

УДК 550.34

ТУРБУЛЕНТНЫЕ КАСКАДЫ: МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Г.М.Молчан

*Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук*

Случайные каскады лежат в основе моделирования многих физических явлений, и в частности сейсмического процесса. В работе дано аналитическое исследование мультифрактальных свойств каскадов Мандельброта, моделирующих процесс хорошо развитой турбулентности. Результаты проясняют ситуацию, связанную с лог-нормальной гипотезой Колмогорова–Обухова в турбулентности. Ее критика, основанная на эмпирическом анализе скейлинговых свойств диссипации энергии, неверна, поскольку операции осреднения по пространству и ансамблю оказались нетождественными.

TURBULENT CASCADES: MULTIFRACTAL CHARACTERISTICS

G.M.Molchan

*International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences*

Random cascades are basic in modeling many physical phenomena, in particular, the seismic process. This paper is an analytical study of the multifractal properties of Mandelbrot cascades which model well-developed turbulence. The results help to clarify the situation connected with the Kolmogorov–Obukhov log-normal hypothesis for turbulence. The criticism of the hypothesis based on an empirical analysis of scaling properties of energy dissipation is unjustified, because it has been found that the averaging over space and the averaging over ensemble are not identical.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] проведена неожиданная параллель между сейсмическим процессом и хорошо развитой турбулентностью. По существу, речь идет лишь о внешних проявлениях двух очень далеких физических процессов, а именно: стохастичности, автомодельности, иерархически пространственной структурированности и наличию степенных закономерностей. Можно добавить, что в основе моделирования обоих явлений как диссипативных энергетических систем лежат каскадные процессы. Однако природа каскадов существенно разная. Турбулентные каскады [2]

связаны с переносом энергии по масштабам сверху вниз, т.е. энергия посредством единообразного механизма передается без потерь от вихрей более крупного к вихрям более мелкого масштаба и лишь на молекулярном уровне, где динамическая вязкость наибольшая, энергия переходит в тепло (*прямой пассивный каскад*). Сейсмический процесс, по-видимому, сложнее. Наряду с возможностью описанной фазы в нем доминирует *активный обратный каскад* последовательной передачи напряжений от микротрещин к крупным разломам со случайным механизмом сброса напряжений на любом масштабе.

Известны многочисленные примеры компьютерного моделирования сейсмических и турбулентных каскадов (см., например, [2, 3]). Наша цель – дать аналитическое исследование мультифрактальных свойств одного класса прямых каскадов, известного как мультипликативный хаос Мандельброта и моделирующего в простейшем виде турбулентность.

Несколько слов об истории вопроса. В 1941 г. А. Колмогоров [4] определил скейлинговые свойства турбулентности в несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса. А именно: если $V(x, t)$ – поле скоростей в потоке, то его структурная функция порядка $p \geq 0$ такова, что

$$S_p(L) = \langle |V(x+l, t) - V(x, t)|^p \rangle \simeq c_p (\varepsilon L)^{p/3}, \quad (1)$$

где l – смещение размера L , ε – средняя рассеянная энергия в единицу времени на единицу массы, а $\langle \cdot \rangle$ – тип осреднения. Строго говоря, результат А. Колмогорова относится к значениям p , равным 2 и 3, и осреднению по ансамблю. Обобщение получается формально из размерностных соображений, при этом тип осреднения обычно не обсуждается и молчаливо предполагается равенство средних по ансамблю (операция E) и по пространству (в дальнейшем операция $\langle \cdot \rangle$).

Закон (1) оказался приближенно верным при малых p : $p \in (0, 5)$. На это обратил внимание Л. Ландау еще в 1942 г., исходя из того, что локально осредненная диссипация энергии ε_L на масштабе L испытывает сильные случайные пространственные флуктуации (явление перемежаемости), т.е. рассеяние энергии происходит не равномерно, а концентрируется на случайных "тощих" пространственных структурах. Уточненная гипотеза подобия в турбулентности, сформулированная Колмогоровым в 1962 г. (см. [5]), предполагает, что величина ε_L обладает нетривиальным скейлингом, таким, что

$$S_p(L) \simeq c_p \langle \varepsilon_L^{p/3} \rangle L^{p/3} \simeq \tilde{c}_p L^{\zeta_p} \varepsilon^{p/3}, \quad (2)$$

где скейлинговый показатель ζ_p нелинеен при больших p .

В 1941 г. А. Колмогоров [6] рассмотрел другую важную прикладную задачу о распределении частиц при дроблении. Процесс дробления моделировался как каскад с автомодельным механизмом последовательного измельчения частиц, что ведет к лог-нормальному распределению их размеров. А. Обухов отождествил процессы дробления частиц и рассеяния энергии в условиях хорошо развитой турбулентности. Это позволило грубо определить скейлинговый показатель в (2). А именно, согласно гипотезе Колмогорова–Обухова, $\log \varepsilon_L / \varepsilon$ имеет нормальное распределение с дисперсией, линейно зависящей от $\log L^{-1}$. Отсюда, используя осреднение по ансамблю, имеем

$$\zeta_p = q - \mu(q - 1)q, \quad q = p/3. \quad (3)$$

Оказалось, что соотношение (3) хорошо описывает эмпирические данные в большом диапазоне $p \in (0, 10)$ [7]. Лог-нормальная гипотеза была причислена к универсальным свойствам развитой турбулентности [5]. Однако Б. Мандельброт [8], обобщая каскадные модели дробления энергии Е. Новикова и А. Яглома, предложил целый класс моделей, в которых ζ_p отлично от (3), и исследовал для них фрактальные свойства структур, в которых происходит рассеяние энергии.

1. КАСКАДЫ МАНДЕЛЬБРОТА

Формализованная модель рассеяния энергии в турбулентном потоке определяется следующим образом. Фиксируем случайный вектор

$$W = (w_1, \dots, w_c), \quad w_i \geq 0,$$

где c – параметр ветвления каскада. Пусть отрезок $J = [0, 1]$ содержит массу $m = 1$ (J – прообраз максимального вихря, а m – его энергия). Разделим J на c равных ячеек (вихри следующего уровня) и распределим в них массу m с весами w_i , т.е. в ячейке Δ_{i1} окажется масса mw_i . Для каждого подынтервала Δ_{i1} генерируем статистически независимую копию весов W и повторяем предыдущую операцию перераспределения массы с Δ_{i1} на подынтервалы Δ_{j2} 2-го уровня и т.д. На n -м шаге мы получим следующее распределение масс (или рассеянной энергии):

$$\mu_n(dt) = \prod_i^n P_i(t) dt, \quad t \in J,$$

где

$$P_i(t) = \sum w_i \chi_{\Delta_{i1}}, \quad \chi_{\Delta} \text{ – индикатор интервала } \Delta.$$

Функции $P_i(t)$ совместно независимы и получаются следующей рекурсивной процедурой.

Пусть $P_n(t)$ определено, приставим друг к другу c статистически независимых копий P_n , т.е. $P_n^{(i)}$, и сожмем отрезок $[0, c]$ в отрезок $(0, 1)$. В результате получим P_{n+1} :

$$P_{n+1} \left(\frac{i+x}{c} \right) = P_n^{(i)}(x), \quad 0 \leq x < 1, \quad i = 0, 1, \dots, c-1.$$

Последовательность мер μ_n определяет случайный каскад, или мультипликативный хаос.

В описанной процедуре масса сохраняется (случай консервативного каскада), если

$$c^{-1} \sum w_i = 1 \quad \text{п.н.}$$

(п.н. – почти наверное, т.е. с вероятностью 1). В общем случае будем считать

$$E c^{-1} \sum w_i = 1, \quad (4)$$

и тогда масса будет сохраняться в среднем, т.е. полная масса M_n меры μ_n такова, что $EM_n = 1$.

Изучение общего случая более естественно, поскольку эмпирические данные обычно относятся к некоторому срезу турбулентного потока, где условия консервативности уже не выполняются. Б. Мандельброт выделил специальный класс каскадов (назовем их \mathcal{M} -каскадами), в которых компоненты вектора W независимы и одинаково распределены и $Ew_i = 1$. Оказалось, что изучение \mathcal{M} -каскадов является центральным для понимания каскадов общего типа.

Информацию о пространственной структуре диссипированной энергии в турбулентном потоке (в математической постановке) должна нести предельная мера

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n,$$

понимаемая, как слабый предел мер μ_n .

В работе [9] показано, что \mathcal{M} -каскад имеет нетривиальную каскадную меру μ ($\mu(dt) \not\equiv dt$, полная масса $M := \mu(J) > 0$ п.н., $EM = 1$), если и только если

$$Ew \log_c w < 1, \quad Ew = 1, \quad P(w = 1) < 1, \quad P(w > 0) = 1, \quad (5)$$

где w – любая компонента вектора W . (Чтобы подчеркнуть зависимость μ от W , будем использовать для нее обозначения $(\mu|W)$ в общем случае и $(\mu|w, c)$ для \mathcal{M} -каскадов.)

Если $Ew(\log w)^2 < \infty$, то величина

$$D = 1 - Ew \log_c w$$

определяет хаусдорфову размерность носителя меры $(\mu|w, c)$ [9, 10].

Изучение мультифрактальных свойств μ сводится

а) к нахождению функции Реньи

$$\tau(q) := \lim_{n \rightarrow \infty} \log \Sigma_n(q) / \log \Delta_n, \quad \Delta_n = |\Delta_{in}| = c^{-n}, \quad (6)$$

где

$$\Sigma_n(q) = \sum_i \mu^q(\Delta_{in}) = \langle \mu^q(\Delta_n) \rangle \Delta_n^{-1}$$

– функция разбиения $\{\Delta_{in}\}$ отрезка J на c^n равных частей, $\langle \cdot \rangle$ – осреднение по ячейкам $\{\Delta_{in}\}$, а предел требует спецификации.

На языке турбулентных каскадов $\tau(q)$ определяет скейлинг структурных функций порядка q для меры диссипированной энергии. С учетом (2) $\zeta_p = \tau(p/3) + 1$ (мы отождествили $\mu(\Delta)$ с $\varepsilon_L L$, где $|\Delta| = L$);

б) к обоснованию мультифрактального формализма, а именно: преобразование Лежандра τ -функции

$$f(\alpha) = \min_q (q\alpha - \tau(q)) \quad (7)$$

имеет смысл дробной размерности множества точек

$$J_\alpha = \{t \in J : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(\Delta_n(t))}{\log \Delta_n} = \alpha\}, \quad (8)$$

в которых мера μ имеет локальный порядок сингулярности/гладкости величины α . Здесь $\Delta_n(t)$ есть последовательность интервалов Δ_{i_n} , содержащих t . Если предел в (8) рассматривается по некоторой последовательности $n \in \mathcal{N}$ целых чисел, то для J_α будем использовать обозначение $J_\alpha(\mathcal{N})$.

2. M-КАСКАДЫ: τ -ФУНКЦИЯ

Грубое представление о τ -функции получают, сделав две последовательные замены в (6):

$$\mu(\Delta_{i_n}) \rightarrow \mu_n(\Delta_{i_n}), \quad \langle \cdot \rangle \rightarrow E.$$

Первая замена обусловлена конечным диапазоном масштабов в реальном турбулентном потоке, а вторая эквивалентна переходу от пространственного осреднения к осреднению по ансамблю реализаций μ . В результате предел (6) явно находится и приводит в случае \mathcal{M} -каскадов к функции $\hat{\tau}(q) = -\Phi(q)$, где

$$\Phi(q) = \log_c Ew^q - q + 1$$

и w – каскадная компонента W .

Величина $\hat{\tau}(p/3) + 1$ используется в турбулентности как скейлинговая функция ζ_p , если она удовлетворяет дополнительным ограничениям при больших p (так называемые неравенства Новикова [11], которые в данном контексте эквивалентны требованию $\Phi'(q) < 0$, $q > 1$). Этим неравенствам не удовлетворяет функция (3), что вызвало критическое отношение к лог-нормальной гипотезе в турбулентности. Чтобы описать истинный предел (6), рассмотрим Φ на всей оси q с учетом бесконечных значений Φ . Полученная функция выпукла и имеет две опорные прямые, выходящие из нуля, $Y = a_\pm q$, точнее – указанные прямые являются границами минимального конуса, содержащего график Φ . Пусть q_\pm – абсциссы возможных опорных точек: $q_+ \geq 1$, $q_- \leq 0$, в противном случае $q_\pm = \pm\infty$.

Теорема 1. Пусть $(\mu|w, c)$ – \mathcal{M} -каскад. Тогда в условиях (5) найдется такая последовательность $\{n_i\} = \mathcal{N}$, что предел (6) имеет место для всех q с вероятностью 1, когда n пробегает множество \mathcal{N} . При этом множество реализаций $\mu(dt|w)$ меры, для которых верно (6), одно и то же для всех q и $\tau(q) = -\Phi_*(q)$, где

$$\Phi_*(q) = \begin{cases} \Phi(q), & q \in (q_-, q_+), \\ a_\pm q, & q/q_\pm > 1, \quad q_- \neq 0, \\ \infty, & q < 0, \quad q_- = 0. \end{cases} \quad (9)$$

В работах [12, 13] теорема 1 получена для $\mathcal{N} = Z^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, но только для $q > 0$ и при очень жестких ограничениях на w :

$$0 < \delta < w \leq c \quad \text{п.н.} \quad (10)$$

Если $q_+ < \infty$, то в условиях (10) функция $\tau(q)$ продолжает $\hat{\tau}(q)$, $q < q_+$ за критическую точку q_+ касательной прямой в точке $q_+ - 0$. В общем случае возникает новый эффект. Опорная прямая $Y = a_+q$ будет трансверсальна к $\Phi(q)$, если $q_+ < \infty$ является границей конечных значений Φ . Поэтому у функции $\tau(q)$ могут появляться разрывы первой производной, как только распределение w будет иметь "тяжелые хвосты" в 0 и ∞ . Конечные точки q_{\pm} , в которых Φ'_* терпит разрыв, назовем точками 1-го рода, в остальных случаях – точками 2-го рода.

Из доказательства теоремы 1 следует, что если скейлинг (6) существует для $q \in (q_-, q_+)$ для почти всех реализаций меры и $q_+(q_-)$ является точкой 2-го рода, то скейлинг существует для всех $q > q_-(q < q_+)$, а τ определяется соотношением (9).

3. М-КАСКАДЫ: МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЕ РАЗМЕРНОСТИ

С критическими точками q_{\pm} двух родов связаны два типа интервалов $(\alpha_-^{(2)}, \alpha_+^{(2)}) \subseteq (\alpha_-^{(1)}, \alpha_+^{(1)})$, в которых преобразование Лежандра $\mathcal{L}\tau = f(\alpha)$ определено и соответственно строго и нестрого выпукло (функция f линейна в дополнении к внутреннему интервалу). Точки α определяются соотношениями

$$\alpha_{\mp}^{(2)} = -\Phi'(q_{\pm} \mp 0), \quad \alpha_{\mp}^{(1)} = -\Phi(q_{\pm} \mp 0)/(q_{\pm} - 0)$$

или их пределами, если $|q_{\pm}| = \infty$.

Теорема 2.

а. Оценка снизу. Пусть f определено соотношением (7). В условиях (5) для любого фиксированного $\alpha \in (\alpha_-^{(2)}, \alpha_+^{(2)})$, такого, что $f(\alpha) \neq 1$, хаусдорфова размерность

$$H\text{-dim } J_{\alpha} \geq f(\alpha) \quad \text{п. н.},$$

если $q_- \neq 0$. Если $q_- = 0$ и $E|\log w|^{\epsilon} < \infty$ для некоторого $\epsilon > 0$, утверждение остается в силе для $J_{\alpha}(\mathcal{N})$, где \mathcal{N} – любая последовательность целых чисел n_i : $n_{i+1}/n_i \geq \rho > 1$.

б. Оценка сверху. Пусть последовательность $\mathcal{N} = \{n_i\}$ та же, что и в теореме 1. Тогда в условиях (5) с вероятностью 1

$$H\text{-dim } J_{\alpha}(\mathcal{N}) \leq f(\alpha), \quad \alpha \in (\alpha_-^{(1)}, \alpha_+^{(1)}),$$

при этом множество реализаций меры Ω' : $P(\Omega') = 1$, для которых верны последние неравенства, не зависит от α .

Некоторые результаты по мультифрактальным размерностям в условиях еще более жестких, чем (10), получены в [12]. В условиях (10) теорема 1 верна при $\mathcal{N} = Z_+$ [13]. Поэтому теоремы 1 и 2 усиливают аналогичные результаты из [12] следующим образом: в условиях (10) почти для всех реализаций каскадной меры $H\text{-dim } J_{\alpha} = f(\alpha)$, $\alpha: f(\alpha) \neq 0; 1$.

4. КАСКАДЫ ОБЩЕГО ТИПА

Назовем w случайной компонентой вектора $W = (w_1, \dots, w_c)$, если $w = w_i$ с вероятностью $1/c$.

Теорема 3. Пусть случайная компонента вектора W удовлетворяет условиям (5). Тогда теоремы 1 и 2 сохраняют силу для каскадов общего типа (4) (при этом под $\Phi(q)$ надо понимать Φ -функцию, отвечающую случайной компоненте W).

Замечание. Теорема 3 означает, что мультифрактальные характеристики (τ, f) не различают каскады по их внутренним свойствам, связанным и с типом зависимости компонент генерирующего вектора W .

5. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Доказательство теорем 1–3 базируется на известных результатах решений стохастического уравнения, которому удовлетворяет полная масса M меры μ :

$$M = \frac{1}{c} \sum_{1 \leq i \leq c} w_i M_i,$$

где M_i – статистически независимые экземпляры M , которые не зависят от $W = \{w_i\}$ [14], а также на результатах о моментах M . Условия существования положительных моментов M получены в работах [9, 15], информацию об отрицательных моментах дает

Теорема 4. Пусть w – случайная компонента каскадного вектора W – удовлетворяет условиям (5). Тогда верны импликации

$$\begin{aligned} \text{а) } Ew^{-h} < \infty &\implies EM^{-ha} < \infty, & h > 0, \\ \text{б) } E|\log w|^h < \infty &\implies E|\log M|^{h'a} < \infty & \forall h' \in (0, h), \end{aligned}$$

где $a = c$ для M -каскадов и $a = 1$ в общем случае.

Замечание. Константа a в теореме 4 является точной. Приведем два примера. Пусть случайная компонента W имеет бета-распределение с параметрами $(h, h(c-1))$, т.е. $P(w < x) \sim kx^h, x \rightarrow 0$. Тогда M для M -каскада имеет гамма-распределение с параметром ch , т.е. $P(M < x) \sim k_1 x^{ch}, x \rightarrow 0$ [14]. Следовательно, w имеет все отрицательные моменты с показателем $q > -h$, а M – только с $q > -ch$. Для каскада, у которого все компоненты одинаковы, $w_i = w$, величина M будет иметь гамма-распределение с параметром h . Отсюда $EM^{-h'} < \infty \forall h' < h$.

Доказательства теорем 1–4 опубликованы [16]. Для приложений важнее обсудить примеры и следствия из полученных теорем.

6. ПРИМЕРЫ: М-КАСКАДЫ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫМ ГЕНЕРАТОРОМ W

Пусть ξ – безгранично делимая (б.д.) случайная величина. В статистике мультифрактальных процессов получили широкое распространение M -каскады с переменной w вида

$$w = e^{-\xi} / Ee^{-\xi}, \quad \xi - \text{б.д.} \tag{11}$$

(см., например, [11, 17, 18]). Модификация известной теоремы Леви–Хинчина [19] о представлении характеристической функции дает широкие возможности для параметризации τ -функций.

Утверждение 5. Пусть каскадная мера $(\mu|w, c)$ с переменной w вида (11) такова, что $\Phi(q) < \infty$ для $q \in (Q_-, Q_+) \supset (0, 1]$. Тогда

$$\Phi(q) = \int [e^{-qx} - 1 - q(e^{-x} - 1)]x^{-2}L(dx) - q + 1, \quad (12)$$

где L – локально-конечная мера, обладающая свойствами

$$\int_{|x|>1} e^{-ax}x^{-2}L(dx) < \infty, \quad a \in (Q_-, Q_+) \cup \{0\} \quad (13)$$

и

$$\int (1 - (x+1)e^{-x})x^{-2}L(dx) < 1. \quad (14)$$

Замечание. Представления типа Леви–Хинчина обычно содержат произвол в выборе центрирующей функции (см. в данном случае (12), третье слагаемое в квадратных скобках). Специальный выбор, указанный здесь, обусловлен нормировкой $Ew = 1$ и связью (12) с лог-пуассоновскими каскадами (см. ниже).

Доказательство. Поскольку $\zeta = \ln w$ безгранично делима и $E \exp(\zeta q) < \infty$, $q \in (Q_-, Q_+) \supset (0, 1]$, то характеристическая функция φ величины ζ аналитична в полосе $\text{Im } z \in (Q_-, Q_+)$. По теореме Райкова (см. [20], §2.4), Леви–Хинчина представление $\varphi(z)$ справедливо не только для $\text{Im } z = 0$, но и во всей полосе $Q_- < \text{Im } z < Q_+$. Отсюда

$$\log(Ew^{-i\alpha q}/(Ew^{-i\alpha})^q) = \int [e^{i\alpha qx} - 1 - q(e^{i\alpha x} - 1)]x^{-2}L(dx),$$

где L – локально-конечная мера, такая что

$$\int_{|x|>1} x^{-2}L(dx) < \infty,$$

$q \in (Q_-, Q_+)$ и $0 < \text{Im } \alpha \leq 1$. Полагая $\alpha = i$, получим (12) и (13). Условие (14) выражает тот факт, что мера μ нетривиальна, т.е. $\Phi'(1) < 0$, что эквивалентно первому соотношению в (5).

Следствие 1. Если спектральная мера Леви $L(dx)$ такова, что $\int x^{-2}L(dx) = L < \infty$, то каскадный генератор w допускает факторизацию вида

$$w = k \cdot \tilde{w}_1 \dots \tilde{w}_\nu, \quad w = k, \text{ если } \nu = 0, \quad (15)$$

где ν – пуассоновская случайная величина с параметром $\lambda = L \ln c$ (c – параметр ветвления), $\{\tilde{w}_i\}$ – не зависит от ν и состоит из одинаково распределенных независимых величин, имеющих распределение $F(x)$:

$$dF(e^{-x}) = x^{-2}L(dx)/L.$$

Нормализующая константа k определяется условием $Ew = 1$, в частности $k = 1$, если $E\tilde{w} = 1$.

В условиях (15)

$$\Phi(q) = L \int_0^\infty x^q dF(x) - qa + b, \tag{16}$$

где a, b однозначно определяются условиями: $\Phi(0) = 1$ и $\Phi(1) = 0$.

Соотношение (16) позволяет легко строить M -каскады с критическими точками q_{\pm} любого типа.

Следствие 2. Пусть распределение $F(x)$ в (16) имеет плотность вида

$$F'(x) = L^{-1} \sum a_i x^{\alpha_i - 1} [x < 1] + \sum b_j x^{-\beta_j - 1} [x > 1],$$

где $a_i \geq 0, \alpha_i > 0, b_j \geq 0, \beta_j > 1$. Тогда $\Phi(q)$ принадлежит к подклассу рациональных функций:

$$\Phi(q) = \bar{D}q(q-1) \left[\sum_i \rho_i \frac{1 + \alpha_i}{q + \alpha_i} + \sum_j \rho'_j \frac{\beta_j - 1}{\beta_j - q} \right] - q + 1, \tag{17}$$

где $\rho_i \geq 0, \rho'_j \geq 0, \sum \rho_i + \sum \rho'_j = 1, q \in (\max_i(-\alpha_i), \min_j \beta_j)$ и $1 - \bar{D}$ - размерность носителя меры μ . В частности, класс (17) содержит двухпараметрическое семейство

$$\Phi(q) = \theta q(q-1)/(q+\alpha) - q + 1, \quad \alpha > 0, \quad \theta/(1+\alpha) < 1, \tag{18}$$

которое хорошо аппроксимирует широкий спектр реальных каскадов, а в пределе ($\alpha \rightarrow \infty, \theta/\alpha \rightarrow \bar{D}$) дает Φ -функцию лог-нормального каскада.

Замечание. В приложениях обычно используют каскадные генераторы (11) с положительным спектром Леви, т.е. $L[(-\infty, 0)] = 0$. Это обеспечивает конечность $\Phi(q)$ для всех неотрицательных q . Вместе с тем, отождествление $\hat{\tau}(q) = -\Phi(q)$ с $\tau(q)$ ведет, в силу неравенств Новикова, к дополнительному и уже неоправданному сужению класса каскадных переменных (11). Иначе говоря,

Теорема 1 снимает "табу" на функции $\hat{\tau}(q) = -\Phi(q)$, которые не подчиняются неравенствам Новикова [11]. Кроме того, она показывает, что "физическое" требование типа $\tau(q)/q \rightarrow 0, q \rightarrow \infty$ противоречиво, поскольку $\tau(q)/q = |a_+| > 0$, если $q_+ > 1$.

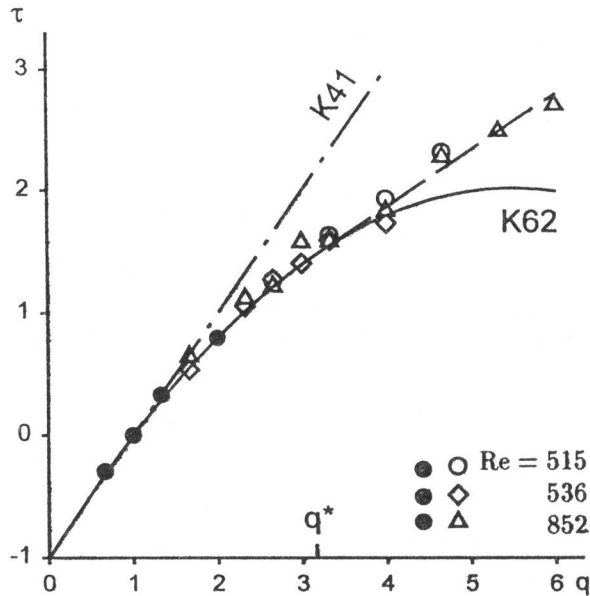
7. M-КАСКАДЫ В ПРИЛОЖЕНИЯХ

7.1. Лог-нормальные каскады. В [5] отмечено, что лог-нормальная гипотеза Колмогорова-Обухова в турбулентности реализуется для допредельных M -каскадных мер $\mu_n(dx)$, если считать $\log w$ гауссовской случайной величиной. (Это наблюдение неверно, если μ_n заменить предельной мерой μ .) Каскад с лог-нормальной переменной w относится к типу (11) со спектральной мерой Леви $L(dx)$, сконцентрированной в одной точке $x = 0$. Нетрудно видеть, что (12) дает

$$\Phi(q) = \bar{D}q(q-1) - q + 1,$$

где \bar{D} – коразмерность носителя меры μ . Согласно [21], вопрос о строгом обосновании мультифрактальных свойств лог-нормальной модели является открытым. Теоремы 1 и 2 до некоторой степени решают эту задачу (с точностью до существования предела (6) по любой последовательности $n \in \mathbb{Z}$).

Функция $\tau(q)$ линейна вне интервала (q_-, q_+) , где $q_{\pm} = \pm \bar{D}^{-1/2}$, и тривиально подчиняется неравенствам Новикова. Этим снимается первый критический аргумент против лог-нормальной модели. Вторым аргумент связан с заметным расхождением кривой (3) с реальными данными при больших p : $p \geq 10$ [7]. Это не так, если рассматривать, в соответствии с теоремой 1, кривую $\tau(q) = -\Phi_*(q)$ (см. рисунок).



Скейлинговые показатели $\tau(q)$ структурной функции скорости (1) в турбулентном потоке

Эмпирические показатели приведены для трех чисел Рейнольдса Re [6], указанных с соответствующими условными обозначениями; черными кружками обозначены данные, одинаковые для всех Re

Теоретические показатели: штрих-пунктир – прямая Колмогорова K41, $\tau(q) = q - 1$; сплошная линия – лог-нормальный закон Колмогорова–Обухова K62 (см. (3)) с $\mu = 0.2$ и $\tau(q) = \zeta_{3q} - 1$; штриховая линия – линейное продолжение закона K62 в закритической области, $\tau(q) = c_+q$, $q > \sqrt{2/\mu} = q^*$, где $c_+ = (1 - \sqrt{\mu/2})^2$

Как заметил Б. Мандельброт, локальная асимптотическая лог-нормальность $\mu_n(\Delta_n(t))$, где t фиксировано, является общим свойством любых M -каскадов, для которых $E(\log w)^2 < \infty$. Действительно, из определения M -каскадов следует, что

$$\log \mu_n(\Delta_n(t)) = \sum_{i=1}^n \log w_i, \quad (19)$$

где w_i – независимые одинаково распределенные весовые коэффициенты, связанные с последовательностью ячеек $\Delta_1(t) \dots \Delta_n(t)$, содержащих точку t . В условиях $E(\log w)^2 < \infty$ остается применить к (19) центральную предельную теорему [19]. Если дисперсия $\log w$ бесконечна, распределения (19) будут притягиваться в регулярных ситуациях к устойчивым распределениям Леви [19]. Это локальное свойство каскадных мер нередко используется как аргумент в пользу универсальности каскадных моделей с лог-нормальными и лог-устойчивыми переменными w [5, 17]. В таких моделях $\mu_n(\Delta_n)$ имеют тот же тип распределения, что и w .

В дополнение к аргументации Б. Мандельброта полезно провести параллель с одним очень старым фактом из теории случайных временных рядов. В работе [22] 1959 г. показано, что если стационарный процесс с непрерывным спектром пропускать через последовательность узкополосных фильтров (полоса пропускания Δ_n стягивается в точку), то на выходе получим процесс асимптотически гауссовский, хотя исходный процесс таковым не являлся. В обоих случаях речь идет об асимптотически локальных свойствах случайных мер (спектральных для процессов либо каскадных – в рассматриваемом случае), которые не имеют отношения к вероятностным распределениям мер в целом.

7.2. Лог-пуассоновские каскады. В работе [18] предложена модель τ -функции вида $q/3 + 2[1 - (2/3)^q] - 1$, которая отвечает $\hat{\tau}$ -функции \mathcal{M} -каскада типа (11) и (12) с $w = a^\nu / E a^\nu$, где ν – пуассоновская случайная величина с параметром $\lambda = 2 \ln c$ и $a = 2/3$. Для этого каскада спектральная мера $L(dx)$ (как и в лог-нормальном случае) сконцентрирована в одной точке $x_0 \neq 0$. Поэтому мультифрактальные свойства каскада качественно те же, что в лог-нормальном случае: критические точки q_\pm конечны и являются точками 2-го рода; функция $f(\alpha)$ (см. (7)) имеет вид \cap , принимает все значения из интервала $[0, 1]$ и играет в условиях (6) роль размерностей для всех α : $f(\alpha) \neq 0$; 1.

Представление (12) означает, что любая каскадная переменная типа (11) является пределом (по распределению) вида

$$w = d \lim_{n \rightarrow \infty} w'_1 \dots w'_n,$$

где $w'_i = k_i \exp(-x_i \nu_i)$ – независимые лог-пуассоновские каскадные переменные, $E \nu_i = L(\Delta x_{in}) x_{in}^{-2} \ln c$, $i = 1, \dots, n$, и $\cup \Delta x_{in} = [-n, n]$, $|\Delta x_{in}| \rightarrow 0$, $\Delta x_{0n} \ni 0$. Это второй аргумент в пользу выбора центрирующей функции в представлении (12).

Согласно [18], лог-пуассоновская модель описывает новейшие экспериментальные данные для $q \leq 10/3$ с высокой точностью (1%). Однако правильное продолжение τ за критическую точку $q_+ = 4.1393$, $\tau = 0.4847q$, не улучшает точность лог-нормальной модели (4%) для данных работы [7] в интервале $q [10/3, 18/3]$. Если универсальная постоянная $\mu = 1 - \tau(2) = 0.2$ [7], то $\tau = 0.4675q$, $q > \sqrt{10}$. Таким образом, лог-нормальная модель достаточна по точности аппроксимации имеющих данных (о точности τ см. [23]) и оптимальна по числу параметров (один параметр, μ).

7.3. Лог-устойчивые каскады. Широкое распространение, особенно в атмосферной динамике, получили \mathcal{M} -каскады, в которых $\log w$ имеют устойчивое, по Леви, распределение с параметрами Леви $\alpha_L \in (0, 2)$ и $\beta_L = 1$ (см. [19]). По

причинам, описанным в п.7.1, они рассматриваются как универсальные [17]. В этом случае спектральная мера Леви

$$L(dx) = kx^{1-\alpha_L} dx, \quad x > 0$$

и

$$\Phi(q) = (1 - D)(q^{\alpha_L} - q)/(\alpha_L - 1) - q + 1, \quad q > 0, \quad (20)$$

где $D \in (0, 1)$ – размерность носителя каскадной меры. Поскольку (см. [19])

$$P(w < x) = P\left(\ln w > \ln \frac{1}{x}\right) = k_1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{-\alpha_L} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow 0,$$

все моменты $Ew^q = \infty$ при $q < 0$, т.е. $\Phi(q) = \infty$, $q < 0$, но

$$E|\log w|^\varepsilon < \infty \quad \forall \varepsilon < \alpha_L.$$

Поэтому применима теорема 2. Из (20) находим критические точки:

$$q_- = 0, \quad q_+ = (1 - D)^{-1/\alpha_L},$$

где q_+ – есть точка 2-го рода, а q_- является точкой 1-го (2-го) рода, если $\alpha_L \geq 1$ ($\alpha_L < 1$).

Преобразование Лежандра τ -функции $f(\alpha) = 1$ для $\alpha > \alpha_+^{(2)} = (\alpha_L - D)/(\alpha_L - 1)$, если $\alpha_L > 1$; $f(\alpha) \rightarrow 1$ при $\alpha \rightarrow \infty = \alpha_+^{(1)}$, если $\alpha_L < 1$.

Принимая во внимание указанные свойства $f(\alpha)$, из теорем 1 и 2 заключаем, что если скейлинг (6) существует для $q \in (0, q)$ и почти всех реализаций меры, то

$$H\text{-dim } J_\alpha(\mathcal{N}) = f(\alpha) \quad \forall \alpha : f(\alpha) \neq 0; 1,$$

где \mathcal{N} – любая последовательность целых чисел вида $\{n_i : n_{i+1}/n_i > \rho > 1\}$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Суммируем грубо полученные результаты, чтобы продолжить сравнение τ и $\hat{\tau}$. Мы доказали следующее:

$$\langle \mu^q(\Delta_n(t)) \rangle \sim \Delta_n^{1+\tau(q)} \Rightarrow \begin{cases} \tau(q) = -\Phi_*(q), \\ \dim\{t : \mu(\Delta_n(t)) \sim \Delta_n^\alpha\} = \mathcal{L}\tau(\alpha), \end{cases} \quad (21)$$

где $n \gg 1$, $\langle \cdot \rangle$ – усреднение по пространству, точнее по ячейкам Δ_{in} , $i = 1, \dots, c^n$, и функция τ такова, что $\mathcal{L}\tau \geq 0$.

Представим в аналогичном виде традиционные результаты теории больших уклонений [24]:

$$E\mu_n^q(\Delta_n(t)) = \Delta_n^{1+\hat{\tau}(q)} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\tau}(q) = -\Phi(q), \\ \Delta_n^{-1} \mathcal{P}\{\mu_n(\Delta_n(t)) \sim \Delta_n^\alpha\} \sim \Delta_n^{-\mathcal{L}\hat{\tau}(\alpha)}, \end{cases} \quad (22)$$

где \mathcal{P} – вероятностная мера и $n \rightarrow \infty$.

Результат справа в (22) требует дополнительных к (5) условий на w . В отличие от $\mathcal{L}\tau$ функция $\mathcal{L}\hat{\tau}$ является знакопеременной.

Сходство (21) и (22) очевидно, если размерность в (21) отождествить с боксовой размерностью $B\text{-dim}$. Тогда в силу (21) величина $\Delta^{-\mathcal{L}\tau(\alpha)-1}$ должна определять долю пространственных ячеек, где мера имеет сингулярность типа α . При тождестве осреднений по пространству и ансамблю (“эргодичность”) эта величина должна соответствовать вероятности для сингулярности типа α в точке (результат (22)). Поскольку $\mathcal{L}\tau \neq \mathcal{L}\hat{\tau}$, “эргодическая гипотеза” оправдана здесь лишь при малых q , т.е. там, где $\mathcal{L}\hat{\tau} > 0$. Заметим, однако, что и сам постулат о равенстве размерностей, $B\text{-dim} = H\text{-dim}$, здесь неверен. Множества J_α плотны в $[0,1]$, и поэтому $B\text{-dim} J_\alpha = 1$. Таким образом, свойства мультифрактальности (существование τ и равенство $\mathcal{L}\tau = H\text{-dim} J_\alpha$) и больших уклонений (22), вообще говоря, различны.

Нарушение “эргодичности” требует осторожности при интерпретации эмпирических данных. Теоретически их можно представить как совокупность $\mu(\Delta_n(x_i)|\omega_j) = \xi_i$, где $\{x_i\}$ – точки наблюдений и ω_j – реализации. Усредняя ξ_{ij}^q в порядке i, j (в первом случае) или j, i (во втором случае), мы приходим при больших q к разным оценкам скейлинговых экспонент: τ – в первом случае и $\hat{\tau}$ – во втором. При малых выборках результат, по-видимому, непредсказуем. Критика лог-нормальной гипотезы Колмогорова–Обухова как раз и основана на сопоставлении разных осреднений.

Благодарности. Настоящая работа выполнена при содействии Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-00311) и Международного научно-технического центра (грант N 008-94).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kagan Y.Y. Seismicity: turbulence of solids // Nonlinear Sci. today. 1992. Vol.2, N1. P.1–12.
2. Sreenivasan K., Stolovitzky G. Turbulent cascades // J. Stat. Phys. 1995. Vol.78, N 1/2. P.311–333.
3. Шнирман М.Г. Динамическая иерархическая модель дефектообразования // Численное моделирование и анализ геофизических процессов. М.: Наука, 1987. С.87–95. (Вычисл. сейсмология; Вып.20).
4. Колмогоров А.Н. О локальной структуре турбулентности в вязкой несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. 1941. Т.30. С.9–13.
5. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Т.2. М.: Наука, 1967. 720 с.
6. Колмогоров А.Н. О лог-нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении // ДАН СССР. 1941. Т.31. С.99–101.
7. Anselmet F., Gagne Y., Hopfinger E., Antonia R. High-order velocity structure functions in turbulent shear flows // J. Fluid. Mech. 1984. Vol.140. P.63–89.
8. Mandelbrot B. Multiplications aléatoires et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire // C.r.Acad.sci., Ser.A. 1974. Vol.278. P.289–292; 355–358.
9. Kahane J.P., Peyrière J. Sur certaines martingales de B.Mandelbrot // Adv. Math. 1976. Vol.22. P.131–145.

10. *Waymire E.C., Williams S.C.* A cascade decomposition theory with applications to Markov and exchangeable cascades // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1996. Vol.348, N12. P.585-632.
11. *Novikov E.A.* Infinitely divisible distributions in turbulence // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol.50, N5. P.R3303-R3305.
12. *Holley R., Waymire E.* Multifractal dimensions and scaling exponents for strongly bounded random cascades // *Ann. Appl. Probab.* 1992. Vol.2, N4. P.819-845.
13. *Collet P., Koukiou F.* Large deviations for multiplicative chaos // *Commun. Math. Phys.* 1992. Vol.147. P.329-342.
14. *Durrett R., Liggett T.M.* Fixed points of the smoothing transformation // *Z. Wahr. Verw. Geb.* 1983. Vol.64. P.275-301.
15. *Nasr Ben.* Mesures aléatoires de Mandelbrot associées à des substitutions // *C.r.Acad. sci., Ser.I.*1987. Vol.304. P.255-258.
16. *Molchan G.M.* Scaling exponents and multifractal dimensions for independent random cascades // *Commun. Math. Phys.* 1996. Vol.179. P.681-702.
17. *Schertzer D., Lovejoy S.* Lecture notes. AGU Chapman/EGS Richardson Memorial Conference: Nonlinear variability in Geophysics-3 (Scaling and multifractal processes). Cargèse: Inst. d'études sci. de Cargèse, 1993. 291 p.
18. *She Z.-S., Leveque E.* Universal scaling laws in fully developed turbulence // *Phys. Rev. Lett.* 1994. Vol.72, N3. P.336-339.
19. *Феллер Ф.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2. М.: Мир, 1967. 751 с.
20. *Рамачандран Б.* Теория характеристических функций. М.: Наука, 1975. 220 с.
21. *Peckman S., Waymire E.* On a symmetry of turbulence // *Commun. Math. Phys.* 1992. Vol.147. P.365-370.
22. *Волконский В.Н., Розанов Ю.А.* Некоторые предельные теоремы для случайных функций // *Теория вероятн. и ее применения.* 1959. Т.4, N2. С.186-207.
23. *Pedrizzetti G., Novikov E.A., Praskovsky A.A.* Self-similarity and probability distributions of turbulent intermittency // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol.53, N1. P.475-484.
24. *Ellis R.S.* Large deviations for a general class of random vectors // *Ann. Probab.* 1984. Vol.12, N1. P.1-12.