III. АЛГОРИТМЫ И ОБРАБОТКА ДАННЫХ

УДК 517.955.8

БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННО́ГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА С ИСЧЕЗАЮЩЕЙ ВЯЗКОСТЬЮ

А.Я. Гордон

Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук

Рассматривается одномерное уравнение Бюргерса в пределе исчезающей вязкости. Это уравнение возникает во многих задачах, в том числе в гидродинамике и космологии. При численном исследовании уравнения Бюргерса обычно используется преобразование Лежандра. Результатом является одномерное сечение решения – его ограничение на прямую $t = t^*$ при произвольном фиксированном времени $t^* > 0$. Предлагается альтернативный подход, основанный на выяснении механического смысла формул Хопфа–Коула и позволяющий получить решение сразу для всех x, t. Предложен эффективный алгоритм, трудоемкость которого составляет лишь $O(N \log N)$ машинных операций (N – число точек решетки).

A FAST ALGORITHM FOR SPACE-TIME SOLUTION OF THE INVISCID BURGERS EQUATION

A.Ya. Gordon

International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences

We consider the 1-D Burgers' equation in the case of vanishing viscosity. It arises in many problems, particularly, in hydrodynamics and cosmology. Numerical investigation of this equation commonly uses the Legendre transform. As a result one obtains a 1-D section of the solution, that is, its restriction to a line of the form $t = t^*$ for any fixed time $t^* > 0$. We offer an alternative approach based on the mechanical meaning of the Hopf-Cole relations, yielding the solution for all x, t. An efficient algorithm which needs only $O(N \log N)$ computer operations (N is the number of grid point) is put forward.

© А.Я. Гордон, 1997

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается одномерное уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad x, t \in \mathbb{R}, \qquad t > 0. \tag{1}$$

Впервые оно появилось в гидродинамике как модель турбулентности [1,2]. Функция $u(x,t)$ интерпретируется как скорость частиц жидкости (x – пространственная координата, t – время), параметр ν имеет смысл вязкости. Позднее Я.Б. Зельдович [3] предложил использовать многомерный вариант уравнения (1) в космологии для изучения формирования крупномасштабных структур во Вселенной. Уравнение Бюргерса используется также во многих других областях – от динамики интерфейсов до передачи сигналов в нервной системе улитки (см. ссылки в [4,5]). Представляют интерес решения уравнения Бюргерса с исчезающей вязкостью (т.е. с $\nu \to +0$). С течением времени в них появляются и растут разрывы. С точки зрения геофизики представляет интерес, есть ли в образующейся системе разрывов предвестники сильнейших. Этот вопрос, применительно к начальным данным специального (броуновского) типа, был поставлен В.И. Кейлис-Бороком в связи с сейсмологической гипотезой об универсальности симптомов сильного землетрясения.

Для численного исследования решений уравнения Бюргерса необходимы эффективные алгоритмы. Цель данной работы – построение такого алгоритма.

Решение $u(x,0)$ уравнения (1) определяется начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Предполагается, что начальная скорость $u_0(x)$ непрерывна и такова, что потенциал

$$\psi(x) = -\int_0^x u_0(s)ds = o(x^2), \qquad |x| \to \infty. \tag{3}$$

При условии (3) и $\nu > 0$ решение u_ν задачи Коши (1), (2) существует, единственно и задается явно формулами Хопфа–Коула; в пределе исчезающей вязкости $\nu \to +0$ это решение сходится к функции $u(x,t)$, которая является слабым решением задачи (1), (2) с $\nu = 0$ и задается формулами (см. [6,7] или [5])

$$u(x,t) = \frac{x - a^*}{t}, \tag{4}$$

где

$$a^* = \operatorname*{Argmin}_{-\infty<a<\infty} \left\{-\psi(a) + \frac{(x-a)^2}{2t}\right\}. \tag{5}$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$a^* = \operatorname*{Argmax}_{-\infty<a<\infty} \left\{\frac{xa}{t} - \left(-\psi(a) + \frac{a^2}{2t}\right)\right\},$$

что делает очевидной связь (4) с преобразованием Лежандра. Основанный на этом метод использовался для численного исследования решений уравнения Бюргерса с исчезающей вязкостью [5] при начальном условии

$$u_0(x) = \begin{cases} b_\gamma(x), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

где $b_\gamma(x)$ – выборочная функция дробного броуновского движения порядка γ. Функция $u_0(x)$ задается, а решение $u(x,t)$ ищется во всех точках $x = a_k$ вида

$$a_k = k\Delta, \qquad -\frac{N}{2} < k \leq \frac{N}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где Δ – размер ячейки, N – число точек решетки.

Формула (5) заменяется на

$$a^* = k^*\Delta = \Delta \operatorname*{Argmin}_{-N/2<k\leq N/2} \left\{ -\psi_k + \frac{(x-k\Delta)^2}{2t} \right\}, \tag{6}$$

где

$$\psi_k = -\sum_{j=1}^{k} u_j\Delta, \qquad u_j = \frac{1}{\Delta} \int\limits_{(j-1)\Delta}^{j\Delta} u_0(x)dx. \tag{7}$$

Основным объектом изучения в работе [5] является множество всех скачков сечения решения (4), (5) задачи (1), (2) ($\nu = +0$) прямой $t = t_0 > 0$; величина такого скачка ("шока") интерпретируется как масса жидкости (имевшей вначале постоянную плотность), сжатая в ходе динамики в точку. Эти скачки приближенно восстанавливаются по аналогичному сечению приближенного решения (4), (6). Алгоритм, использующий быстрое преобразование Лежандра (см. [5]), позволяет находить это сечение за $O(N \log N)$ машинных операций.

В настоящей работе дается метод вычисления того же приближенного решения $u(x,t)$ "в целом" (для всех $x, t \in \mathbb{R}$, $t > 0$), а не только его одномерного сечения $u(x,t_0)$. Тем не менее, соответствующий алгоритм имеет ту же по порядку верхнюю оценку числа операций $C_1 N \log N + C_2$, хотя и с бóльшими константами C_1, C_2.

Разумеется, бесконечное множество чисел $u(x,t)$ не может быть найдено за конечное число действий. В действительности находится некоторая информация, которая однозначно определяет (и позволяет легко найти) значение $u(x,t)$ для любых x и t ($t > 0$), так же как и (конечное) множество всех скачков любого сечения $u(x,t_0)$.

Упомянутая информация важна и сама по себе. Это – информация об одномерных разрывах ("трещинах") функции $u(x,t)$; таким образом, в данном методе эти разрывы находятся прежде всего. Они находятся точно, и ошибка возникает лишь при переходе от формулы (5) к формуле (6). Скачки одномерного сечения $u(x,t_0)$ – это в точности пересечения упомянутых разрывов с прямой $t = t_0$. Отметим, что при использовании метода [5] расположение этих скачков узнается лишь приближенно, поскольку решение вычисляется лишь для дискретного набора значений

x, и не известно (даже для близких t_1 и t_2), являются ли близко расположенные друг к другу скачки соответствующих сечений $u(x, t_i)$ следами одного и того же разрыва решения $u(x, t)$.

1. МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ФОРМУЛЫ ХОПФА–КОУЛА

Формула (5) означает, что для любых $a \in \mathbb{R}$, $a \neq a^*$, имеем

$$-\psi(a) + \frac{(x-a)^2}{2t} \geq -\psi(a^*) + \frac{(x-a^*)^2}{2t}$$

или

$$\psi(a^*) - \psi(a) \geq \frac{(x-a^*)^2 - (x-a)^2}{2t} = (a - a^*)\left(\frac{x - (a^* + a)/2}{t}\right).$$

Это значит, что

$$t\frac{\psi(a^*) - \psi(a)}{a - a^*} \geq x - \frac{a^* + a}{2}, \quad a > a^*, \tag{8_+}$$

$$t\frac{\psi(a^*) - \psi(a)}{a - a^*} \leq x - \frac{a^* + a}{2}, \quad a < a^*. \tag{8_-}$$

Поскольку

$$\psi(a^*) - \psi(a) = \int_{a^*}^{a} u_0(x)dx,$$

видим, что левые части формул ($8_\pm$) совпадают с $tv(a, a^*)$, где $v(a, a^*)$ обозначает среднюю начальную скорость на интервале $[a^*, a]$ (или $[a, a^*]$), справа же в этих формулах стоит расстояние (со знаком) от середины этого интервала до x. Отсюда вытекает естественная интерпретация формул ($8_\pm$). Предположим, что масса каждого из упомянутых интервалов сосредоточена в его центре и движется со средней скоростью $v(a, a^*)$. Тогда требуется, чтобы этот центр в момент t находился справа (нестрого) от x, если $a > a^*$, и слева от x, если $a < a^*$. Будем называть интервалы упомянутого вида комьями (прилежащими к a^* справа или слева). Если их центры при всех $a \neq a^*$ ведут себя так, как было сказано выше, то значение решения $u(x, t)$ определяется формулой (4) именно с этим a^* (с точностью до возможной неоднозначности, которая отсутствует, если указанные выше неравенства строгие). В этом случае будем говорить, что точка (x, t) полуплоскости $t > 0$ имеет источник в точке a^*.

2. МНОЖЕСТВА УРОВНЯ ФУНКЦИЙ $a^*(x, t)$: ДИСКРЕТНЫЙ СЛУЧАЙ

Перейдем к дискретному случаю с конечным или бесконечным N. Все сказанное выше остается справедливым, причем комья, прилежащие к a^* справа, имеют вид

$$[a^*, a] = [k^*\Delta, k\Delta]$$

(аналогично для комьев, прилежащих слева). Отметим, что для того, чтобы величина

$$\frac{\psi(k^*\Delta) - \psi(k\Delta)}{(k-k^*)\Delta}$$

была средней скоростью такого кома, а точка $(k^*+k)\Delta/2$ – его центром массы, мы должны предположить, что частица, имеющая скорость u_j (и массу Δ), в момент $t = 0$ расположена в точке $(j-1/2)\Delta$, а не $j\Delta$.

Таким образом, точка (x,t) достижима из a^* (т.е. a^* – ее источник), если и только если она расположена слева от каждого правого луча $R_{a^*,a}$, идущего из точки $(a^*+a)/2$, $a > a^*$, оси x со скоростью $v(a,a^*) = (\psi(a^*) - \psi(a))/(a-a^*)$, и справа от каждого левого луча $R_{a^*,a}$ $(a < a^*)$.

Следствие 1. Точки (x,t), $t > 0$, для которых правая часть формулы (6) имеет фиксированное значение a^* (и при этом минимум строгий, т.е. неравенства в $(8_\pm)$ строгие), образуют открытое множество. Обозначим это множество P_{a^*}.

Следствие 2. Для каждого $t_0 > 0$ пересечение $P_{a^*} \cap \{(x,t) : 0 < t < t_0\}$ является выпуклым многоугольником (т.е. задается конечным числом линейных неравенств); при конечном N это очевидно, в противном случае это следует из соотношения $\psi_k = o(k^2)$, $|k| \to \infty$ (см. (3)).

Заметим, что при принятом нами определении выпуклого многоугольника он может быть неограничен.

Пронумеруем правые стороны (и вершины) выпуклого многоугольника$^+$ P_{a^*} (так мы будем называть выпуклые подмножества полуплоскости $t > 0$ со свойством, описанным выше) снизу вверх (и аналогично для левой части P_{a^*}).

Следствие 3. Правой стороне с бо́льшим номером отвечает больший ком, прилежащий к a^* справа.

Пусть (x,t) – одна из правых вершин многоугольника$^+$ P_{a^*}; она является пересечением двух лучей $R_{a^*,a'}$ и $R_{a^*,a''}$ $(a^* < a' < a'')$. Это значит, что центр правого прилежащего кома $[a^*,a']$ в момент t находится в точке x, и это же справедливо в отношении кома $[a^*,a'']$. Следовательно, центр кома $[a',a'']$ (не прилежащего к a^*) также находится в момент t в той же точке x.

Таким образом, если граница многоугольника$^+$ P_{a^*} перед его правой вершиной (x,t) идет (вверх) вдоль луча $R_{a^*,a'}$, а после нее вдоль луча $R_{a^*,a''}$, то мы можем рассматривать (x,t) как точку столкновения частиц – центров двух комьев $[a^*,a']$ и $[a',a'']$, ведущего к слиянию этих частиц в одну новую частицу, отвечающую кому $[a^*,a'']$.

Дальнейший анализ показывает, что справедливо следующее

Утверждение. Приближенное решение уравнения Бюргерса с исчезающей вязкостью, задаваемой формулами (4), (6), (7), может быть получено следующим образом.

Случай $N = \infty$. Поместим в каждую точку $x_k = (k-1/2)\Delta, k \in \mathbb{Z}$, прямой частицу массы Δ с начальной скоростью u_k. Пусть частицы движутся вдоль прямой равномерно вплоть до столкновений; столкнувшись, частицы сливаются, порождая новую частицу, обладающую их суммарной массой и суммарным импульсом. Объединение траекторий (мировых линий) этих частиц разбивает полуплоскость $\Pi_+ = \{(x,t) : t > 0\}$ на открытые выпуклые многоугольники$^+$ P_k, $k \in \mathbb{Z}$, причем замыкание P_k в $\mathbb{R}^2$ имеет с осью x общий интервал

$$\Delta_k = \left[\left(k - \frac{1}{2}\right)\Delta,\ \left(k + \frac{1}{2}\right)\Delta\right]. \tag{9}$$

Если (x,t) – внутренняя точка P_{k^*}, то функция $u(\cdot,\cdot)$ в этой точке непрерывна, а значение a^* в (4), (6) есть центр $k^*\Delta$ соответствующего интервала вида (9) с $k = k^*$. Если (x,t) принадлежит границам только двух многоугольников⁺ P_{k_-} и P_{k_+}, то $u(\cdot,t)$ имеет в этой точке скачок:

$$u(x+0,t) - u(x-0,t) = ((k_- - k_+)\Delta)/t.$$

Случай $N < \infty$. Формулировка утверждения отличается лишь тем, что имеются $N-1$ начальных частиц (в точках $x_k = (k-1/2)\Delta, -N/2+1 < k \le N/2$) и N выпуклых многоугольников (компонент разбиения полуплоскости Π_+ траекториями); точки x_k разбивают ось x на $N-2$ отрезка длины Δ и два луча, каждый из которых содержит ровно одну точку вида $a_k = k\Delta$ $(-N/2 < k \le N/2)$ – она фигурирует в качестве a^* в формулах (4), (6) для внутренних точек (x,t) соответствующего выпуклого многоугольника, стороной которого является данный отрезок или луч оси x. Формула для величины скачка решения на границе двух многоугольников остается без изменения.

Замечание 1. То, что указанная механическая модель связана с уравнением Бюргерса с исчезающей вязкостью не удивительно (см., например, [8]). Но мы хотим подчеркнуть, что разбиение полуплоскости Π_+ траекториями описанных частиц в точности совпадает с разбиением, заданным дискретизированной формулой Хопфа–Коула (6). В частности, приближенное решение, полученное при помощи этой модели, совпадает с тем, которое дает метод преобразования Лежандра (там, где последнее решение определено).

Замечание 2. Несколько более наглядное представление решения мы получим, если рассмотрим функцию $tu(x,t)$ вместо $u(x,t)$. Представим себе, что на полуплоскости Π_+ имеется сеть каналов. Из каждой точки $x_k = (k - 1/2)\Delta$ прямой $t = 0$ исходит канал, имеющий "производительность" (количество жидкости в единицу времени, равную Δ) и текущий в направлении $(u_k, 1)$. При встрече каналы сливаются, образуя новый канал с их совокупной производительностью и средневзвешенным направлением $(u, 1)$, причем роль весов играют производительности. Тогда полуплоскость Π_+ разбивается на выпуклые многоугольники, внутри каждого из которых функция $tu(x,t)$ непрерывна (и равна $x - a^*$, где a^* – середина единственной стороны многоугольника⁺, лежащей на оси x). Если же точка (x,t) принадлежит каналу (ровно одному), то эта функция имеет там скачок, величина которого равна производительности канала (или нагляднее – его ширине).

3. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Алгоритм, реализующий описанную модель, ясен. Размещаем в каждой точке $(k - 1/2)\Delta$, $-N/2 + 1 < k \le N/2$ (здесь N, разумеется, конечно), частицу массы Δ и придаем ей начальную скорость u_k. Частицы движутся по прямой равномерно, пока какие-то две из них не столкнутся. Чтобы определить этот момент, мы вычисляем моменты всех виртуальных столкновений частиц между собой (при этом достаточно рассматривать лишь столкновения ближайших соседей) и находим самый ранний из них. Затем преобразуем две столкнувшиеся частицы в новую частицу, так что выполняются законы сохранения массы и импульса. При этом получаем новую систему частиц, для которой вновь находим момент первого столкновения и т.д. (Заметим, что, хотя возможны кратные и одновременные столкновения частиц, мы можем рассматривать их как последовательности парных столкновений, разделенных нулевыми временны́ми интервалами.) Этот процесс конечен, поскольку каждое столкновение уменьшает число частиц на единицу. В конце концов мы получаем систему расходящихся частиц. Система отрезков, представляющих в полуплоскости Π_+ траектории всех частиц, дает требуемую систему разрывов функции $tu(x,t)$, при этом накопленная масса частицы равна высоте скачка.

Однако в алгоритме есть существенный момент, требующий специального рассмотрения. Как искать время ближайшего столкновения? Если в некоторый момент у нас есть k частиц ($k \leq N$, где N – число исходных частиц), то число виртуальных столкновений не превосходит $k-1$, поскольку столкнуться могут лишь соседние частицы. Если мы найдем моменты всех этих виртуальных столкновений и найдем самый ранний из них, то это потребует $O(k) = O(N)$ операций, так что общее количество вычислений в течение всего времени жизни системы будет иметь верхнюю оценку $O(N^2)$ операций. Такое количество операций недопустимо велико и исключает рассмотрение систем, скажем, с $N \sim 10^6$ исходными частицами.

Выход из положения состоит в том, чтобы не вычислять на каждом шаге вновь все моменты виртуальных столкновений в будущем и не искать наименьший из них путем полного их просмотра. Когда две частицы сталкиваются и исчезают, превратившись в новую частицу, то почти все моменты виртуальных столкновений остаются теми же. В множестве всех виртуальных столкновений происходят лишь следующие изменения. Прежде всего изымается уже произошедшее столкновение, затем изымаются виртуальные столкновения двух исчезнувших частиц – левой и правой – с их соседями слева и справа соответственно (этих виртуальных столкновений или одного из них могло и не быть – это зависит от соотношения скоростей). Наконец могут добавиться виртуальные столкновения новой частицы с ее соседями слева и справа.

Таким образом, обработка каждого нового столкновения требует следующих действий в отношении множества моментов всех виртуальных столкновений: поиск минимального элемента, удаление не более чем трех элементов, добавление не более чем двух элементов.

Если это множество организовано как упорядоченный массив (т.е. конечная последовательность, скажем – неубывающая), то эти преобразования требуют $O(N)$ операций на каждое столкновение, т.е. для поиска места вставки нового элемента нужно лишь $O(\log N)$ операций (если использовать бинарный поиск), однако сама вставка элемента на его место требует сдвига "хвоста" последовательности, для чего необходимо, вообще говоря, $O(N)$ операций. Это ведет к той же по порядку оценке общей трудоемкости алгоритма, что и выше – $O(N^2)$ операций. Аналогичный результат получается, если мы храним наше множество в виде двунаправленного списка (где каждый элемент содержит ссылку на предыдущий и последующий): при этом облегчаются удаление и вставка, однако становится трудоемким (требующим $O(N)$ операций) поиск места, где должен быть вставлен новый элемент.

Тем не менее, существуют структуры хранения данных, позволяющие выполнить каждое из указанных преобразований всего лишь за $O(\log K)$ операций, где K – текущее число хранимых элементов. Одна из таких структур – так называемые АВЛ-деревья, или деревья Адельсона-Вельского–Ландиса [9]. Если хранить моменты виртуальных столкновений, используя такую структуру, то, поскольку текущее число виртуальных столкновений не превосходит N, на каждое новое столкновение приходится лишь $O(\log N)$ операций; это и дает указанную оценку общей трудоемкости алгоритма $O(N \log N)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство основного утверждения

Ограничимся случаем конечного N, поскольку случай бесконечного N является его следствием: из условия $\psi_k = o(k^2)$, $|k| \to \infty$, вытекает, что любой конечный прямоугольник пересекается лишь с конечным числом выпуклых многоугольников$^+$ P_k и с конечным числом траекторий.

Итак, пусть N – конечно. Поскольку это ничего не меняет, докажем несколько более общее утверждение (притом в более удобных обозначениях).

Пусть даны три набора вещественных чисел:

$$b_1, \ldots, b_N; \qquad m_1, \ldots, m_N; \qquad v_1, \ldots, v_N,$$

причем

$$b_1 < b_2 < \ldots < b_N; \qquad m_1 > 0, \ldots, m_N > 0.$$

Определим две системы частиц на прямой: **n**-частицы (невзаимодействующие) и **i**-частицы (взаимодействующие). j-я **n**-частица имеет массу m_j, начальное положение b_j (при $t = 0$) и движется равномерно со скоростью v_j при всех $t \geq 0$. **i**-частицы (которые иногда будем называть просто частицами) имеют при $t = 0$ те же массы, положения и скорости, однако при столкновениях они слипаются, так что новая **i**-частица имеет суммарную массу и суммарный импульс столкнувшихся **i**-частиц; между столкновениями **i**-частицы движутся равномерно.

Обозначим через $x_j(t)$, $j = 1, \ldots, N$, положение j-й **n**-частицы в момент t: $x_j(t) = b_j + tv_j$, а через $x_{j,k}(t)$, $1 \leq j \leq k \leq N$, – положение в момент t центра масс **n**-частиц с номерами $j, j+1, \ldots, k$:

$$x_{j,k}(t) = \left(\sum_{i=j}^{k} m_i x_i(t)\right) \Big/ \sum_{i=j}^{k} m_j.$$

Определим множество $C_N = \{1/2, 1 + 1/2, \ldots, N + 1/2\}$; введем набор открытых выпуклых множеств $P_\alpha \subset \Pi_+, \alpha \in C_N$, полагая при $\alpha = j - 1/2$ $(j = 1, 2, \ldots, N + 1)$

$$P_\alpha := \{(x,t) \in \Pi_+ : \mathcal{A}, \mathcal{B}\}, \text{ где}$$

$$\mathcal{A} = x_{i,j-1}(t) < x, \quad 1 \le i \le j-1, \tag{П1}$$

$$\mathcal{B} = x_{j,l}(t) > x, \qquad j \le l \le N. \tag{П2}$$

Очевидно, $P_\alpha, \alpha \in C_N$ – суть непересекающиеся выпуклые многоугольники (быть может, неограниченные).

Определим теперь относительно замкнутое (т.е. замкнутое в индуцированной из $\mathbb{R}^2$ топологии) подмножество $T \subset \Pi_+$ как объединение траекторий (мировых линий) всех **i**-частиц; число их, очевидно, не превосходит $2N-1$.

Теорема. Открытые выпуклые многоугольники P_α, $\alpha \in C_N$ – суть связные компоненты открытого множества $\Pi_+ \setminus T$. Два многоугольника P_α и P_β ($\alpha < \beta$) в том и только в том случае имеют общую сторону, если существует* **i***-частица, являющаяся результатом слияния (в любом порядке) всех l исходных* **i***-частиц, для которых $\alpha < l < \beta$; в этом случае общая сторона обоих многоугольников совпадает с траекторией указанной* **i***-частицы.*

Доказательство. Пусть точка $(x,t) \in \Pi_+$ принадлежит правой стороне многоугольника P_α ($\alpha = j - 1/2$) и не является его вершиной. В этом случае, как нетрудно вывести из определения P_α, выполняются неравенства (П1), а из неравенств (П2) ровно одно (скажем, k-е, $j \le k \le N$) превращается в равенство, остальные же сохраняются. Таким образом, справедливы соотношения

$$x_{i,j-1}(t) < x, \qquad 1 \le i \le j-1, \tag{П3}$$

$$x_{j,k}(t) = x, \tag{П4}$$

$$x_{j,l}(t) > x, \qquad j \le l \le N, \ l \ne k. \tag{П5}$$

Из (П4) и (П5) следуют также соотношения

$$x_{k+1,l}(t) > x, \qquad k+1 \le l \le N, \tag{П6}$$

$$x_{j,p}(t) > x, \qquad j \le p < k. \tag{П7}$$

Наконец в силу (П4) и (П7) имеем

$$x_{q,k}(t) < x, \qquad j < q \le k. \tag{П8}$$

Соотношения (П6), (П4), (П8) и вытекающее из (П3) и (П4) неравенство

$$x_{i,k}(t) < x, \qquad 1 \le i \le j-1,$$

показывают, что точка (x,t) принадлежит одной из левых сторон многоугольника P_β, где $\beta = k + 1/2$, и притом единственной его стороне (поскольку ровно одно из определяющих P_β неравенств обращается в равенство), а значит, не является его вершиной.

Покажем, что точка (x,t) принадлежит траектории **i**-частицы $[j,k]$ (так мы будем обозначать **i**-частицу, являющуюся результатом слияния исходных **i**-частиц с номерами $j, j+1, \dots, k$), и, в частности, такая **i**-частица присутствует в истории системы. Прежде всего, в момент t не существует частиц вида $[i,p]$, где $i \le j-1$, $p \ge j$. (Действительно, пусть τ ($0 < \tau \le t$) – момент образования первой частицы такого вида. Тогда, как легко видеть, $x_{i,j-1}(\tau) = x_{j,p}(\tau)$, и так как $x_{i,j-1}(0) < x_{j,p}(0)$, а функции $x_{i,j-1}(\cdot)$ и $x_{j,p}(\cdot)$ линейны, то $x_{i,j-1}(t) \geq x_{j,p}(t)$. Но это противоречит соотношениям (П3), (П4) и (П5).) Точно так же в момент t не существует частиц вида $[q,l]$, где $q \leq k$, $l \geq k+1$. Рассмотрим все частицы, существующие в момент t и "содержащие" хотя бы одну из исходных частиц $j, j+1, \ldots, k$ (а значит, целиком состоящие из них). Мы утверждаем, что есть ровно одна такая частица: $[j,k]$. Действительно, пусть это не так и самая левая из таких частиц есть $[j,p]$, а самая правая есть $[q,k]$, так что $j \leq p < q \leq k$. Их положения в момент t удовлетворяют очевидному неравенству $x_{j,p}(t) < x_{q,k}(t)$; это, однако, противоречит неравенствам (П7), (П8).

Итак, в момент t существует частица $[j,k]$ и в силу (П4) ее траектория содержит точку (x,t).

Конечное число выпуклых многоугольников P_α, $\alpha \in C_N$, обладает в совокупности конечным числом вершин. Поскольку при фиксированном $t_0 > 0$ и достаточно большом $|x|$ точка (x,t_0) принадлежит $P_{1/2}$, если $x < 0$ (и $P_{N+1/2}$, если $x > 0$), то мы имеем: при любом $t_0 \in \mathbb{R} \setminus Z$ (где Z – конечное множество) для всех $x \in \mathbb{R}$, кроме принадлежащих некоторому конечному множеству $X(t_0)$, точка (x,t_0) принадлежит одному из множеств P_α, $\alpha \in C_N$, для каждого же $x \in X(t_0)$ точка (x,t_0) принадлежит общей стороне соответствующих многоугольников P_α и P_β $(\alpha < \beta)$, а также траектории частицы $[j,k]$, где $\alpha = j - 1/2$, $\beta = k + 1/2$. Таким образом, если обозначить множество $\Pi_+ \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in C_N} P_\alpha$ через Γ, то

$$\Gamma \cap \{t = t_0\} \subset T \cap \{t = t_0\} \qquad (\text{П}9)$$

при всех $t_0 \in (0,\infty) \setminus Z$.

Но для оставшихся значений t_0 это также верно, поскольку любая точка $(x,t_0) \in \Gamma$ является предельной для точек $(x',t') \in \Gamma$, $t' \neq t_0$, принадлежащих, таким образом, T, а множество T замкнуто в Π_+.

Итак, соотношение (П9) верно для всех $t_0 > 0$. Докажем обратное включение. Это также достаточно сделать для всех $t_0 \notin Z$. Рассмотрим функцию $f_{t_0}(x)$, определенную при всех $x \in \mathbb{R}$: $f_{t_0}(x) :=$ суммарная масса частиц, расположенных в момент t_0 левее x, а также функцию $g_{t_0}(x)$, определенную при $x \in \mathbb{R} \setminus X(t_0)$:

$$g_{t_0}(x) := \sum_{i<\alpha} m_i,$$

где $\alpha \in C_N$ однозначно определено соотношением $P_\alpha \ni (x,t)$.

При переходе точки (x,t_0) с ростом x через общую сторону многоугольников P_α и P_β (и тем самым через траекторию частицы $[j,k]$, где $\alpha = j - 1/2$, $\beta = k + 1/2$) каждая из этих функций, как следует из доказанного, возрастает на величину $\sum\limits_{\alpha<i<\beta} m_i$. Следовательно,

$$f_{t_0}(\infty) - f_{t_0}(-\infty) \geq g_{t_0}(\infty) - g_{t_0}(-\infty) = M \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i.$$

Вместе с тем очевидно, что общая масса всех частиц в момент t_0 равна общей массе исходных частиц, т.е. $f_{t_0}(\infty) - f_{t_0}(-\infty) = M$. Отсюда вытекает, что в момент t_0 не существует частиц, находящихся вне множества $X(t_0)$. Таким образом, для всех $t_0 \notin Z$

$$\Gamma \cap \{t = t_0\} = T \cap \{t = t_0\},$$

откуда следует: $\Gamma = T$.

Покажем, что многоугольники P_α, $\alpha \in C_N$ – суть связные компоненты множества $\Pi_+ \setminus T$. Каждый из них связен – это следует из выпуклости. Поэтому каждая компонента связности C множества $\Pi_+ \setminus T$ является объединением некоторых P_α. В действительности она состоит из единственного множества P_α. В самом деле, пусть C содержит множества P_α и P_β, где $\alpha \neq \beta$. Поскольку C открыта и связна (как компонента связности открытого множества $\Pi_+ \setminus T$), любые две точки $(x,t) \in P_\alpha$ и $(x',t') \in P_\beta$ можно соединить непрерывной кривой, лежащей в C. Возьмем первую точку этой кривой, не лежащую в P_α. Она принадлежит границе P_α, а значит, множеству T, что невозможно, поскольку C лежит в дополнении к T. Теорема доказана.

Благодарности. Автор признателен Я.Г. Синаю, который познакомил его с красивыми задачами, связанными с уравнением Бюргерса, а также А.В. Трусову, который написал программу, реализующую описанный выше алгоритм (в его программе, однако, вместо АВЛ-деревьев применяется другой метод хранения информации с логарифмическим временем доступа). Автор благодарен У. Фришу за проявленное им гостеприимство в обсерватории г. Ниццы, где была выполнена эта работа, и Министерству высшего образования Франции за финансовую поддержку. Работа выполнена при частичной поддержке ИНТАС (грант INTAS-94-3950).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Burgers J.M.* On the application of statistical mechanics to the theory of turbulent fluid motion // Proc. Roy. Neth. Acad. Soc. 1929. Vol.32, P.414.
2. *Burgers J.M.* The nonlinear diffusion equation. Dordrecht: D. Reidel Publ. Co., 1974. 212 p.
3. *Zel'dovitch Ya.B.* Gravitational instability: an approximate theory for large density perturbations // Astrophys. 1970. Vol.5. P.84-89.
4. *Vergassola M., Dubrulle B., Frisch U., Noullez A.* Burgers' equation, Devil's staircases and the mass distribution for large-scale structures // Astron. and Astrophys. 1994. Vol.289. P.325-356.
5. *She Z.-S., Aurell E., Frisch U.* The inviscid Burgers equation with initial data of Brownian type // Comm. Math. Phys. 1992. Vol.148. P.623-641.
6. *Hopf E.* The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Comm. Pure Appl. Math. 1950. Vol.3. P.201-230.
7. *Cole J.D.* On a quasi-linear parabolic equation occuring in aerodynamics // Quart. Appl. Math. 1951. Vol.9. P.225-236.
8. *Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И.* Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии // Современные пробл. физики. Вып.91. М.: Наука, 1990. 215 с.
9. *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ. Т.3. Сортировка и поиск. М.: Мир, 1978. 844 с.