

УДК 550.348

## ФРАКТАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ОЧАГА, СКЕЙЛИНГ И ПОДОБИЕ В ДВУМЕРНОЙ МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ БАРРИДЖА–КНОПОВА

В.М. Герцик

*Международный институт теории прогноза землетрясений  
и математической геофизики Российской академии наук*

В двумерной модификации модели Барриджа–Кнопова обнаружены фрактальные свойства псевдослучайного множества областей сдвига для численно моделируемых землетрясений. Установлен степенной характер связей между энергией событий и геометрическими характеристиками очага. Ряд "законов подобия", постулируемых в классической сейсмологии, для модельных землетрясений не выполняется.

## FRactal source structure, energy scaling and similarity for a modified Burridge–Knopoff model

V.M. Gertzik

*International Institute of Earthquake Prediction Theory  
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences*

A pseudostochastic set of shear areas for computer generated earthquakes in a modified two-dimensional Burridge–Knopoff model demonstrates some fractal properties. The energy of events and geometrical source parameters are found to be related by a power law. A number of "similarity laws" postulated in classical seismology do not hold in the model.

### ВВЕДЕНИЕ

Пружинно-блочная модель разлома, продуцирующего землетрясения, была предложена Барриджем и Кноповым [1] в 1967 г. для одномерного случая, а двумерный вариант рассмотрел Оцука [2]. С тех пор как в работах Бака и Танга [3-5] и Карлсон и Лангера [6, 7] для модификаций этой модели был обнаружен хаотический характер динамики, направление исследований, в котором сейсмический процесс понимается как проявление динамического хаоса в нелинейных системах, развивается в высшей степени интенсивно [8-19].

Исследуемые обычно модификации модели Барриджа–Кнопова делятся на два типа с разной степенью упрощения.

В модели первого типа [6–9], введенной в работах Карлсон и Лангера [6, 7], ее физические свойства формализуются достаточно строго, в частности учитываются инерционные силы и трение скольжения. Это приводит к необходимости решать большие системы дифференциальных уравнений на очень больших временных интервалах, что делает проблематичным сколько-нибудь серьезный контроль точности решений. В режиме динамического хаоса, для которого типично экспоненциальное "разбегание" траекторий, сочетание такого разбегания с ошибками счета может давать непредсказуемые последствия.

В модели второго типа [10–17], восходящей к работам [3–5], не учитываются массы блоков и трение скольжения. Кроме того, движение блока, вызванное передачей силы с соседнего блока, начинается лишь после остановки последнего. Иначе говоря, проскальзывание блока влияет на соседний блок, начинающий движение вслед за ним, но обратное влияние отсутствует. Эти упрощения позволяют избежать решения дифференциальных уравнений и значительно ускоряют вычислительный процесс.

Тот факт, что качественное поведение многокомпонентных систем в статистической физике определяется коллективными эффектами и слабо зависит от деталей свойств отдельного элемента, позволяет предполагать, что оба типа моделей способны имитировать некоторые существенные свойства относительного движения плит вдоль разлома. В пользу такого предположения говорит то, что все двумерные варианты моделей дают в численном эксперименте распределение сейсмических событий, подобное линейному в логарифмических координатах графику повторяемости Гутенберга–Рихтера, описывающему реальную сейсмичность.

В работах автора [18, 19] предложена модель второго типа, в которой, однако, сдвиг блока начинается, как только действующая на него сила достигает прочности сцепления и в "быстром времени" возможно одновременное движение нескольких блоков. Эта модель имеет свойства, которые обнаруживаются отдельно в моделях обоих типов. В частности, в одномерном случае при некоторых условиях наблюдается повышенная вероятность так называемых характеристических землетрясений, в которых сдвиг захватывает практически все блоки. Это явление было обнаружено в модели Карлсон и Лангера, но не отмечается в работах, касающихся моделей второго типа. Простота нашей модели позволила подробнее изучить этот феномен и показать, что, по крайней мере для этой модификации, он является своеобразным артефактом, исчезающим при увеличении числа блоков в цепочке или жесткости вертикальных пружин. В трехмерно-слоистом варианте модели в результате появления дальнего действия типа среднего поля возникает кластеризация событий в виде форшоков и афтершоков сильных толчков.

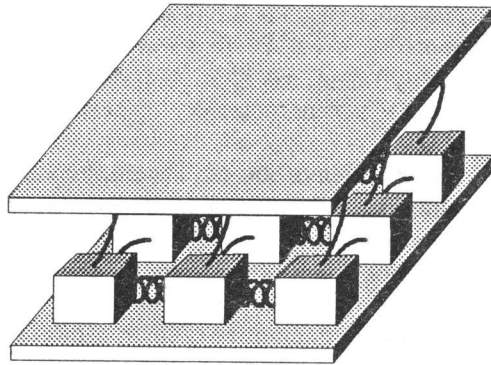
Принятие новой точки зрения на природу сейсмичности как на проявление динамического хаоса может привести к пересмотру некоторых принципов подобия классической сейсмологии, сформулированных в работах Аки [20, 21] и Канамори, Андерсена [22]. Это, во-первых, представление о том, что очаг землетрясения, т.е. поверхность скольжения внутри Земли, на которой возникает разрыв смещения, сохраняет геометрическое подобие при росте его диаметра  $D$  и его площадь  $S$  растет как  $D^2$ . Во-вторых, это постулаты о независимости сброса напряжений и удельной (деленной на  $S$ ) разности смещений от  $D$ . Приведенные в настоящей работе результаты исследования модели показывают, что для нее ни один из этих

принципов не выполняется, а псевдослучайное семейство площадок скольжения обладает определенными фрактальными свойствами. Неверным для модельных толчков оказывается и вид связи между энергией землетрясения  $W$  и геометрическими характеристиками очага:  $W \sim SD \sim D^3$ , следующий из указанных принципов и представления очага в виде эллиптической или прямоугольной трещины. Эта связь в модели является тоже степенной, но с дробными показателями. Наконец формула  $\log M = 3M_s/2$ , связывающая сейсмический момент  $M$  с магнитудой  $M_s$ , выведена [22] с использованием принципов подобия, и потому может оказаться неточной. Связь сейсмического момента и энергии для модели совпадает с классической:  $W \sim M$ .

### ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Модель представляет собой набор блоков, расположенных на прямоугольной области горизонтальной поверхности (которую мы будем называть полом) с центрами в точках целочисленной решетки. Каждый блок соединен пружинами с ближайшими соседями и с потолком, т.е. с верхней горизонтальной поверхностью (рис. 1). Пол смещается с постоянной скоростью вдоль одной из горизонтальных осей координат, а каждый блок движется вместе с полом, пока сила, действующая на него со стороны пружин, не достигнет предела прочности сцепления.

Рис. 1. Схема модели



На неформальном уровне процесс генерации толчков описывается следующим образом. Блок начинает движение относительно пола, когда действующая на него сила достигает предела прочности сцепления, и останавливается, когда сила обращается в 0. При движении блока меняется натяжение горизонтальных пружин, связывающих его с ближайшими соседями. Если сила на соседнем блоке достигает предела, этот блок тоже начинает двигаться, и так далее. Предполагается, что такие лавинные процессы происходят мгновенно, и вводится правило, описывающее перемещение движущихся блоков друг относительно друга: расстояния между движущимися блоками не меняются. Иначе говоря, "в быстром времени" все движущиеся блоки имеют одну и ту же скорость.

Пусть в начальный момент времени точки прикрепления вертикальных пружин к потолку расположены на целочисленной решетке, т.е. определяются наборами координат  $i, j$ ,  $i = 1, \dots, N_1$ ,  $j = 1, \dots, N_2$ . Предполагается, что основание модели и каждый блок могут смещаться лишь в одном горизонтальном направлении. Смещение основания обозначим через  $Y$ , смещение блока с координатами  $i, j$  относительно потолка – через  $x(i, j)$ . Силу  $f(i, j)$ , действующую на блок, определим как

$$f(i, j) = -(q + 4)x(i, j) + \sum_{i, j} x(i', j'),$$

где  $q$  – коэффициент жесткости вертикальных пружин (для горизонтальных пружин он равен 1),  $\sum_{i, j}$  – символ суммирования по всем точкам  $(i', j')$ , которые являются ближайшими соседями точки  $(i, j)$ .

Алгоритм работы модели задается правилами:

1. Начальные смещения  $x(i, j)$  таковы, что  $f(i, j) \leq 1$  при всех  $i, j$ . Переход к п. 2.
2. Смещения  $x$  растут с единичной скоростью, пока абсолютная величина силы  $f$  на одном из блоков не достигнет прочности сцепления, равной 1, после чего вводится множество  $A = \{(i, j)\}$ , где  $i, j$  – координаты блока, начавшего движение. Переход к п. 3.
3. Срыв выражается в одинаковом уменьшении всех  $x(i, j)$ ,  $(i, j) \in A$ , до тех пор пока  $f$  не обратится в 0 для некоторой точки  $(i', j') \in A$  или не достигнет 1 для некоторого  $(i', j') \notin A$ . Переход к п. 4.
4. Если  $(i', j') \in A$ , то  $A' = A \setminus \{(i', j')\}$ , и  $A' = \{(i', j')\} \cup A$  при  $(i', j') \notin A$ . Если  $A'$  пусто – конец события – переход к п. 1; в противном случае  $A = A'$  – переход к п. 3.

В двумерных моделях обычно используются три типа граничных условий. Свободные граничные условия предполагают отсутствие взаимодействий блоков, лежащих на краях прямоугольной области, с внешней средой и представляются недостаточно отражающими реальность. Периодические граничные условия кажутся гораздо более приемлемыми, однако их использование приводит к появлению событий, в которых лавинные сдвиги, перекатываясь через границы, неоднократно смещают все блоки, что вряд ли реалистично. Наиболее адекватными выглядят "закрытые" граничные условия. В этом случае граничные блоки связаны пружинами с внешними блоками, которые жестко скреплены с потолком.

В работе приводятся результаты численного исследования модели в форме квадрата, содержащего  $30 \times 30$  блоков, с закрытыми граничными условиями,  $q = 0.1$ . Начальные условия задавались следующим способом: смещения каждого блока выбирались случайно из равномерного распределения на интервале  $[0, 1]$ . Затем вычислялись силы на каждом блоке, и все смещения делились на  $f_m$ , так что новое максимальное по всем блокам значение силы было равно 1.

Чтобы выяснить влияние размеров модели на показатели степеней в приводимых ниже степенных зависимостях, были также исследованы модели в форме квадратов  $20 \times 20$  и  $50 \times 50$  блоков. Установлено, что ни один из степенных показателей не обнаруживает зависимости от размеров модели.

### ФРАКТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОБЛАСТЕЙ СДВИГА

Очаги событий, генерируемых моделью, не удовлетворяют обычным предположениям подобия и обладают фрактальными свойствами в статистическом смысле, поясняемом ниже. Назовем областью сдвига (или очагом землетрясения) объединение единичных квадратов со сторонами, параллельными осям координат, и с центрами в точках  $(i, j)$ , соответствующих координатам блоков, которые участвуют в событии. Равная числу таких блоков площадь очага  $S$ , граница  $B$  и диаметр  $D$  очага определяются как обычно. Нижний символ обозначает условие, при котором вычисляются условные математические ожидания соответствующих величин. Например,  $S_D$  означает условное математическое ожидание  $S$  при условии  $D$ , иначе говоря – регрессию площади очага на его диаметр, т.е. наилучшее в среднеквадратичном приближении псевдослучайной величины  $S$  функцией от  $D$ .

На рис. 2 представлены (в логарифмическом масштабе) результаты обработки  $10^6$  сгенерированных численно событий в виде функций  $S_D$ ,  $B_D/4$  и  $S_B$ .

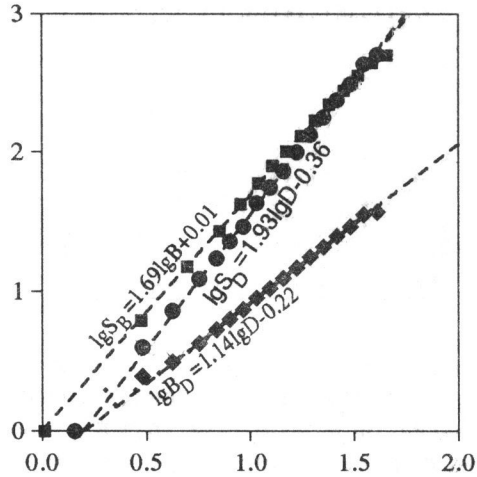


Рис. 2. Связь между геометрическими характеристиками очага

Точки экспериментальных зависимостей хорошо "ложатся" на линейные графики, за исключением небольших участков на правом краю, где имеются искажения, связанные с конечным размером модели. Средняя площадь  $S_D \sim D^{2-\alpha}$  ( $\alpha = 0.07$ ), т.е. растет медленнее, чем  $D^2$  (если бы области сдвига оставались в среднем подобными, она росла бы как  $D^2$ ). Это означает, что с ростом диаметра круга, описанного вокруг области сдвига, отношение ее площади к площади круга стремится к 0. Вообще говоря, это может быть следствием своего рода вытягивания областей сдвига с ростом  $D$ , если площадь приближенно представима в виде прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b$ , причем  $a \sim D$ ,  $b \sim D^{1-\alpha}$ . В таком случае длина границы должна расти как  $2(a + b) \sim D$ . Но средняя длина границы  $B_D \sim D^{1+\beta}$  ( $\beta = 0.14$ ), т.е. растет быстрее, чем  $D$ . Можно сделать вывод, что дефицит площади возникает не за счет вытягивания очагов, а вследствие увеличения изрезанности их границ. Представление о характере этой изрезанности можно получить из рис. 3, на котором приведены примеры типичных площадок сдвига.

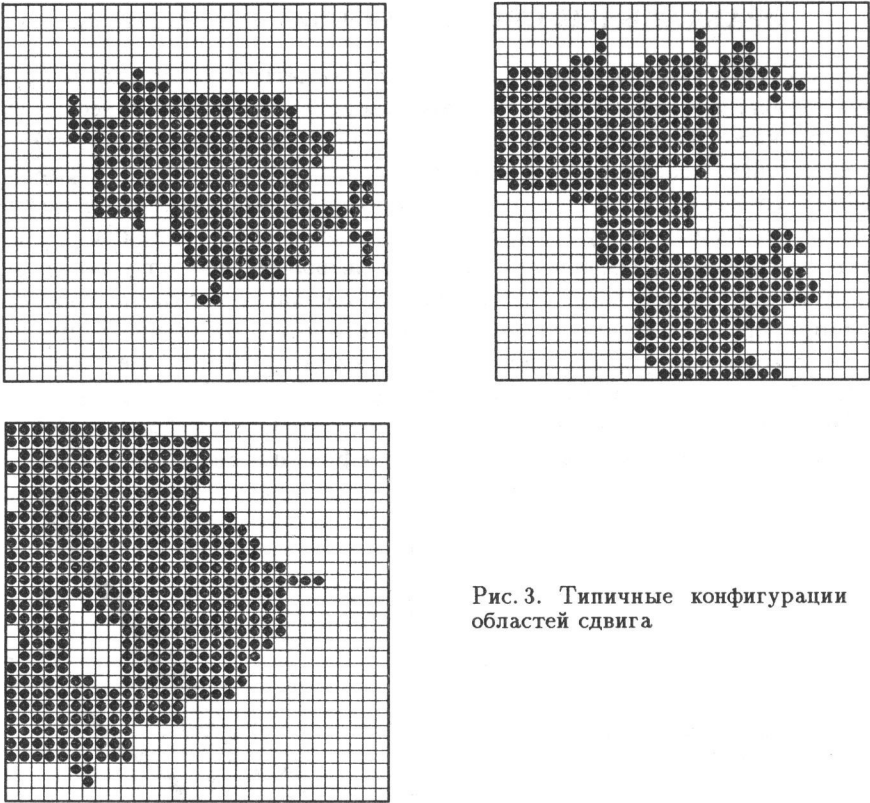


Рис. 3. Типичные конфигурации областей сдвига

Средняя площадь связана с длиной границы соотношением  $S_B \sim B^{1.69}$ . Интересно отметить, что хотя принцип композиции функций неприменим к функциям регрессии, он выполняется, если в показателях степеней ограничиться точностью в два десятичных знака: при подстановке  $B_D \sim D^{1.14}$  вместо  $B$  в соотношение  $S_B \sim B^{1.69}$  получаем  $S_B \sim D^{1.14 \cdot 1.69} \approx D^{1.93} \sim S_D$ .

Из сказанного видно, что области сдвига имеют в определенном смысле псевдослучайную фрактальную структуру. Точнее, если предположить, что вид приведенных зависимостей остается таким же при всех  $D$  (а доводы против такой гипотезы отсутствуют), то при уменьшении масштабов множеств диаметра  $D$  в  $D$  раз все области сдвига будут иметь единичный диаметр, и при  $D \rightarrow \infty$  их площадь будет стремиться к 0, а длина границы – к  $\infty$ .

Для обычного фрактального множества размерностью Хаусдорфа [23] называется показатель степени  $n$  в выражении  $N \sim R^{-n}$ , где  $N$  – число сфер диаметра  $R$  в минимальном покрытии множества. В данном случае мы имеем дело не с одним множеством, а с псевдослучайным семейством множеств. Хаусдорфовой размерности семейства перемасштабированных областей сдвига можно определить по аналогии, как показатель степени в выражении  $N \sim R^{-n}$ , где  $N$  – среднее число сфер диаметра  $R = D^{-1}$  в минимальных покрытиях множеств, имевших до перемасштабирования диаметр  $D$ . Эта размерность равна 1.93, а размерность границ площадок сдвига равна 1.14.

В классической сейсмологии нередко постулируется принцип, согласно которому площадки сдвига при возрастании их линейного размера сохраняют геометрическое подобие [20-22]. Для рассматриваемого варианта модели Барриджа-Кнопова принцип подобия, очевидно, не выполняется, что позволяет поставить вопрос о его справедливости и для природных разломов. Отклонения в показателях степени могут быть и не велики, но именно для сильных землетрясений их влияние может стать значимым.

### СКЕЙЛИНГ ЭНЕРГИИ

Связи энергии землетрясения с сейсмическим моментом и геометрическими параметрами очага имеют степенной характер. Показатели степеней для реальных землетрясений либо могут быть получены из наблюдений (как правило со значительными расхождениями результатов в зависимости от принимаемой методики обработки данных), либо выводятся из постулируемых предположений типа законов подобия. В рассматриваемой модели эти связи тоже являются степенными, однако не вполне соответствуют обычным постулатам классической сейсмологии.

По определению сейсмический момент события

$$M = q \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \Delta x(i, j),$$

где  $\Delta x(i, j)$  – смещение блока в точке  $(i, j)$ , он связан с энергией события  $W$  соотношением  $M \approx 2qW$ . Эта энергия вычисляется как разность сумм упругих энергий всех пружин до и после события. Таким образом, связь сейсмического момента с энергией, принятая в сейсмологии, верна и для модели.

На рис. 4 приведен график повторяемости (т.е. зависимость логарифма вероятности толчка от логарифма его энергии) для модели, содержащей  $30 \times 30$  блоков с открытыми граничными условиями и  $q = 0.1$ . Он имеет линейный участок с наклоном  $g = -0.57$ , что близко к классическим законам Гутенберга-Рихтера для логарифма энергии землетрясений.

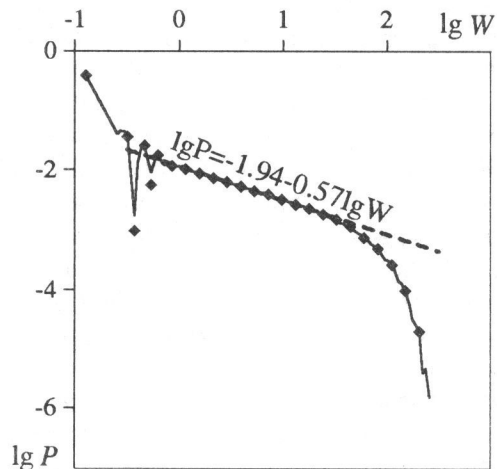


Рис. 4. График повторяемости для модельных землетрясений

Введем величину  $K$  – число сдвигов блоков в событии.  $K$  превосходит число сдвинувшихся блоков, равное площади области сдвига  $S$ , если в событии имеют место неоднократные сдвиги одних и тех же блоков. На рис. 5 представлены (в логарифмическом масштабе) регрессии  $W_S$ ,  $W_D$  и  $W_K$  как функции  $S$ ,  $D$  и  $K$ , а также зависимость  $K_S$  от  $S$ . Поскольку  $K_S \sim S^{1.05}$ , с ростом площади очага растет и число повторных сдвигов блоков в событиях. Повторные сдвиги появляются при  $q < 1$ ; в рассматриваемом случае ( $q = 0.1$ ) наблюдались двух- и трехкратные сдвиги.

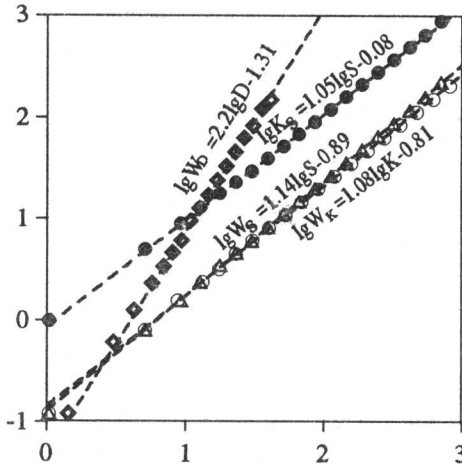


Рис. 5. Зависимость величин  $W_D$ ,  $W_K$ ,  $W_S$  и  $K_S$  от своих аргументов

Зависимости для регрессий энергии имеют степенной вид, но они не соответствуют представлениям, принятым в сейсмологии. Если, согласно предположениям подобия, в трехмерном случае энергия с ростом диаметра очага  $D$  растет как  $D^3$  (т.е. как объем очага), то в двумерном случае естественно ожидать, что она пропорциональна его площади. Однако в нашем случае  $W_S \sim S^{1.14}$ , т.е. энергия растет быстрее, чем площадь. Можно предположить, что эта разница объясняется неоднократностью сдвигов блоков во время события, но зависимость  $W_K \sim K^{1.08}$  показывает, что этой добавки недостаточно. Замена площади  $S$  на растущий быстрее квадрат диаметра очага также не дает ожидаемого показателя:  $W_K \sim D^{2.2}$ . Очевидно, что предположение о постоянстве удельного смещения  $U = M/qS \approx 2W/S$  также несправедливо в данной модели.

Качественное объяснение последних двух эффектов состоит в том, что остановка движущегося блока обусловлена натягиванием связанных с ним пружин. Если соседние блоки тоже движутся, то пружины, связывающие их с первым блоком, не меняют натяжения и смещение блока оказывается тем больше, чем больше ближайших соседей движутся вместе с ним. С ростом области сдвига возрастает число групп, состоящих из трех и более совместно движущихся блоков, вследствие этого энергия растет быстрее, чем площадь области или квадрат ее диаметра.



Кроме предположения о характере связи энергии с размером очага, в модели не подтверждаются и такие предположения классической сейсмологии, как постоянство сброса напряжений и уровня напряжений перед событиями. Обе эти величины в среднем растут с ростом освобожденной энергии.

*Благодарности.* Автор признателен В.И. Кейлис-Бороку и А.Т. Исмаил-Заде за ценные дискуссии. Работа выполнена при поддержке фонда ИНТАС (грант INTAS-93-457).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Burridge R., Knopoff L.* Model and theoretical seismicity // *Bull. Seismol. Soc. Amer.* 1967. Vol.57. P.341-371.
2. *Otsuka M.* A Simulation of earthquake occurrence // *Phys. Earth Planet. Inter.* 1972. Vol.6. P.311-315.
3. *Bak P., Tang C.* Earthquakes as a self-organized critical phenomenon // *J. Geophys. Res.* 1989. Vol.94. P.15635-15637.
4. *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* Self-organized criticality: an explanation of 1/f noise // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol.59. P.381.
5. *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* Self-organized criticality // *Phys. Rev. A.* 1988. Vol.38. P.364.
6. *Carlson J.M., Langer J.S.* Properties of earthquakes generated by fault dynamics // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol.62. P.2632-2635.
7. *Carlson J.M., Langer J.S.* A mechanical model of an earthquake fault // *Phys. Rev. A.* 1989. Vol.40. P.6470-6484.
8. *Nakanishi H.* Cellular-automaton model of earthquakes with deterministic dynamics // *Phys. Rev. A.* 1990. Vol.41. P.7086-7089.
9. *Nakanishi H.* Statistical properties of the cellular-automaton model for earthquakes // *Phys. Rev. A.* 1991. Vol.43. P.6613-6621.
10. *Ito K., Matsuzaki M.* Earthquakes as a self-organized critical phenomena // *J. Geophys. Res.* 1990. Vol.95. P.6853-6860.
11. *Feder H.J.S., Feder J.* Self-organized criticality in a stick-slip process // *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol.66. P.2669-2672.
12. *Olami Z., Feder H.J.S., Christensen K.* Self-organized criticality in a continuous, non-conservative cellular automaton modelling earthquakes // *Phys. Rev. Lett.* 1992. Vol.68. P.1244-1247.
13. *Christensen K., Olami Z.* Variation of the Gutenberg-Richter *b* values and nontrivial temporal correlations in a spring-block model for earthquakes // *J. Geophys. Res.* 1992. Vol.97. P.8729-8735.
14. *Olami Z., Christensen K.* Temporal correlations, universality, and multifractality in a spring-block model of earthquakes // *Phys. Rev. A.* 1992. Vol.46. P.1720-1723.
15. *Brown S.R., Scholtz C.H., Rundle J.B.* A simplified spring-block model of earthquakes // *Geophys. Res. Lett.* 1991. Vol.18. P.215-218.
16. *Rundle J.B., Brown S.R.* Origin of the rate dependence in frictional sliding // *J. Stat. Phys.* 1991. Vol.65. P.403-412.
17. *Hertz A.V.M., Hopfield J.J.* Earthquake cycles and neural reverberations: collective oscillations in systems with pulse-coupled threshold elements // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol.75. P.1222-1225.

18. Герцик В.М. Форшоки и афтершоки в слоистой модели Барриджа–Кнопова // Математическое моделирование сеймотектонических процессов в литосфере, ориентированное на проблему прогноза землетрясений. Вып.1. М.: МИТП РАН, 1993. С. 20-23.
19. Герцик В.М. Делокализация, форшоки и афтершоки в модифицированной модели Барриджа–Кнопова // Теоретические проблемы геодинамики и сейсмологии. М.: Наука, 1994. С.127-136. (Вычисл. сейсмология; Вып.27).
20. Aki K. Scaling law of seismic spectrum // J. Geophys. Res. 1967. Vol.72. P.1217-1231.
21. Aki K. Scaling law of earthquake source time-function // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1972. Vol.31. P.3-25.
22. Kanamori H., Anderson D.L. Theoretical basis of some empirical relations in seismology // Bull. Seismol. Soc. Amer. 1975. Vol.65. P.1073-1095.
23. Mandelbrot B. The fractal geometry of nature. San Francisco: Freeman and Co., 1982. 460 p.