# II. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

УДК 550.34

# ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ И ХАОС В ИЕРАРХИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ[1]

А.А. Белов

*Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук*

Рассмотрен класс иерархических моделей с взаимодействием произвольной степени нелокальности. Показано, что при некоторых дополнительных предположениях, а именно, при гипотезе универсальности, масштабной инвариантности, бутстрапа, а также при некоторых стандартных ренормгрупповых соображениях, система "кинетических уравнений" таких иерархических моделей может оказаться в классе вполне интегрируемых. Подробно рассмотрен пример такого рода системы. Для нее посторoен бигамильтонов формализм, найдено представление Лакса, получено уравнение Хироты. Непрерывный предел указанных моделей контролируется иерархией Кадомцева–Петвиашвили. Обсуждается возможная связь указанных моделей с иерархическими моделями, а также потенциальное применение к описанию геофизических сред в околокритическом режиме.

# INTEGRABILITY AND CHAOS IN HIERARCHICAL MODELS

A.A. Belov

*International Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences*

A class of hierarchical models with an arbitrary degree of interaction nonlocality is considered. It is shown that under certain additional assumptions, namely universality hypothesis, scale invariance, bootstrap, and under certain standard renormgroup considerations, the

[1]Работа является частью незаконченного цикла статей молодого талантливого физика-теоретика, трагически скончавшегося в марте 1995 г. Публикуемая статья посвящена иерархическим моделям, используемым при описании многих геофизических процессов, в частности процесса образования лавин или подготовки землетрясений. Работа сложна для геофизика-интерпретатора. Однако она безусловно важна, поскольку представляет заинтересованный взгляд физика-теоретика на современные проблемы геофизики и вводит в круг идей и методов современной теоретической физики. *Прим. ред.*

system of kinetic equations for such hierarchical models may appear to be in the class of completely integrable models. An example of such a system is discussed in detail. Bihamiltonian formalism for this system is built, the Lax representation is found, and the Hirota equations are obtained. The continuous limit of such models is controlled by the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy. Possible connection of the model with the hierarchical model of defect formation and interaction and potential applicability to description of geophysical media in almost critical regimes is also considered.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Данная статья является первой в серии работ, посвященных иерархическим моделям. В ней рассмотрена динамическая система с сильным нелинейным и нелокальным взаимодействием, которая могла бы служить прообразом для исследования критических режимов более реалистических моделей дефектов и описывает такие явления, как иерархическое разрушение, самоорганизующаяся критичность и т.д.

Модель построена при самых общих предположениях, родственных стандартным гипотезам, лежащим в основе статистической механики. Предположение о том, что система находится в критическом режиме, дает возможность существенно упростить кинетические уравнения и, как следствие, провести их исчерпывающий анализ.

В работе сформулирована модель, рассмотрен интегрируемый режим, постороен бигамильтонов формализм, на основе его доказана полная интегрируемость и вычислены интегралы движения. Кроме того, найдено представление Хироты, с помощью которого во второй части серии работ будет посторено преобразование Бэклунда в билинейном представлении и на его основе найдены $N$-солитонные решения, которые будут интерпретироваться как "события" (прообразы лавин, землетрясений или других катастрофических явлений). В третьей части будет сделана попытка построить некоторую эффективную динамику на универсальном грассмановом многообразии и в рамках этой картины сформулировать проблему распределения событий (аналог проблемы прогноза). Ожидается, что в силу "гипотезы универсальности" некоторые черты построенной модели могут описывать реальные геофизические явления.

### Схематическое описание модели

Приводимые ниже качественные соображения призваны дать интуитивное представление о возможном микроскопическом обосновании модели. Однако в дальнейшем изложении вся конструкция будет строиться феноменологически без всяких ссылок на микроскопику.

Основной задачей работы является не построение конкретной модели дефектов, а демонстрация того, как в такого рода моделях может быть математически формализована проблема прогноза.

Рассмотрим модель с дефектами. Будем предполагать, что дефекты иерархически упорядочены (по размеру, по запасенной энергии и т.д.) и существует механизм роста дефектов ранга $n$ за счет дефектов ранга $m < n$. Конкретный вид взаимодействия дефектов для нас не будет существенным, так же как размерность среды.

Обозначим посредством $A_n$ концентрацию дефектов $\gamma_n$ ранга $n$. В простейшем варианте можно считать, что дефекты ранга $n$ поглощают дефекты ранга $n-1$ и за счет этого растут (реакция типа $\gamma_{n-1}+\gamma_n \to \gamma_n+\gamma_n$), что приводит к кинетическому уравнению вида

$$\dot{A}_n = (A_{n-1} - A_{n+1})A_n, \tag{1.1}$$

совпадающему с хорошо известным уравнением Вольтерра.

Разумеется, приведенные выше рассуждения крайне наивны в силу того, что сечение поглощения дефекта ранга $n-1$ дефектом ранга $n$ отнюдь не пропорционально произведению их концентраций. Это связано с тем, что дефект ранга $n$ в процессе роста обедняет пространство вокруг себя дефектами ранга $n-1$ по сравнению со свободным пространством.

Чтобы учесть это явление, прибегнем к хорошо известному в физике методу ренормировки. Это означает следующее. Рассеяние дефектов будет опосредоваться промежуточным полем, которое описывает эффекты экранировки, или создание эффективной "шубы" обеднения дефектами меньшего ранга окрестности дефекта рассматриваемого ранга. Обозначим такое поле $B_n$.

Кинетическое уравнение (1.1) с учетом перенормировки примет вид

$$\dot{A} = (A_{n-1} - A_{n+1})A_n - (A_{n-1}B_{n-1} - B_nA_{n+1})A_n, \tag{1.2}$$

к которому надо добавить еще и кинетическое уравнение для самого поля $B_n$.

Поле $B_n$ естественно назвать полем иерархической локальности 2, так как по своему смыслу оно связывает объекты, лежащие по иерархии на двух смежных уровнях.

Кинетическое уравнение для поля $B_n$ может быть получено исходя из следующих соображений. В эволюцию поля $B_n$ вносят вклад два механизма. Первый связан с градиентом концентраций дефектов по иерархии. Изменение $B_n$ во времени, в силу этого механизма, пропорционально произведению градиента концентраций в "примыкающих" к $B_n$ ярусах иерархии $(A_{n+1}-A_n)$, интенсивности перехода по иерархии $(1-B_n)$ и самой величины $B_n$.

Второй механизм связан с учетом двухэтапных процессов, а именно: следует иметь в виду, что при рассмотрении процесса $\gamma_n \xrightarrow{\beta_n} \gamma_{n+1}$ через "обедняющее" поле $B_n$ концентрация $\gamma_n$ должна быть ренормирована с учетом обеднения в окрестности $\gamma_n$. Поэтому надо рассматривать двухэтапные процессы вида $\gamma_{n-1} \xrightarrow{\beta_{n-1}} \gamma_n \xrightarrow{\beta_n} \gamma_{n+1}$, что приводит к вкладу в $\dot{B}_n$ вида $A_{n-1}B_{n-1}B_n$. Аналогично за счет рассмотрения цепочек $\gamma_n \xrightarrow{\beta_n} \gamma_{n+1} \xrightarrow{\beta_{n+1}} \gamma_{n+2}$ получается вклад вида $-B_nB_{n+1}A_{n+2}$.

Упрощенное кинетическое уравнение для поля, следовательно, имеет вид

$$\dot{B}_n = (A_{n+1} - A_n)(B_n - B_n^2) + A_{n-1}B_{n-1}B_n - B_nB_{n+1}A_{n+2}, \tag{1.3}$$

и, таким образом, цепочка из кинетических уравнений (1.2), (1.3) оказывается замкнутой. Однако стандартные ренормгрупповые соображения приводят к модификации уравнения (1.3) за счет полей более высокой иерархической локальности.

Расчеты показывают, что результирующая система кинетических уравнений замыкается только на бесконечном наборе полей $\{B_n^{(p)}\}_{p=0}^{\infty}$, включающем поля сколь угодно высокой иерархической локальности $p+1$.

Неформально говоря, поля $B_n^{(p)}$описывают сложные эффекты взаимной экранировки в процессе $p$-кратного последовательного поглощения дефектов при их росте.

Разумеется, в общей ситуации подобные системы кинетических уравнений неразрешимы, однако привлечение дополнительных соображений, таких, как идея масштабной инвариантности и гипотезы универсальности критических явлений, позволяют редуцировать эту систему к виду, допускающему полную интегрируемость. Отметим, что подобные системы иерархических уравнений возникают также и при изучении турбулентности [1].

### Фундаментальные принципы теории критических явлений

Рассмотрим те дополнительные идеи, которые позволяют в общем классе кинетических уравнений рассмотренного выше вида выделить подкласс вполне интегрируемых уравнений. К числу таких гипотез относятся следующие: принцип масштабной инвариантности критических явлений, идея бутстрапа, гипотеза универсальности критических явлений, принцип конформной инвариантности и некоторые другие.

В теории фазовых переходов второго рода эти принципы продемонстрировали свою высокую эффективность при решении ряда задач [2]. Мы надеемся, что иерархические системы разрушения [3] и самоорганизующейся критичности [4–8] в некоторых своих аспектах напоминают системы статистической механики с фазовыми переходами второго рода [2] и для этих моделей могут быть сформулированы аналоги указанных принципов.

Разумеется, к сказанному утверждению следует подходить с известной осторожностью, поскольку в отличие от теории твердого тела, где имеется богатый эмпирический материал, позволяющий проверить эти принципы на огромном количестве реально существующих физических систем [2], в интересующей нас области ситуация кардинальным образом отличается: системы, которые можно сравнивать с теоретическими моделями, как правило, являются продуктами компьютерного моделирования [3, 8–10] и, в свою очередь, нуждаются в подтверждении их соответствия реальным (гео)физическим системам (лавины, землетрясения и т.д.). Однако с точностью до указанных ограничений можно надеяться, что общие принципы статистической механики, возможно в несколько видоизмененном виде, сохраняют свою силу также применительно и к рассматриваемой ситуации (самоорганизующаяся критичность, иерархические модели разрушения и т.д.).

Перечислим теперь упомянутые общие принципы с небольшими комментариями, касающимися их применения в рассматриваемом случае.

**Гипотеза масштабной инвариантности**, первоначально сформулированная Л.П. Кадановым, Б. Вайдомом, А.З. Паташинским, В.Л. Покровским и др., утверждает, что в критическом режиме системы корреляционная длина бесконечна, благодаря чему эффективная инфракрасная (длинноволновая) теория безмассова и при масштабных преобразованиях $x^\mu \mapsto \lambda x^\mu$ различные поля $\Phi_l$, описывающие флуктуации параметра порядка, преобразуются согласно $\Phi_l \mapsto \lambda^{\Delta_l}\Phi_l$, где $\Delta_l$ – аномальные размерности полей.

Непосредственным следствием этой идеи является *гипотеза универсальности критических явлений*, утверждающая, что тонкие детали микроскопической структуры системы становятся несущественными в критическом режиме и эффективная динамика может быть полностью реформулирована только в терминах флуктуаций параметра порядка. Неформально говоря, этот принцип утверждает, что по контрасту с огромным количеством моделей статистической механики разнообразие типов критического поведения существенно более ограничено. Это дает нам основание надеяться на содержательность математической модели даже в том случае, если она достаточно грубо и приближенно описывает детали микроскопического поведения системы. Предполагается, что существенные качественные характеристики она отражает верно (при условии, разумеется, что мы интересуемся только окрестностью критического режима системы, что в (гео)физической значимой ситуации обычно всегда выполнено). Обсуждение масштабной инвариантности в геофизике достаточно подробно приведено в [9].

**Гипотеза о существовании алгебры локальных полей** принадлежит А.М. Полякову, К.Г. Вильсону и Л.П. Каданову и утверждает следующее: в рассматриваемой (не обязательно лагранжевой) теории можно выделить класс полей, удовлетворяющих операторной алгебре

$$A_i(x_1)A_j(x_2) = \sum_k C_{ij}^k(x_1, x_2)A_k(x_2), \tag{1.4}$$

которая, как и подавляющее большинство подобных формул в конформной теории, должна пониматься следующим образом:

$$\langle A_i(x_1)A_j(x_2)X\rangle = \sum_k C_{ij}^k(x_1, x_2)\langle A_k(x_2)X\rangle \;\; \forall\, X = A_{l_1}(y_1)\ldots A_{l_N}(y_n).$$

Структурные коэффициенты $C_{ij}^k(x_1, x_2)$ в конформном случае (см. ниже) зависят только от разности аргументов $x_1 - x_2$. При $x_1 \to x_2$ коэффициенты $C_{ij}^k(x_1, x_2)$, вообще говоря, сингулярны.

Следует отметить, что в нелагранжевом случае коррелятор есть просто линейный функционал на алгебре полей и ему не следует придавать никакого теоретико-вероятностного содержания. Операторное разложение (1.4) играет роль умножения в операторной алгебре. Процедуру перехода от билокального объекта в левой части (1.4) к локальным полям в правой части будем называть слиянием полей $A_i$ и $A_j$, или операторным разложением (в дальнейшем изложении – OPE). Кроме того, обычно выделяется так называемый единичный оператор $I$, удовлетворяющий следующему свойству:

$$\langle IX\rangle = \langle X\rangle \;\; \forall\, X = A_{l_1}(y_1)\ldots A_{l_N}(y_N).$$

Таким образом, с точки зрения математики вся физика критических явлений, а также теория струн сводятся к изучению ассоциативных алгебр с единицей довольно общего вида, снабженных линейным функционалом. В данной работе мы попытаемся продемонстрировать, что область применения подобной точки зрения может быть существенно шире и охватывать такие явления, как иерархическое разрушение и самоорганизующаяся критичность (относительно недавно было показано, что подобная парадигма распространяется на турбулентность, гравитацию и полимеры).

**Гипотеза бутстрапа в современной физике** – распространенный "фольклор". Она восходит к известному персонажу барону Мюнхгаузену, который (в англоязычной версии) вытащил себя из болота за шнурки собственных ботинок, чем и объясняется этимология данного термина (bootstrap). Принцип бутстрапа состоит, в самом общем виде, в восстановлении всей информации о поведении системы по какому-то частному фрагменту с использованием некоторых дополнительных соображений, таких, как симметрийные принципы, самосогласованность теории и т.д. Применительно к конформной теории бутстрап означает получение уравнений на корреляторы исходя из принципа конформной инвариантности. У неспециалистов по конформной теории подобное утверждение может вызвать законное недоумение. Действительно, для того чтобы получить $n$-точечный коррелятор, надо вычислить соответствующий функциональный интеграл

$$\langle A_1(x_1)\dots A_N(x_N)\rangle = \int A_1(x_1)\dots A_N(x_N)\exp\{-\mathcal{L}[\varphi]\}\mathcal{D}\varphi, \tag{1.5}$$

где $\mathcal{D}\varphi$ – мера в функциональном пространстве.

Совершенно неочевидно, что эти интегралы будут удовлетворять еще каким-то дополнительным дифференциальным уравнениям, не связанным с уравнениями движения. Чтобы доказать гипотезу бутстрапа, следовало бы ввести операторную алгебру из лагранжева подхода, что в общем случае представляет собой чрезвычайно сложную (нерешенную) проблему. Почему же, тем не менее, гипотеза бутстрапа является столь популярной?

Можно указать три причины. Во-первых, функциональный интеграл – это не более чем символ и для придания смысла формулам (1.5) требуется еще придать смысл этой операции, что (как следует из печального опыта физиков) крайне непростая и запутанная процедура. По сути дела, вся современная физика сводится к приданию функциональному интегралу смысла в той или иной ситуации. Во-вторых, в физике сплошь и рядом встречаются модели, в которых лангранжиан не известен, и в данном случае бутстрапный подход является единственно возможной прескрипцией для вычисления корреляторов. Наконец, в-третьих, оказывается, что сами по себе бутстрапные уравнения могут быть достаточно содержательными, поскольку они ограничивают возможные типы поведения корреляторов и тем самым позволяют делать утверждения, общие для целого класса теорий.

**Принцип конформной инвариантности** [2], сформулированный А.М.Поляковым, является усилением принципа масштабной инвариантности и вытекает из него при некоторых дополнительных предположениях, в частности при гипотезе изотропии и однородности системы и локальности взаимодействия. Дальнейшая разработка этого принципа, опирающаяся на *гипотезу бутстрапа*, привела А.М.Полякова к созданию конформной теории поля (совместно с А.А.Белавиным и А.Б.Замолодчиковым) [11]. Применительно к иерархическим моделям, рассматриваемым в данной работе, указанная гипотеза нуждается в существенной переформулировке.

Далее будет построено обобщение конформной инвариантности для иерархических систем, сформулирован принцип иерархического бутстрапа и построена иерархическая конформная теория поля (точнее – ее квазиклассический предел), а также будут прослежены связи общей теории с солитонными иерархиями типа Кадомцева–Петвиашвили (КП) и нелинейными $W$-алгебрами. Специфической чертой двумерия является тот факт, что группа конформной симметрии бесконечномерна; это позволяет получить существенно более сильные ограничения на корреляторы, чем в $D$-мерном случае ($D \geq 3$).

Наличие конформной инвариантности приводит к выделению класса полей, которые преобразуются наиболее простым образом под действием конформной группы:

$$\Phi_l(z,\bar{z}) = \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^{\Delta_l} \left(\frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{z}}\right)^{\bar{\Delta}_l} \Phi_l(\zeta,\bar{\zeta}),$$

где $\Delta_l$, $\bar{\Delta}_l$ – вещественные числа, а $z$ – комплексная координата.

Такие поля называются примарными.

Приведем в качестве примера задачу о вычислении 4-точечного коррелятора (четырехточечника). Нетрудно показать, что общее требование конформной инвариантности предписывает четырехточечнику следующую форму:

$$\langle \Phi_1(z_1,\bar{z}_1)\ldots\Phi_4(z_4,\bar{z}_4)\rangle = \prod_{i<j}^{4} z_{ij}^{\gamma_{ij}}\, \bar{z}_{ij}^{\bar{\gamma}_{ij}}\, G_{34}^{12}(x,\bar{x}), \tag{1.6}$$

а $G$ является функцией ангармонических соотношений

$$x = \frac{z_{12}z_{34}}{z_{14}z_{32}}, \quad \bar{x} = \frac{\bar{z}_{12}\bar{z}_{34}}{\bar{z}_{14}\bar{z}_{32}},$$

где $z_{ij} = z_i - z_j$, $\bar{z}_{ij} = \bar{z}_i - \bar{z}_j$, а $\gamma_{ij}$, $\bar{\gamma}_{ij}$ – числовые параметры, строящиеся из аномальных размерностей $\Delta_k$, $\bar{\Delta}_k$ полей $\Phi_k$ ($k = 1,2,3,4$).

**Конформный бутстрап** является специализацией гипотезы бутстрапа на случай систем, обладающих конформной симметрией. Приведем конкретный пример конформного бутстрапа, а именно – условие ассоциативности для четырехточечника (1.6). Чтобы вычислить этот коррелятор, можно воспользоваться формулой (1.4) для операторного разложения тремя разными способами, проводя слияние полей 1 – 4 друг с другом в разной последовательности. Результат не должен зависеть от способа слияния, что дает следующие дополнительные условия на корреляционные функции:

$$G_{34}^{12}(x,\bar{x}) = G_{31}^{42}(1-x,1-\bar{x}) = x^{-2\Delta_3}\bar{x}^{-2\bar{\Delta}_3} G_{32}^{14}\left(\frac{1}{x},\frac{1}{\bar{x}}\right).$$

**Принцип замкнутости операторной алгебры** утверждает, что алгебра всех взаимно локальных полей должна быть замкнута по отношению к операторному разложению в том или ином смысле. Обычно предполагается, что можно выделить в операторной алгебре конечную или счетную систему образующих, таких, что при слиянии любых двух элементов из этой системы в правой части операторного разложения будут возникать нормально упорядоченные дифференциальные полиномы от операторов из этой же системы. Такой вид замкнутости был впервые введен А.Б.Замолодчиковым в 1985 г., и алгебры, замкнутые в этом смысле, известны как нелинейные $W$-алгебры.

### Заключительные замечания

Перед тем как непосредственно перейти к изучению рассматриваемой модели, остановимся кратко на вопросе о целесообразности выбранного нами подхода. Может показаться неоправданной сама попытка применить аппарат исследований, разработанный в квантовой теории поля, для описания геофизических явлений. Геофизика сегодня является наукой со сформировавшейся парадигмой, включающей богатый арсенал методов исследований и систему представлений о природе геофизических явлений, опирающуюся на достаточно широкий эмпирический и модельный базис. Еще одна модель, сама по себе, не может принести ничего кардинально нового.

Однако в геофизике присутствует крайне серьезная проблема описания. Сложность геофизических явлений существенно превосходит, скажем, сложность явлений в физике высоких энергий, и ни одна модель не может дать адекватного описания всего геофизического явления в целом. Здесь чрезвычайно трудно выделить ключевой механизм, управляющий явлением, и учесть второстепенные механизмы с помощью теории возмущений. Таким образом, для описания одного явления, такого, как, например, землетрясение, приходится создавать целый набор моделей, которые не всегда согласованы друг с другом и отражают лишь отдельные стороны явления. На наш взгляд, указанная трудность принципиально непреодолима на пути последовательного улучшения моделей, так как ввиду высокой степени синтетичности геофизических явлений модель, которая будет по возможности адекватно учитывать все стороны явления, неизбежно трудна для интерпретации.

Однако необходимости в такого рода моделях, с точки зрения автора, в принципе нет, поскольку с чисто практической точки зрения нас интересует в первую очередь проблема прогноза, для которой многие аспекты геофизических явлений несущественны. Это утверждение опирается на аналогию между катастрофическими явлениями в геофизике и фазовыми переходами в статистической физике, где, как известно, в окрестности критической точки существенны только флуктуации параметра порядка, другие же степени свободы оказываются иррелевантными. Существует надежда, что нечто родственное происходит и в глобальных геофизических процессах, которые действительно демонстрируют следы скейлинговой инвариантности и по ряду признаков родственны критическим явлениям. Если эта гипотеза справедлива, появляется надежда на "сокращенное" описание геофизических явлений (но, разумеется, только вблизи критических точек).

Наша задача – наметить общие черты такого рода описания, перечислив класс возможных моделей. Их предполагаемая универсальность является следствием двух гипотез: указанного предположения о родственности критических явлений, характерных для геофизики и статистической механики, и гипотезы о подобии решеточных иерархических моделей и непрерывных моделей с конформной инвариантностью, а также известного утверждения, восходящего к Л.П.Каданову, об универсальности критических явлений.

## 2. КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНЫЕ ИЕРАРХИЧЕСКИЕ РЕШЕТОЧНЫЕ СИСТЕМЫ

На основе принципов, сформулированных во введении, была построена [11] так называемая конформная теория поля (CFT), описывающая критические флуктуации параметра порядка в любой системе вблизи точки фазового перехода второго рода. Нашей задачей является обобщение конструкции [11] на решеточные иерархические системы.

### Геофизика как статистическая механика. Pro et contra

Разумеется, имеет место ряд кардинальных отличий от моделей статистической механики, которые следует принимать в расчет при построении для них аналога CFT. Остановимся кратко на этих отличиях.

**Природа фазового перехода.** Состояние геофизической среды в момент катастрофического события (лавины, землетрясения и т.д.) не может быть описано как фазовый переход второго рода в реальном пространстве.

Практически невозможно разумно ввести для таких событий параметр порядка, который бы испытывал критические флуктуации непосредственно в момент события. Тем не менее, значительная часть эмпирического материала, как наблюдательного, так и полученного в модельных исследованих, в том числе компьютерных, говорит в пользу того, что в такого рода системах есть признаки масштабно-инвариантного поведения [6–9]. Возникает парадокс, разрешение которого состоит в том, что критические явления в геофизических средах следует изучать не в реальном пространстве, а в пространстве иерархии, элементами которой служат простейшие дефекты разного ранга (трещины, дислокации и т.д.). В этом пространстве удается ввести параметр порядка, обладающий свойствами, близкими к тем, которые возникают при критических флуктуациях в моделях статистической механики. Отличие, которое все же остается, а именно то, что пространство иерархии, в отличие от реального, дискретизировано, преодолевается путем введения решеточного аналога CFT – LCFT, построение которого будет приведено ниже.

**Неконсервативность.** В геофизических системах, в отличие от систем статистической механики, не сохраняется полная энергия, так как всегда есть внешняя "подпитка", которая, скажем, в модели самоорганизующейся критичности Бака–Каданова [4–8] изображается потоком песчинок, постоянно поступающим в систему (в данной модели система – песчаная горка), что и приводит к периодическому сбросу лавин в критическом режиме. В этих условиях бессмысленно говорить о равновесных распределениях, инвариантных мерах и т.д. Однако это не означает полной непригодности статистической механики для описания подобных явлений. Действительно, если заменить условие сохранения энергии условием постоянства потока (природа которого зависит от конкретной модели), то можно показать [12], что статистическая механика по-прежнему работает после соответствующей реформулировки модели (переход в импульсное пространство, изучение не равновесных, а стационарных распределений и т.д.). А.М.Поляковым было продемонстрировано, что в такой неравновесной системе, как жидкость в турбулентном режиме, при указанной реформулировке методы статистической механики все же работают и корреляторы контролируются некоторой моделью CFT.

Подход, предлагаемый в данной работе для описания геофизических сред, в общих чертах подобен подходу [12] к турбулентности.

**Феномен самоорганизации.** В статистической механике, как правило, имеются внешние управляющие параметры, настраивая которые можно перейти в критический режим [2]. (В двумерной модели Изинга такими параметрами являются температура и внешнее магнитное поле; в точке $T = T_{cr}$, $H = 0$ система претерпевает фазовый переход второго рода.) В геофизических системах достижение критического режима происходит эволюционным путем. Другими словами, система самонастраивается на критический режим. При этом она может либо находиться в околокритической области, попадая в критический режим время от времени (как, видимо, происходит при землетрясениях), либо самоподдерживаться в критическом режиме (как, например, в моделях Бака–Каданова) и сохранять свойство критичности даже при ограниченных флуктуациях внешних параметров.

Очевидно, что такой тип критического поведения требует "оживления" управляющих параметров, превращения их в "динамические переменные". Кроме того, требуется связать эволюцию системы с движением "изображающей точки" в пространстве параметров (в физике принято говорить: "в пространстве теорий", так как каждому набору параметров соответствует некоторая конкретная физическая модель).

Мы отложим обсуждение этого феномена до второй части данной серии работ, где будет развит аппарат ренормгруппы и введено понятие универсального грассманова многообразия, необходимое для математической трактовки указанного явления. Здесь мы сосредоточим внимание на рассмотрении собственно критического режима.

**Мультифрактальность.** Модели статистической механики, обычно используемые в физике твердого тела, характеризуются "выпуклым спектром аномальных размерностей". Поэтому аномальная размерность составного оператора (композита) превосходит сумму аномальных размерностей составляющих операторов [13]: $\Delta_{p+q} \geq \Delta_p + \Delta_q$. Напротив, как показывает обработка каталогов [14] и компьютерные эксперименты [8], в геофизических средах "в режиме, близком к критическому", проявляется мультифрактальность, причем спектр размерностей $f(\alpha)$ является, как правило, вогнутым.[1] Это говорит о том, что для описания явлений и процессов, характеризующихся мультифрактальным поведением, следует использовать весьма специальный класс моделей, включающий фермионы (поля с полуцелым спином) и/или эффекты разупорядочивания.

**Окрестность критической точки.** В статистической механике критические точки, как правило, изолированы. Однако имеется некоторый класс моделей, таких, как ANNNI, RVB, спиновые стекла и некоторые другие, в которых может возникать "чертова лестница" фазовых переходов. В пространстве параметров могут быть "точки накопления" точек фазового перехода, в любой сколь угодно малой окрестности которых есть точки фазовых переходов. Такие геофизические явления, как фор/афтершоки, говорят в пользу выбора подобного класса моделей со сложной (ультраметрической) структурой пространства критических точек. Другим косвенным свидетельством в пользу такого выбора является $1/f$-шум.

**Фликкер-шум.** Исследование феномена самоорганизующейся критичности

[1] Утверждение спорное. *Прим. ред.*

и родственных моделей [8–10] в геофизике показало, что в них присутствует $1/f$-шум, который, как это известно из физики спиновых стекол, является косвенным признаком ультраметрической структуры метастабильных состояний в теории. Действительно, в системах типа спиновых стекол благодаря иерархической структуре фазового пространства релаксационные процессы не приводят к достижению равновесного режима, а всего лишь осуществляют "спуск по иерархии". После того как система отрелаксировала на уровне иерархии ранга $r$, она оказалась в одном из метастабильных состояний этого ранга, редуцированное фазовое пространство которого по-прежнему сложно организовано и сопоставимо по сложности с полным фазовым пространством системы (проявление принципа масштабной инвариантности по отношению к иерархическим системам).

Для достижения равновесия на этом уровне системе нужно выбрать одно из метастабильных состояний ранга $r+1$. Этот процесс занимает экспоненциально большое время по отношению к времени, затраченному на релаксацию на уровне ранга $r$. Процесс продолжается или неограниченно (в модели), или на глубину $N$ уровней иерархии ( для реалистических систем $N$ таково, что полное время релаксации по всей иерархии сопоставимо с временем жизни Вселенной). Фактически фликкер-шум не является шумом в прямом смысле слова (как, например, тепловой шум), а, скорее, служит проявлением динамического поведения системы в специфических условиях ультраметрической структуры фазового пространства и в этом смысле имеет не стохастическую, а динамическую природу. Однако динамика в столь сложно организованных системах по своим статистическим свойствам весьма близка к хаотическому поведению в случайных средах.

Мы предполагаем показать, что стохастическое поведение может быть хорошо аппроксимировано динамическими системами в подходящем предельном переходе. Эффективная "хаотизация" происходит на "пространстве теорий", свойства которого могут быть в значительной степени восстановлены по "функции Морса", определяющейся исключительно критическими динамическими системами. Ренормгрупповой ($RG$) поток на "пространстве теорий", периодически пересекающий метастабильные критические точки, отображается на реальную эволюцию геофизической системы. Феномен самоорганизующейся критичности трактуется при этом как попадание $RG$-потока в маргинальный режим.

## Конформная теория поля

CFT является прообразом иерархической конформной теории, которая в данной работе предлагается в качестве аппарата для феноменологического описания поведения геофизических сред в критическом режиме. Остановимся вкратце на основных положениях CFT, следуя [12], а затем обсудим изменения, которые необходимо осуществить для обобщения теории на решеточные иерархические системы.

**Тензор энергии-импульса.** Одним из центральных объектов теории является тензор энергии-импульса $T^{\mu\nu}(x)$, описывающий вариацию действия $\mathcal{L}[\varphi]$

$$\delta_\varepsilon \mathcal{L} = \frac{1}{2\pi}\int \partial_\mu \varepsilon_\nu(x) T^{\mu\nu}(x) d^2x$$

с помощью инфинитезимальных преобразований $\mathbf{R}^2$: $x^\mu \mapsto x^\mu + \varepsilon(x)$ (индексы повышаются и понижаются посредством метрики $\eta^{\mu\nu}$ и $\eta_{\mu\nu}$) и удовлетворяющий условию непрерывности

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0,$$

или в комплексных координатах $T = T^{zz}$, $\theta = -T^{z\bar z}$, $\bar T = T^{\bar z\bar z}$:

$$\partial_{\bar z} T(z,\bar z) = \partial_z \theta(z,\bar z), \quad \partial_{\bar z}\theta(z,\bar z) = \partial_z \bar T(z,\bar z).$$

Если наложить условия конформности, получим $\partial_{\bar z} T = 0$; $\partial_z \bar T = 0$ и, следовательно, $T = T(z)$ – голоморфное и $\bar T = \bar T(\bar z)$ – антиголоморфное поля.

Далее мы будем рассматривать только конформный режим, т.е. будем предполагать, что условия конформности всегда выполнены. Тензор энергии-импульса удовлетворяет следующему OPE:

$$T(z)T(y) = \frac{c}{2(z-y)^4} + \frac{2T(y)}{(z-y)^2} + \frac{\partial_y T(y)}{z-y} + \mathrm{reg}, \tag{2.1}$$

где reg – регулярная функция (и аналогичное условие для $\bar T$; в дальнейшем ограничимся только голоморфным сектором, рассматривая OPE только по отношению к $T(z)$, так как соотношения для $\bar T(\bar z)$ вполне аналогичны). OPE (2.1) может быть переписано в модах Фурье–Лорана $\mathbf{L}_n = \oint \left(T(z)z^{n+2}/(2\pi i z)\right) dz$ как алгебра Вирасоро:

$$[\mathbf{L}_n \mathbf{L}_m] = (n-m)\mathbf{L}_{n+m} + \frac{c}{12} n(n^2-1)\delta_{n+m,0}.$$

Параметр $c$ (так называемый центральный заряд) является характеристикой теории и, неформально говоря, служит мерой числа степеней свободы (степени "сложности" теории). С математической точки зрения $c$ является центральным расширением алгебры Витта (коцикл Гельфанда–Фукса), с физической – конформной аномалией.

**Примеры.** *Пример 1.* Простейшей (унитарной) нетривиальной моделью является модель Изинга $T(z) = \frac{1}{2}(\psi\partial\psi)(z)$, где $\psi(z)$ – вещественный фермион с центральным зарядом $c = 1/2$.

Здесь круглые скобки, в которые заключены поля, означают нормальное произведение, определяемое следующим образом:

$$(AB)(x) = \oint \frac{dz}{2\pi i(z-x)} A(z)B(x).$$

Необходимость введения процедуры нормального упорядочения связана с тем, что, как следует из (1.4), произведение полей $A(z)$ и $B(x)$ может быть не определено (сингулярно) при $z \to x$. Следует экстрагировать сингулярные члены, для того чтобы придать смысл такого рода произведениям в одной точке. Введенная выше операция нормального произведения – один из способов такого рода регуляризации.

*Пример 2.* При $c < 1$ существуют только дискретные унитарные теории – так называемые минимальные модели – с центральными зарядами $c_p = 1 - 6/(p(p+1))$ и тензором энергии импульса вида $T(z) = -\frac{1}{2}(\partial\varphi\partial\varphi)(z) + \frac{i}{\sqrt{2}}\alpha\partial^2\varphi(z)$, где $\alpha^{-2} = p(p+1)$ и $\varphi(z)$ – скалярный бозон. При $m = 3$ мы получаем просто другую реализацию модели Изинга, что могло бы вызвать удивление, если не принимать во внимание замечательный факт: в двумерии бозоны (поля с целым спином) и фермионы (поля с полуцелым спином) полностью эквивалентны. Эта эквивалентность контролируется, в частности, конструкцией вертексного оператора, полезной для дальнейшего:

$$\psi(z) = (\exp(i\varphi))(z) \tag{2.2}$$

($\psi(z)$ – вейлевский, т.е. комплексный, фермион). В формуле (2.2) правая часть представляется в виде формального ряда нормально упорядоченных степеней поля $\varphi(z)$.

**Трансформационные свойства полей.** Из всей совокупности полей целесообразно (в CFT) выбрать те, которые обладают наиболее простыми конформными свойствами (т.е., другими словами, OPE которых с $T(z)$ выглядят как можно проще). Такие поля принято называть примарными. Например,

$$T(x)\Phi_l(z,\bar{z}) = \frac{\Delta_l \Phi_l(z,\bar{z})}{(x-z)^2} + \frac{\partial_z \Phi_l(z,\bar{z})}{x-z} + \mathrm{reg}, \tag{2.3}$$

где $\Delta_l$ – аномальная размерность поля $\Phi_l(z,\bar{z})$.

Условие (2.3) в терминах алгебры Вирасоро имеет вид

$$[\mathcal{L}_n,\ \Phi_l(z,\bar{z})] = (n+1)z^n \Delta_l \Phi_l(z,\bar{z}) + z^{n+1}\partial_z \Phi_l(z,\bar{z}).$$

Пара $\langle \Delta_l,\ \bar{\Delta}_l \rangle$ характеризует трансформные свойства поля $\Phi_l(z,\bar{z})$ по отношению к $T(z)$ и $\bar{T}(\bar{z})$. Величина $s_l = \Delta_l - \bar{\Delta}_l$ называется спином поля $\bar{\Phi}_l(z,\bar{z})$.

В CFT принято рассматривать алгебры полей $A_j(x)$, замкнутые по отношению к OPE в следующем смысле:

$$A_i(x)A_j(z) = \sum_\alpha d_{ij}^\alpha(x,z) P_\alpha[A](z),$$

где $P_\alpha[A]$ – нормально упорядоченный дифференциальный полином от полей из системы $A = \{A_i\}$.

Примером такой алгебры является алгебра $A = \{I\}$, состоящая из единичного оператора. Тензор энергии-импульса является, как принято говорить, потомком на уровне 2 единичного оператора. Менее тривиальный пример – $W_N$-алгебра (построенная впервые в случае $N = 3$ А.Б.Замолодчиковым), состоящая из полей целочисленных спинов $s = 2, 3, \ldots, N$. Предельный переход $N \to \infty$ дает так называемую алгебру $W_\infty$, решеточный аналог которой (построенный ниже) будет служить для нас основной моделью.

## Решеточная конформная теория

Для иерархических решеточных моделей, рассматриваемых в данной работе, требуется обобщение понятия конформной инвариантности. Строгое определение требует введения решеточного аналога шварциана и формализации понятия решеточных конформных преобразований. Чтобы избежать несколько громоздких математических конструкций, воспользуемся упрощенным определением, считая проявлением конформной инвариантности сам факт существования решеточной алгебры Вирасоро. Разумеется, это определение не дает прямого представления о решеточных конформных преобразованиях, но для наших целей его достаточно. Детальный анализ показывает полную эквивалентность двух подходов. Однако, чтобы избранный путь не показался чересчур формальным, при построении LCFT постараемся выдерживать параллели с непрерывной конструкцией CFT. С этой целью построим решеточный аналог теории с тензором энергии-импульса

$$T(z) = -\frac{1}{2}(\partial\varphi\partial\varphi)(z) + \frac{i\alpha}{\sqrt{2}}\partial^2\varphi(z),$$

включающей так называемые минимальные модели.

Для этого напомним одну полезную CFT-конструкцию.

**Конструкция экранирующих зарядов.** Начнем со случая непрерывной теории CFT, затем рассмотрим решеточный аналог, после чего получим квазиклассический предел, что и даст искомую теорию.

*Непрерывный квантовый случай.* Введем в рассмотрение операторы

$$Q^{(\pm)} = \oint dz V^{(\pm)}(z) = \oint dz(\exp(i\sqrt{2}\alpha_\pm\phi))(z), \tag{2.4}$$

где $\alpha_+ + \alpha_- = \alpha$, $\alpha_+\alpha_- = -1$.

Операторы $Q^{(\pm)}$ коммутируют с генераторами конформной симметрии

$$[Q^{(\pm)}, \mathcal{L}_n] = 0$$

и не нарушают конформных свойств полей $\Phi_l(z, \bar{z})$. Операторы $Q^{(\pm)}$ используются в CFT для "проектирования" корреляционных функций на "физическое" пространство, благодаря их свойству изменять баланс кулоновских зарядов. Однако для нас здесь важно только то, что эти операторы коммутируют с $T(z)$, что можно превратить в определение алгебры Вирасоро (если временно забыть про ее связь с конформными преобразованиями).

*Решеточный квантовый случай.* Построим аналог $Q^{(\pm)}$ на решетке ($Q^{(\pm)}$ сольются в один оператор $Q$). Рассмотрим аналог вертексных операторов $V_\alpha(z) = (\exp(i\alpha\varphi))(z)$ на решетке. Это поля, удовлетворяющие перестановочным соотношениям: $a_n a_m = q a_m a_n$, $m > n$ (ср.: $V_\alpha(x)V_\beta(z) = q_{\alpha\beta}V_\beta(z)V_\alpha(x)$, где $q_{\alpha\beta} = (-1)^{\alpha\beta}$), $q$ – параметр теории. Аналог $\oint V^{(\pm)}dz$ на решетке – оператор $\mathrm{ad}(Q)$, $Q = \sum_n a_n$.

Введем градуировку решеточного монома, построенного из $a_n$ и $a_m^{-1}$, формально приписав $a_n$, $a_m^{-1}$ градуировки

$$\deg a_n = 1, \quad \deg a_m^{-1} = -1.$$

Степень любого монома, deg, согласно определению,

$$\deg\left(\prod_j a_{n_j}^{x_j}\right) = \sum_j x_j.$$

Определим решеточную алгебру Вирасоро как совокупность мономов нулевой градуировки из $\ker \mathrm{ad}Q \subset \mathbb{C}[a_n, a_m^{-1}]$. Эта алгебра порождена элементами $A_n$, удовлетворяющими перестановочным соотношениям

$$qA_n^{-1}A_{n+1}^{-1} = q^{-1}A_{n+1}^{-1}A_n^{-1} + (q-q^{-1})(A_n^{-1} + A_{n+1}^{-1}),$$
$$[A_n^{-1},\ A_{n+2}^{-1}] = (q^3-q)(A_{n+2}^{-1} + (q^{-1}-1))(A_{n+1}^{-1} + (q-1))^{-1}(A_n^{-1} + (q^{-1}-1)),$$

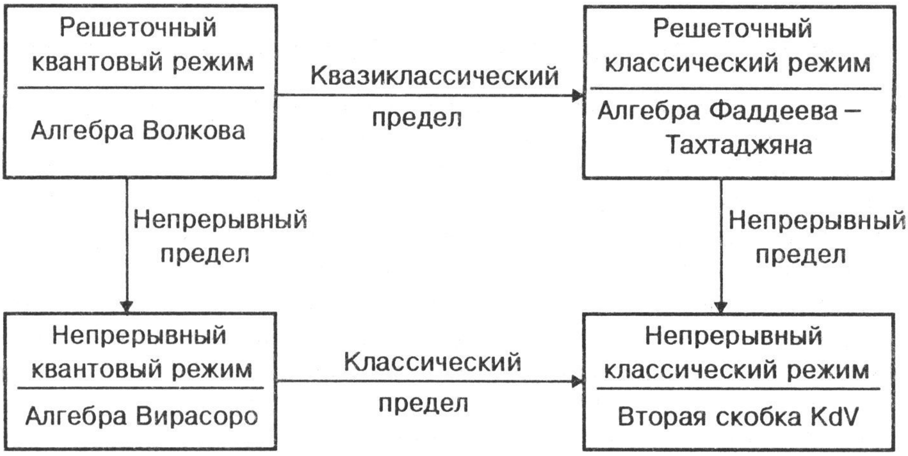
и известна как алгебра Волкова. Исторически ей предшествовала конструкция, которая может быть естественно получена в квазиклассическом пределе $q \to 1+\hbar$ (где $\hbar$ – "постоянная Планка").

*Решеточный квазиклассический предел.* Для наших целей будет важен только квазиклассический предел: так называемая алгебра Фаддеева–Тахтаджяна (FTV). Заменяя $q$-коммутаторы на скобки Пуассона, получим следующую алгебру:

$$\{A_nA_{n+1}\} = A_nA_{n+1}(1 - A_n - A_{n+1}),$$
$$\{A_nA_{n+2}\} = -A_nA_{n+1}A_{n+2}. \tag{2.5}$$

**Непрерывный классический предел.** Другой способ убедиться в естественности приведенной конструкции – вычислить классический непрерывный предел для алгебр Вирасоро и FTV и убедиться, что результаты совпадают (и дают вторую скобку KdV).

Другими словами, следующая диаграмма коммутативна:




*Доказательство.* Для того чтобы убедиться, что OPE (2.1) переходит во вторую скобку Пуассона для KdV:

$$\{u(x)u(y)\} = \tilde{c}\delta'''(x-y) + 2u(y)\delta'(x-y) + u'(y)\delta(x-y),$$

достаточно в полях $T(z)$ перейти от голоморфных координат к вещественным. Для того чтобы убедиться в KdV-пределе для алгебры (2.5), достаточно положить $A_n = a + b\Delta^2 u(x)$, где $x = n\Delta$ ($\Delta$ – постоянная решетки), и разложить (2.5) в ряд по $\Delta$, удерживая только лидирующие члены.

**Неформальный комментарий.** Наличие конформной симметрии в критической точке в системах статистической механики, напомним, означало, что система не имеет характерного масштаба, флуктации параметра порядка имеют бесконечную корреляционную длину и эффективная длинноволновая теория безмассова.

Что же означает конформная симметрия в решеточных иерархических системах? Физический смысл этой симметрии в данном случае существенно иной. Он означает самоподобие системы не в реальном пространстве, а в пространстве иерархии, причем самоподобие относится к кинетическим процессам. Если эти процессы описывают, скажем, поглощение дефектов меньшего ранга, то самоподобие соответствующих уравнений в критическом режиме означает возможность беспрепятственного движения дефекта вверх по иерархии (при условии подпитки системы внешним потоком).

Соответствующие солитонные решения получены во второй части серии. Мы надеемся, что им может быть дана геофизическая интерпретация в терминах катастрофических событий (лавин, землетрясений и т.д. в зависимости от физической природы рассматриваемой модели)

Итак, аналогом бесконечной корреляционной длины в иерархических системах является неограниченный масштаб перколяции вверх по иерархии. (Разумеется, в иерархических системах, как и в системах статистической механики, всегда есть конечный диапазон масштабов, постоянная решетки $\Delta$ и размер системы $L$; предполагается, что число иерархических уровней $N = \log(L/\Delta)$ велико, что обеспечивает теории область применимости на большом интервале масштабов.)

## 3. ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ И СВОЙСТВА ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

Как отмечалось во введении, для адекватного описания кинетики роста и взаимного поглощения дефектов необходимо бесконечное число решеточных иерархических полей всех порядков иерархической локальности. Здесь мы построим подобную систему полей в режиме конформной инвариантности. Поля $A_n$ описывают концентрацию дефектов ранга $n$, тогда как поля $B_n^{(p)}$ контролируют процессы взаимной экранировки различных кинетических процессов. Так, первое поле такого типа $B_n^{(1)}$ описывает эффекты обеднения дефектами ранга $n-1$ в окрестности дефекта ранга $n$ по сравнению со свободным пространством, поля $B_n^{(p\geq 2)}$ описывают более сложные нелокальные (многочастичные) эффекты экранировки. Достаточно нетривиальным является тот факт, что не только "наивная" система нелокализованных взаимодействующих дефектов (с сечением поглощения дефектом большего ранга дефекта меньшего ранга, пропорциональным произведению концентраций этих дефектов), но и система, в которой учтены эффекты экранировки, может находиться в конформно-инвариантном режиме. Открытым остается вопрос, насколько подобное описание кинетики дефектов адекватно реальности. (Интересные для геофизики кинетические уравнения рассмотрены в [3].) Отметим, однако, что в критическом режиме многие детали кинетического описания взаимодействия дефектов становятся несущественными.

В любом случае нашей целью является демонстрация тех следствий, которые вытекают из дополнительной симметрии кинетических уравнений (несомненно имеющейся и в любой более или менее реалистической модели) и проявляются в свойствах интегрируемости этих уравнений. Последнее позволяет (третья часть серии) математически корректно сформулировать "проблему прогноза" для такого рода систем (точнее, проблему распределения солитоноподобных решений на RG-траектории).

### Решеточный аналог алгебры $W_\infty$

Построим модель, в которой наряду с полями $A_n$ (концентрация дефектов ранга $n$) введены еще поля $B_n(p \geq 1)$, описывающие эффекты экранировки при каскадных процессах поглощения дефектов меньшего ранга дефектами большего ранга. Неформально говоря, поля $B_n^p$ описывают свойства системы "помнить" предысторию дефекта на глубину $p$ по иерархии в процессе роста. Система самосогласованных "кинетических" уравнений для системы полей $\{A_n, B_n(p \geq 1)\}$ имеет вид

$$\begin{aligned}
&\dot{A}_n = A_{n-1}A_n(1 - B_{n-1}^{(1)}) - A_n A_{n+1}(1 - B_n^{(1)}),\\
&\dot{B}_n^{(1)} = (A_{n+1} - A_n)(1 - B_n^{(1)})B_n^{(1)} + B_{n-1}^{(1)}B_n^{(1)}A_{n-1} -\\
&-B_n^{(1)}B_{n+1}^{(1)}A_{n+2} + B_n^{(2)}A_{n+2} - A_{n-1}B_{n-1}^{(2)},
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где поля $B_n^{(2)}$ вводятся таким образом, чтобы учитывать добавочную экранировку в каскадных (здесь двухступенчатых по иерархии) процессов. Дальнейшие уравнения выписываются аналогично. А именно, к "наивному" уравнению уровня $p$ для эволюции экранирующего поля $B_n^{(p)}$, содержащему в правой части поля́ $B_n^{(q)}$ с $q \leq p$, добавляются структуры, учитывающие каскадные процессы ранга $p+1$, что "вводит в игру" дополнительное поле $B_n^{(p+1)}$, тем самым приводя к появлению бесконечной цепочки зацепляющихся кинетических уравнений. Эта цепочка тем не менее допускает точное интегрирование при специальной "тонкой настройке" параметров, причем интегрируемость сопровождается появлением конформной инвариантности.

Перейдем к новым полям $A_n^{(p)}$:

$$\begin{aligned}
&A_n^{(1)} = A_n,\\
&A_n^{(p+1)} = B_n^{(p)}A_n \ldots A_{n+p}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

и перепишем в них уравнения (3.1):

$$\dot{A}_n^{(p)} = (A_{n-1}^{(1)} - A_{n+p}^{(1)})A_n^{(p)} + A_n^{(p+1)} - A_{n-1}^{(p+1)}. \tag{3.3}$$

Система уравнений (3.3) оказывается полностью интегрируемой. Для доказательства этого факта потребуется применить формализм Гельфанда–Дикого (ГД).

### Бигамильтоновость системы кинетических уравнений

Покажем, что система (3.3) обладает свойством бигамильтоновости. Для этого введем гамильтонианы

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}^{(0)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_n \ln A_n^{(N)},\\
&\mathcal{H}^{(1)} = \sum_n A_n^{(1)}
\end{aligned}$$

и скобки Пуассона

$$
\begin{aligned}
&\{A_n^{(p)}A_{n+m}^{(q)}\}_1 = \theta(0 \le p-m \le q-1)(-A_n^{(p)}A_{n+m}^{(q)} + A_n^{(q+m)}A_{n+m}^{(p-m)}),\\
&\{A_n^{(p)}A_{n+m}^{(q)}\}_2 = A_n^{(p)}A_{n+m}^{(q)}(1 - A_{n+m-1}^{(1)} - A_{n+p}^{(1)}) - A_n^{(q+m)}A_{n+m}^{(p-m)} +\\
&+A_n^{(p+1)}A_{n+m}^{(q)} + A_n^{(p)}A_{n+m-1}^{(q+1)}, \qquad m \le p, \quad q+m \ge p+1,\\
&\{A_n^{(p)}A_{n+p+1}^{(q)}\}_2 = -A_n^{(p)}A_{n+p}^{(1)}A_{n+p+1}^{(q)} - A_n^{(p+q+1)} + A_n^{(p+1)}A_{n+p+1}^{(q)} +\\
&+A_n^{(p)}A_{n+p}^{(q+1)},\\
&\{A_n^{(p)}A_n^{(q)}\}_2 = -A_n^{(p)}A_{n+p}^{(1)}A_n^{(q)} + A_n^{(p+1)}A_n^{(q)}, \quad q \ge p+1,\\
&\{A_n^{(p)}A_{n+p-q}^{(q)}\}_2 = -A_n^{(p)}A_{n+p-q-1}^{(1)}A_{n+p-q}^{(q)} + A_n^{(p)}A_{n+p-q-1}^{(q+1)}, \qquad p \ge q+1,\\
&\{A_n^{(p)}A_{n+m}^{(q)}\}_2 = A_n^{(p)}A_{n+m}^{(q)}(-A_{n+m-1}^{(1)} + A_{n+m+q}^{(1)}) + A_n^{(p)}A_{n+m-1}^{(q+1)} -\\
&-A_n^{(p)}A_{n+m}^{(q+1)}, \qquad p \ge m+q+1, \;\; m \ge 1,
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

где $\theta(\cdot)$ – логическая функция. Можно убедиться, что определение скобок (3.4) корректно (выполнено тождество Якоби). Теперь заметим, что эволюционные уравнения (3.3) могут быть представлены двумя способами как гамильтоновы:

$$\dot{A}_n^{(p)} = \{\mathcal{H}^{(1)}A_n^{(p)}\}_1 = \{\mathcal{H}^{(0)}A_n^{(p)}\}_2,$$

совместимость двух таких представлений и выражает факт бигамильтоновости системы, из чего уже нетрудно получить доказательство полной интегрируемости.

## Представление Лакса

Для того чтобы факт полной интегрируемости был виден более явно, получим для системы (3.3) лаксово представление.

Ведем поля

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{L}_{nn} = A_n^{(1)},\\
&\mathbf{L}_{n+1,n} = A_n^{(1)}A_{n+1}^{(1)} - A_n^{(2)},\\
&\mathbf{L}_{n+2,n} = A_n^{(1)}A_{n+1}^{(1)}A_{n+2}^{(1)} - A_n^{(2)}A_{n+2}^{(1)} - A_n^{(1)}A_{n+1}^{(2)} + A_n^{(3)},\\
&\vdots\\
&\mathbf{L}_{n+p,n} = \sum(-1)^{k+p+1}A_n^{(\alpha)_1}A_{n+\alpha_1}^{(\alpha)_2}\cdots A_{n+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{k-1}}^{(\alpha)_k}
\end{aligned}
$$

по всем разбиениям $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = p+1$.

Образуем из них матрицу $||\mathbf{L}_{mn}||$. Как можно убедиться, эволюционные уравнения (3.3) могут быть реформулированы в виде

$$\dot{\mathbf{L}} = [\mathbf{M}, \mathbf{L}],$$

где $\mathbf{M} = \mathbf{L}_+$ (верхнетреугольная часть матрицы минус нижнетреугольная).

Интегралы движения имеют вид

$$J_k = \frac{1}{k}\mathrm{tr}\mathbf{L}^k.$$

Несложные вычисления дают

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \mathcal{H}^{(1)} = \sum_n A_n^{(1)}, \\
J_2 &= \sum_n \Big(\frac{A_n^{(1)2}}{2} + A_n^{(1)}A_{n+1}^{(1)} - A_n^{(2)}\Big), \\
J_3 &= \sum_n \Big(\frac{A_n^{(1)3}}{3} + (A_n^{(1)2}A_{n+1}^{(1)} + A_n^{(1)}A_{n+1}^{(1)2} + A_n^{(1)}A_{n+1}^{(1)}A_{n+2}^{(1)} - \\
&\quad - A_n^{(2)}A_{n+1}^{(1)} - A_n^{(2)}A_n^{(1)} - A_n^{(2)}A_{n+2}^{(1)} - A_{n+1}^{(2)}A_n^{(1)} + A_n^{(3)})\Big), \\
J_4 &= \sum_n \Big(\frac{A_n^{(1)4}}{4} + \frac{3}{2}A_n^{(1)2}A_{n+1}^{(1)2} + (A_n^{(1)3}A_{n+1}^{(1)} + A_n^{(1)}A_{n+1}^{(1)3}) + (A_n^{(1)2}A_{n+1}^{(1)}A_{n+2}^{(1)} + \\
&\quad + 2A_n^{(1)}A_{n+1}^{(1)2}A_{n+2}^{(1)} + A_n^{(1)}A_{n+1}^{(1)}A_{n+2}^{(1)2}) + A_n^{(1)}A_{n+1}^{(1)}A_{n+2}^{(1)}A_{n+3}^{(1)} - \\
&\quad - 2A_n^{(2)}A_n^{(1)}A_{n+1}^{(1)} - A_n^{(2)}A_n^{(1)2} - A_n^{(2)}A_{n+1}^{(1)2} - A_n^{(2)}A_n^{(1)}A_{n+2}^{(1)} - \\
&\quad - A_n^{(1)2}A_{n+1}^{(2)} - 2A_n^{(2)}A_{n+1}^{(1)}A_{n+2}^{(1)} - 2A_n^{(1)}A_{n+1}^{(2)}A_{n+1}^{(1)} - \\
&\quad - A_n^{(2)}A_{n+2}^{(1)2} - A_n^{(1)}A_{n+1}^{(2)}A_{n+2}^{(1)} - A_n^{(2)}A_{n+2}^{(1)}A_{n+3}^{(1)} - A_n^{(1)}A_{n+1}^{(2)}A_{n+3}^{(1)} - \\
&\quad - A_n^{(1)}A_{n+1}^{(1)}A_{n+2}^{(1)} + \frac{1}{2}A_n^{(2)2} + A_n^{(2)}A_{n+2}^{(2)} + A_n^{(2)}A_{n+1}^{(2)} + \\
&\quad + A_n^{(1)}A_n^{(3)} + A_{n+2}^{(1)}A_n^{(3)} + A_n^{(1)}A_{n+1}^{(3)} + A_n^{(3)}A_{n+3}^{(1)} - A_n^{(4)}\Big) \text{ и т.д.}
\end{aligned}
$$

## Представление Хироты

Для последующих целей нам потребуется также билинейное представление эволюционных уравнений. Отметим вначале, что каждый из интегралов может рассматриваться в качестве гамильтониана и эволюция в силу этого гамильтониана (и первой скобки Пуассона) порождает поток на фазовом пространстве. Введем обозначения

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial t_p} \overset{\text{def}}{=} \{\mathcal{H}^{(p)}, \Phi_n\}_1 \equiv \{J_p, \Phi_n\}_1 \overset{\text{ГД}}{=} \{J_{p-1}, \Phi_n\}_2, \tag{3.5}$$

где $\Phi_n$ – некоторое поле (функция от $A_n^{(p\geq 1)}$), $t_p$ – $p$-е время эволюции. Время $t_1$ отождествляется с "обычным" временем, высшим временам можно придать смысл параметров, от которых зависят (скажем, солитонные) решения интегрируемой иерархии (3.5). Поскольку преобразования Бэклунда, необходимые для построения мультисолитонных решений (вторая часть серии), наиболее естественно формулируются на языке представления Хироты, построим это представление для (3.5). Введем параметризацию полей $A_n^{(p)}$ посредством $\tau$-функции Хироты. Пусть $A_n^{(p\geq N)} \equiv 0$. Тогда

$$
\begin{aligned}
A_n^{(N-1)} &= \frac{\tau_{n-1}\tau_{n+N}}{\tau_n \tau_{n+N-1}}, \\
A_n^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\ln \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n}\right) \qquad \text{и т.д.}
\end{aligned}
$$

Тогда уравнения (3.5) переписываются в виде

$$\mathcal{D}_s\tau_{n+1}\tau_n = p_{s-1}(\tilde{\mathcal{D}})\tau_{n+N}\tau_{n-N+1}, \tag{3.6}$$

где $\tilde{\mathcal{D}} = (\mathcal{D}_1, \frac{1}{2}\mathcal{D}_2, \frac{1}{3}\mathcal{D}_3, \ldots)$, $\mathcal{D}_j$ – символ Хироты, действующий согласно

$$\mathcal{D}_j^n fg = \left(\frac{\partial}{\partial t_j} - \frac{\partial}{\partial t'_j}\right)^n f(t_j)g(t'_j)\Big|_{t_j=t'_j},$$

$p_s(x)$– полином Шура.

Уравнения Хироты (3.6) являются в некотором смысле соотношениями Плюккера на универсальном грассмановом многообразии и выражают еще одним способом факт интегрируемости нашей системы. Покажем теперь, что в системе (3.3) имеется еще и конформная инвариантность.

**Конформная инвариантность модели**

Существует несколько способов убедиться в том, что система (3.3) обладает конформной симметрией.

**Непрерывный предел.** Рассмотрим предел системы (3.3) при $\Delta \to 0$ и $A_n^{(p\geq N)} \equiv 0$. Как можно убедиться, после соответствующей "подкрутки" времен, $t'_i = f_i(\{t_j\}_{j\leq i})$, система переходит в $N - KdV$. Например, при $N = 3$ в непрерывном пределе получаем из (3.3) уравнения Буссинеска

$$A_n^{(2)} \to \frac{1}{27}(1 - \Delta^2 u(x) - \frac{1}{2}\Delta^3 w(x)), \quad A_n^{(1)} \to \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{3}\Delta^2 u(x)),$$
$$\dot{u} = -u_{xx} + 2w_x,$$
$$\dot{w} = w_{xx} - \frac{2}{3}u_{xxx} - \frac{2}{3}uu_x.$$

Как известно, вторая скобка соответствующих непрерывных уравнений определяет классический предел $W_N$-алгебры, т.е. конформной теории с расширенной симметрией (в конформную систему наряду с тензором энергии-импульса включены поля спинов 3, 4, ..., $N$).

**Конструкция Б.Л. Фейгина.** Способ убедиться в конформной инвариантности (3.3) в чисто решеточных терминах без ссылок на непрерывный предел – построить соответствующую алгебру в рамках конструкции экранирующих зарядов (2.4). Рассмотрим квантовую группу $U_q sl_N$ и построим экранирующие операторы $\mathrm{ad}Q_j$ из $U_q n_+$ следующим образом. Пусть решеточные поля $a_n^{(i)}$ удовлетворяют перестановочным свойствам

$$a_n^{(i)}a_m^{(j)} = q^{(\alpha_i\cdot\alpha_j)}a_m^{(j)}a_n^{(i)}, \qquad m < n,$$

где $\alpha_i$ – соответствующие корни.

Тогда

$$\mathrm{ad}Q_j x = Q_j x - q^{(\alpha_j\cdot \deg x)}xQ_j, \quad Q_j = \sum_n a_n^{(j)}.$$

Определим решеточную $W_N$-алгебру ($LW_N$) как набор полей из $\bigcap_{N-1}^{j=1} \ker \mathrm{ad}Q_j$ 0-градуировки. Можно показать, что в $LW_N$ имеется система образующих, для которых (в квазиклассическом пределе) скобка дается просто суммой $\{\cdot,\cdot\}_1 + \{\cdot,\cdot\}_2$ скобок Пуассона (3.4) для рассматриваемой динамической системы (3.3). Таким образом, мы продемонстрировали и конформную инвариантность данной системы.

**Предельный переход** $N \to \infty$. В пределе $N \to \infty$ $LW_N$ переходит в алгебру $LW_\infty$, являющуюся решеточным аналогом нелинейной алгебры $\hat{W}_\infty(k)$ Бакаса-Киритсиса, и соответствует второй скобке КП-иерархии. Предельный переход $N \to \infty$ соответствует учету нелокальностей по иерархии произвольной степени в процессе взаимодействия дефектов. Отметим, что подобного типа бесконечная симметрия, контролируемая алгеброй $W_\infty$, возникает в самых разнообразных задачах современной физики: при анализе нелинейных волн, квантовой гравитации, черных дыр, квантового эффекта Холла и др. Всем этим проблемам также присущи такие характеристики, как нелинейность взаимодействия и существенная роль нелокальных ("топологических") эффектов.

**Глобальная структура фазового пространства.** Струнный подход, представляющий в настоящий момент доминирующую парадигму теоретической физики, утверждает, что системы, подобные рассмотренной в данной работе, могут обладать "обобщенной конформной инвариантностью" не только в критических режимах, но и в целом. При этом, однако, конформные симметрии действуют уже не в рамках данной конкретной теории, а на всем "пространстве теорий". Переход от одной теории к другой в процессе RG-эволюции контролируется C-теоремой Замолодчикова (аналог H-теоремы Больцмана). Эти глобальные аспекты модели рассмотрены в следующих работах серии.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, на основе несколько модифицированных принципов статистической механики построена модель, описывающая рост дефектов в критическом режиме.

Принципиально новым моментом является обобщение принципа конформной инвариантности на новый класс теорий. Если в теории струны критические режимы описываются двумерными конформными лагранжевыми моделями, то в нашем подходе критическим режимам соответствуют конформно-инвариантные системы кинетических уравнений.

Дальнейшее развитие теории должно, вероятно, идти параллельно теории струн, а именно: исходя из принципа расширенной конформной инвариантности, действующей на всем пространстве теорий, следует построить некритические кинетические уравнения, интерполирующие описание системы в режиме, промежуточном между критическими. Вопрос, имеющий ключевой интерес, который при этом следует решить, состоит в построении эффективной динамики на пространстве теорий (составление библиотеки каталогов "событий") и изучении статистических свойств распределения солитонных решений на типичных траекториях такой динамики (формализация проблемы прогноза).

*Благодарности.* Автор выражает признательность участникам семинаров в МИТП РАН, ИТФ им. Л.Д. Ландау и ИТЭФ за ряд полезных замечаний и считает приятным долгом отметить критические замечания Г.М. Молчана и М.Г. Шнирмана, во многом способствовавшие улучшению качества статьи.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Pisarenko D., Biferale L., Courvoisier D. et al.* Eurther results on multifractality in shell models // Phys.Fluids.A. 1993. Vol.5. P.2533–2538.
2. *Patashinskii A.Z., Pokrovskii V.L.* Fluctuation theory of phase transitions. Oxford: Pergamon Press, 1979.
3. *Наркунская Г.С., Шнирман М.Г.* Иерарахическая модель дефектообразования и сейсмичность // Дискретные св-ва геофиз. среды. М.: Наука, 1989. С.70–76.
4. *Bak P., Tang Ch., Wiesenfeld K.* Self-organized criticality // Phys.Rev.A. 1988. Vol.38, N1. P.364–374.
5. *Tang Ch., Bak P.* Mean field theory of self-organized critical phenomena // J. Stat. Phys. 1988. Vol.51, N5/6. P.797–801.
6. *Kadanoff L.P.* Fractals and multifractals in avalanche models // Physica D.1989. Vol.38. P.213–214.
7. *Kadanoff L.P., Nagel S.R., Wu L., Zhou Su-min.* Scailing and universality in avalanches // Phys. Rev. A. 1989. Vol.39, N12. P.6524–6537.
8. *Kadanoff L.P., McNamara G.R., Zanrtti G.* From automata to fuild flow: Comparisons of simulation and theory // Phys.Rev.A. 1989. Vol.40, N8. P.4527–4541.
9. *Carlson J.M.* Two-dimensional model of a fault // Phys.Rev.A. Vol.44, N10. P.6226–6232.
10. *Carlson J.M., Langer J.S., Shaw B.E.* Dynamics of Eathquake Faults // Rev.Mod.Phys. 1994. Vol.66. P.657–670.
11. *Belavin A.A., Polyakov A.M., Zamolodchikov A.B.* Infinite conformal symmetry in two dimensional quantum field theory // Nucl. Phys. B. 1984. Vol.241. P.333–380.
12. *Polyakov A.M.* Conformal turbulence // Nucl. Phys. 1993. Vol.B396. P.367-376.
13. *Duplantier B., Ludwig A.W.W.* Multifractals, operator product expansion and field theory // Phys. Rev. Lett. 1991. Vol.66, N3. P.247.
14. *Гейликман М.Б., Писаренко В.Ф.* О самоподобии и геофизических явлениях // Дискретные св-ва геофиз. среды. М.: Наука, 1989. С.109–130.