за плодотворные беседы, способствовавшие улучшению качества данной статьи. Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научно-технического центра (грант 008-94) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-0846).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. N 2. С.51-68.
2. *Кряжимский А. В., Осипов Ю.С.* Обратные задачи динамики и управляемые модели // Механика и научно-технический прогресс. Т.1. Общая и прикладная механика. М.: Наука, 1987. С.196-211.
3. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Задачи динамической регуляризации для систем с распределенными параметрами. Свердловск: ИММ УрО АН СССР, 1991. 104 с.
4. *Maksimov V.I.* An inverse problem of a differential equation in a Banach space // Appl. Math. and Comp. Sci. 1992. N 1. P.145–151.

5. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 372 с.
6. *Backus G., Mulcahy M.* Moment tensors and other phenomenological descriptions of seismic sources. 1. Continuous displacements // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1976. Vol.46. P.341–362.
7. *Backus G., Mulcahy M.* Moment tensors and other phenomenological descriptions of seismic sources. 2. Discontinuous displacements // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1976. Vol.47. P.301–330.
8. *Левшин А.Л., Яновская Т.Б., Ландер А.В. и др.* Поверхностные сейсмические волны в горизонтально-неоднородной Земле. М.: Наука, 1987. 278 с.
9. *Букчин Б.Г.* Предварительная оценка параметров очага Рачинского землетрясения 29 апреля 1991 г // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1992. N 5. С.5–13.
10. *Lasiecka I., Triggiani R.* A cosine operator approach to modelling $\mathbf{L}_2(O,T;\mathbf{L}_2(\Gamma))$ - boundary input hyperbolic equation // Appl. Math. and Optim. 1981. N.8. P.35–93.
11. *Lasiecka I., Triggiani R.* Regularity of hyperbolic equations under $\mathbf{L}_2(O,T;\mathbf{L}_2(\Gamma))$ - Dirichlet boundary terms // Appl. Math. and Optim. 1983. N.10. P.275–286.
12. *Кабанихин С.И.* Проекционно-разностные методы определения коэффициентов параболических уравнений. Новосибирск: Наука, 1988. 168 с.
13. *Денисов А.М.* О приближенном решении уравнении Вольтерра I рода // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т.15, N 4. С.1053–1056.
14. *Maksimov V.I.* Modelling of point sourses via the result of inaccurate measurements // Fifth Inter. Symp. on Dynamical Games and Appl. Grimetz. Geneve: Univ. de Geneve. 1992. P.107.
15. *Максимов В.И.* О динамическом оценивании управлений в условиях неопределенности // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. N 3. С. 127–132.
16. *Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I., Samarskaia E.A.* Input reconstructibility of Parabolic system. Laxenburg, 1995. 28 p.
17. *Розенберг В.Л.* Задача динамического восстановления функции источника в параболическом уравнениии // Тр. ИММ УрО РАН. 1995. Вып. 3. С.116–135.
18. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1972. 641 с.