

І. ГЕОДИНАМИКА

УДК 550.311

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ВЯЗКИХ ТЕЧЕНИЙ В ВЕРХНИХ СЛОЯХ МАНТИИ

Б.М. Наймарк, А.Т. Исмаил-заде

*Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук*

А.И. Короткий, А.П. Суетов, И.А. Цепелев

*Институт математики и механики Уральского отделения
Российской академии наук*

В.Р. Якоби

*Институт наук о Земле,
Университет им.И. Гутенберга г.Майнца, Германия*

Предложен численный метод расчета трехмерных течений высоковязкой жидкости, пригодный для исследования медленных движений в верхних слоях мантии. Этот метод, развитый ранее для решения двумерных задач, обобщается на три измерения. Для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости вводится векторный потенциал скоростей, который раскладывается по базисным трикубическим сплайнам. Плотность представляется в аналогичной форме. Неизвестные коэффициенты разложений плотности определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений, вытекающих из уравнения переноса массы. Коэффициенты разложений компонент векторного потенциала составляют решение системы линейных алгебраических уравнений, вытекающих из уравнений Стокса. Приводится пример расчета течения, возникающего при погружении аномально тяжелого тела (отрезка эллиптического цилиндра) в окружающей среде, и расчета топографии поверхности, обусловленной этим течением. Такая модель соответствует нетермической компоненте погружения кристаллического фундамента при отсутствии осадков, которая возникает в результате фазовых переходов в магматических телах и последующего погружения утяжелённых тел в астеносфере.

THREE-DIMENSIONAL MODELLING OF VISCOUS FLOWS IN THE UPPERMOST MANTLE

B.M. Naimark, A.T. Ismail-Zadeh

*International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences*

A.I. Korotkii, A.P. Suetov, I.A. Tsepelev

*Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Division,
Russian Academy of Sciences*

W.R. Jacoby

*Institut für Geowissenschaften,
Johannes Gutenberg-Universität Mainz, Germany*

We present a numerical approach for computing three-dimensional viscous flows, which can be useful for the analysis of slow motions in the uppermost mantle. This method, developed previously for cases of two dimensions, is extended now for three dimensions. We introduce a vector potential for velocity of incompressible viscous flows and represent it as a linear combination of tricubic splines with unknown coefficients. Density is represented in the same manner. Unknown coefficients in a spline representation of density is found from a set of ordinary differential equations following from transfer equations for density. Coefficients in spline representations of vector potential entering the right-hand sides of these sets are found from the set of linear algebraic equations following from Stokes equations. We demonstrate the method presenting a case where a heavy body sinks in the surrounding material and induces a flow changing the surface topography. This model describes the nonthermal component of basement subsidence in the magmatism-eclogitization mechanism of sedimentary basin evolution.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи моделирования больших внутриконтинентальных осадочных бассейнов (таких как Мичиганский бассейн в Северной Америке, Московский бассейн в Восточной Европе или Тунгусский бассейн в Сибири) привлекают внимание многих геофизиков (см., например, [1–4]). Бассейны погружаются в течение сотен миллионов лет с изменяющейся скоростью, за фазами быстрого тектонического погружения следуют периоды медленного опускания кристаллического фундамента. Предлагались различные модели образования внутриконтинентальных осадочных бассейнов, в том числе модель растяжения литосферы с последующим тепловым погружением [5], модель подкоровой эрозии [6], погружение под действием сжимающих сил [7], фазовые переходы в нижней коре [8] или в верхах мантии [9]. В последнюю модель включаются процессы растяжения литосферы, вертикальной фильтрации и накопления магматического расплава под выступом границы между литосферой и астеносферой, теплопередачи и фазовых переходов базальтовых пород в эклогитовые, движения вязкой среды при погружении аномально тяжелых тел, эволюции депрессий на земной поверхности и накопления осадочных пород.

THREE-DIMENSIONAL MODELLING OF VISCOUS FLOWS IN THE UPPERMOST MANTLE

B.M. Naimark, A.T. Ismail-Zadeh

*International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences*

A.I. Korotkii, A.P. Suetov, I.A. Tsepelev

*Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Division,
Russian Academy of Sciences*

W.R. Jacoby

*Institut für Geowissenschaften,
Johannes Gutenberg-Universität Mainz, Germany*

We present a numerical approach for computing three-dimensional viscous flows, which can be useful for the analysis of slow motions in the uppermost mantle. This method, developed previously for cases of two dimensions, is extended now for three dimensions. We introduce a vector potential for velocity of incompressible viscous flows and represent it as a linear combination of tricubic splines with unknown coefficients. Density is represented in the same manner. Unknown coefficients in a spline representation of density is found from a set of ordinary differential equations following from transfer equations for density. Coefficients in spline representations of vector potential entering the right-hand sides of these sets are found from the set of linear algebraic equations following from Stokes equations. We demonstrate the method presenting a case where a heavy body sinks in the surrounding material and induces a flow changing the surface topography. This model describes the nonthermal component of basement subsidence in the magmatism-eclogitization mechanism of sedimentary basin evolution.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи моделирования больших внутриконтинентальных осадочных бассейнов (таких как Мичиганский бассейн в Северной Америке, Московский бассейн в Восточной Европе или Тунгусский бассейн в Сибири) привлекают внимание многих геофизиков (см., например, [1–4]). Бассейны погружаются в течение сотен миллионов лет с изменяющейся скоростью, за фазами быстрого тектонического погружения следуют периоды медленного опускания кристаллического фундамента. Предлагались различные модели образования внутриконтинентальных осадочных бассейнов, в том числе модель растяжения литосферы с последующим тепловым погружением [5], модель подкоровой эрозии [6], погружение под действием сжимающих сил [7], фазовые переходы в нижней коре [8] или в верхах мантии [9]. В последнюю модель включаются процессы растяжения литосферы, вертикальной фильтрации и накопления магматического расплава под выступом границы между литосферой и астеносферой, теплопередачи и фазовых переходов базальтовых пород в эклогитовые, движения вязкой среды при погружении аномально тяжелых тел, эволюции депрессий на земной поверхности и накопления осадочных пород.

THREE-DIMENSIONAL MODELLING OF VISCOUS FLOWS IN THE UPPERMOST MANTLE

B.M. Naimark, A.T. Ismail-Zadeh

*International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences*

A.I. Korotkii, A.P. Suetov, I.A. Tsepelev

*Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Division,
Russian Academy of Sciences*

W.R. Jacoby

*Institut für Geowissenschaften,
Johannes Gutenberg-Universität Mainz, Germany*

We present a numerical approach for computing three-dimensional viscous flows, which can be useful for the analysis of slow motions in the uppermost mantle. This method, developed previously for cases of two dimensions, is extended now for three dimensions. We introduce a vector potential for velocity of incompressible viscous flows and represent it as a linear combination of tricubic splines with unknown coefficients. Density is represented in the same manner. Unknown coefficients in a spline representation of density is found from a set of ordinary differential equations following from transfer equations for density. Coefficients in spline representations of vector potential entering the right-hand sides of these sets are found from the set of linear algebraic equations following from Stokes equations. We demonstrate the method presenting a case where a heavy body sinks in the surrounding material and induces a flow changing the surface topography. This model describes the nonthermal component of basement subsidence in the magmatism-eclogitization mechanism of sedimentary basin evolution.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи моделирования больших внутриконтинентальных осадочных бассейнов (таких как Мичиганский бассейн в Северной Америке, Московский бассейн в Восточной Европе или Тунгусский бассейн в Сибири) привлекают внимание многих геофизиков (см., например, [1–4]). Бассейны погружаются в течение сотен миллионов лет с изменяющейся скоростью, за фазами быстрого тектонического погружения следуют периоды медленного опускания кристаллического фундамента. Предлагались различные модели образования внутриконтинентальных осадочных бассейнов, в том числе модель растяжения литосферы с последующим тепловым погружением [5], модель подкоровой эрозии [6], погружение под действием сжимающих сил [7], фазовые переходы в нижней коре [8] или в верхах мантии [9]. В последнюю модель включаются процессы растяжения литосферы, вертикальной фильтрации и накопления магматического расплава под выступом границы между литосферой и астеносферой, теплопередачи и фазовых переходов базальтовых пород в эклогитовые, движения вязкой среды при погружении аномально тяжелых тел, эволюции депрессий на земной поверхности и накопления осадочных пород.

Совершенствование методов обработки сейсмических данных и технологии бурения позволяют более детально изучать погружение осадочных бассейнов. Совместный анализ этих данных и численных моделей приводит к лучшему пониманию эволюции осадочных бассейнов. Трехмерный анализ сейсмических данных и трехмерный анализ тектонического погружения находят все более широкое применение. Это показывает, насколько важны трехмерные численные модели эволюции осадочных бассейнов [10]. Первые шаги в направлении подобного моделирования были предприняты в работах [11, 12]. Моделирование осадочных бассейнов проводилось, в основном, для идеально упругой коры, изгибающейся под действием различных сил. Однако маловероятно, что кора и литосфера могут оставаться идеально упругими в течение периодов порядка сотен миллионов лет. Мы предлагаем другой подход, в котором изгиб земной поверхности образуется в результате течений, возникающих при погружении вязкого аномально тяжелого материала в вязкую мантию. Двумерные модели, основанные на таком подходе, разрабатывались в [3, 4, 13]. Эти модели полезны при исследовании многих свойств и особенностей движений в верхней мантии, которые влияют на эволюцию осадочных бассейнов, но для полного описания их геометрии необходим трехмерный анализ.

Мы описываем методику численного решения трехмерных уравнений Стокса и переноса массы и приводим модельный пример расчета эволюции осадочного бассейна. Численный метод основан на представлении векторного потенциала скорости в виде линейной комбинации базисных трикубических сплайнов, определенных на малых носителях, и на методе Галеркина для определения ее коэффициентов. Плотность представляется в аналогичной форме, и в результате уравнение переноса массы преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений с правыми частями, содержащими векторный потенциал скорости. Эти уравнения решаются методом Рунге-Кутты четвертого порядка, причем для расчета правых частей на каждом шаге вычисляются коэффициенты разложения векторного потенциала скоростей по базисным сплайнам. Результатами расчетов являются распределения плотности и потенциала скоростей в модельной области для последовательных моментов времени. Топография поверхности рассчитывается с помощью нормальных напряжений на верхней поверхности, где заданы условия идеального скольжения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Постановка задачи

Ниже используются следующие обозначения: x_1, x_2, x_3 – декартовы координаты; $D_i = \partial/\partial x_i$, $D_{ij} = \partial^2/\partial x_i \partial x_j$, $D_t = \partial/\partial t$; $(i, j, k) \leftarrow (1, 2, 3)$ означает все тройки индексов (i, j, k) полученных из $(1, 2, 3)$ круговой перестановкой; предполагается суммирование по повторяющимся индексам, если не оговорено иначе.

Мы рассматриваем течения ньютоновской жидкости, имеющей постоянную вязкость μ и переменную плотность ρ . Жидкость движется под действием гравитационных сил в прямоугольной области Ω : $0 \leq x_i \leq L_i$, $i = 1, 2, 3$. Обозначим давление через p и вектор скорости жидкости через $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Эти переменные удовлетворяют уравнениям

$$D_i p = \mu D_j (D_j u_i + D_i u_j) + g \rho \delta_{i3}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

$$D_i u_i = 0, \quad D_t \rho + u_i D_i \rho = 0. \quad (2)$$

Уравнение (1) выражает закон сохранения момента количества движения, в котором мы пренебрегли инерционными членами, что оправдано ввиду малых скоростей. Первое уравнение в (2) является условием несжимаемости, второе является уравнением переноса плотности потоком жидкости.

В силу первого из уравнений (2) вектор \mathbf{u} является соленоидальным. Это позволяет ввести векторный потенциал $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$: $\mathbf{u} = \text{rot } \boldsymbol{\psi}$. Операция rot над уравнением (1) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} D_{2i}(\mu e_{i3}) - D_{3i}(\mu e_{i2}) &= g D_2 \rho, \\ D_{3i}(\mu e_{i1}) - D_{1i}(\mu e_{i3}) &= -g D_1 \rho, \\ D_{1i}(\mu e_{i2}) - D_{2i}(\mu e_{i1}) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где (без суммирования по повторяющимся индексам)

$$\begin{aligned} e_{ii} &= 2(D_{ij}\psi_k - D_{ik}\psi_j), \quad (i, j, k) \leftarrow (1, 2, 3), \\ e_{ij} &= D_{jj}\psi_k - D_{jk}\psi_j + D_{ik}\psi_i - D_{ii}\psi_k, \quad (i, j, k) \leftarrow (1, 2, 3). \end{aligned} \quad (4)$$

На всех границах задаются условия непротекания и идеального скольжения, которые имеют следующий вид (без суммирования по повторяющимся индексам):

$$\begin{aligned} \psi_i = \psi_j = \psi_k = D_i\psi_i = D_{ii}\psi_j = D_{ii}\psi_k = 0 \quad \text{на } x_i = 0 \quad \text{и } x_i = L_i, \\ (i, j, k) \leftarrow (1, 2, 3). \end{aligned} \quad (5)$$

Начальные условия задаются в виде

$$\rho(x_1, x_2, x_3, t)|_{t=0} = \rho_0(x_1, x_2, x_3). \quad (6)$$

Постановка задачи иллюстрируется на рис. 1, где изображена модельная область и указаны граничные условия. В начальный момент внутри области помещается тело (оно выделено штриховкой), плотность которого превышает плотность окружающей среды.

Решением поставленной задачи называется набор функций $\rho(x_1, x_2, x_3, t)$ и $\psi_i(x_1, x_2, x_3, t)$, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяющих уравнениям (3), граничным условиям (5) и начальным условиям (6).

Определим слабое решение задачи, вводя вместо уравнений интегральные соотношения. Для этого умножим уравнения (3) скалярно на вектор $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, удовлетворяющий тем же граничным условиям, что и $\boldsymbol{\psi}$, проинтегрируем по частям, суммируем результаты и воспользуемся граничными условиями. Получим соотношение

$$E(\mu; \vec{\psi}, \vec{\omega}) = g \iiint_{\Omega} \rho(D_2\omega_1 - D_1\omega_2) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} E(\mu; \vec{\psi}, \vec{\omega}) &= \iiint_{\Omega} \mu(2e_{11}\varepsilon_{11} + 2e_{22}\varepsilon_{22} + 2e_{33}\varepsilon_{33} + \\ &+ e_{12}\varepsilon_{12} + e_{13}\varepsilon_{13} + e_{23}\varepsilon_{23}) dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned} \quad (8)$$

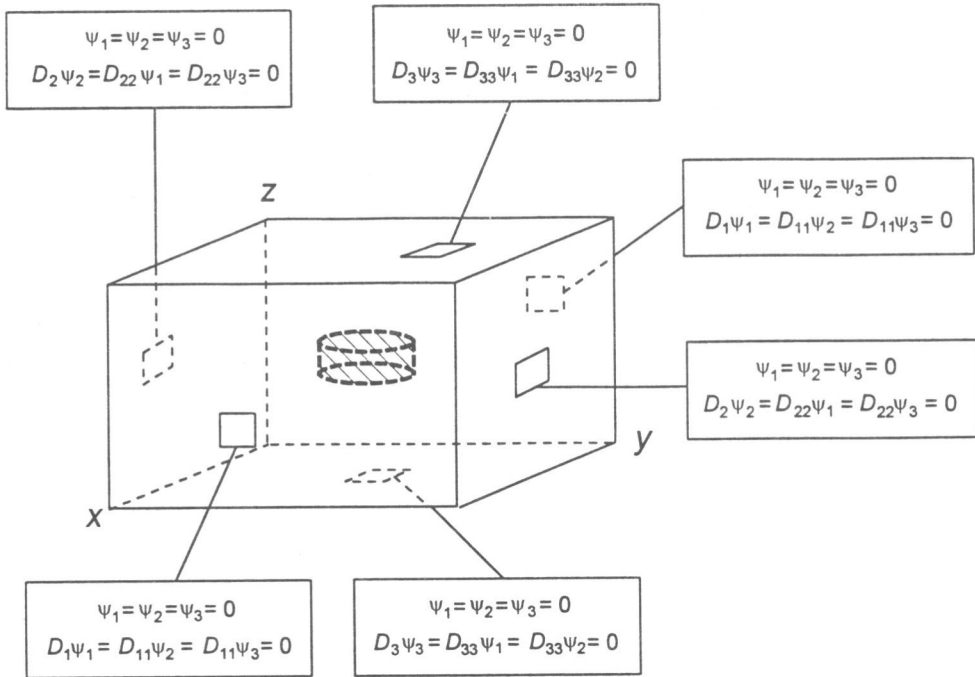


Рис.1. Модельная область, тяжелое тело и граничные условия для векторного потенциала

и ϵ_{ij} имеют вид (4), где вместо ψ_m подставлены ω_m для $m = 1, 2, 3$. Второе уравнение (2) после замены $\mathbf{u} = \text{rot } \psi$, умножения на пробную функцию $\hat{\omega}$ и интегрирования принимает вид

$$\iiint_{\Omega} \hat{\omega} D_i \rho dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_{\Omega} \sum_{(i,j,k) \in (1,2,3)} \hat{\omega} (D_k \psi_j - D_j \psi_k) D_i \rho dx_1 dx_2 dx_3. \quad (9)$$

Под слабым решением задачи мы подразумеваем совокупность функций $\rho(x_1, x_2, x_3, t)$ и $\psi(x_1, x_2, x_3, t)$, удовлетворяющую условиям (5), (6) и уравнениям (7), (9) для любых пробных функций ω и $\hat{\omega}$. Мы не рассматриваем вопросы существования и единственности решения.

Численный метод

Напомним, что производится суммирование по повторяющимся индексам, и будем считать, что индексы принимают следующие значения:

$$i, l, p = 1, 2, \dots, N_1, \quad j, m, q = 1, 2, \dots, N_2 \quad \text{и} \\ k, n, r = 1, 2, \dots, N_3, \quad s = 1, 2, 3.$$

Неизвестные функции представляются в виде линейных комбинаций трикубических сплайнов

$$\begin{aligned}\psi_s &= \psi_{ijk}^s \omega_{ijk}^s(x_1, x_2, x_3), \\ \rho &= \rho_{ijk} \hat{\omega}_{ijk}(x_1, x_2, x_3)\end{aligned}\quad (10)$$

с неизвестными коэффициентами ψ_{ijk}^s , ρ_{ijk} и μ_{ijk} , где ω_{ijk}^s и $\hat{\omega}_{ijk}$ являются базисными трикубическими сплайнами (см. Приложение). Чтобы получить уравнения относительно неизвестных коэффициентов, подставим представления искомого функций (10) в уравнения (7) и (9), изменим порядки суммирования и проинтегрируем известные произведения базисных сплайнов и их производных. Интегрирование выполняется просто, поскольку эти произведения являются многочленами в прямоугольных областях. В результате получаются система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) относительно $\rho_{ijk}(t)$ и система линейных алгебраических уравнений (ЛАУ) относительно $\psi_{ijk}^p(t)$

$$\begin{aligned}\mu \psi_{ijk}^s C_{sijk}^{lmn} &= g \rho_{ijk} F_{ijk}^{lmn}, \\ G_{ijk}^{lmn} D_t \rho_{ijk} &= \rho_{ijk} E_{ijk}^{lmn}.\end{aligned}\quad (11)$$

Опишем процедуру вычисления коэффициентов в уравнениях (11). Матрица ЛАУ представляется в виде

$$C_{sijk}^{lmn} = \sum w_{a_1 a_2 b_1 b_2 c_1 c_2} A_{sil}^{a_1 a_2} B_{sjm}^{b_1 b_2} C_{skn}^{c_1 c_2}, \quad (12)$$

где суммирование выполняется по всем целым числам a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 и c_2 , удовлетворяющим условиям: 1) каждое из них может принимать значения 0, 1 или 2; 2) их сумма равна 4. Значения $w_{a_1 a_2 b_1 b_2 c_1 c_2}$ легко получаются приведением подобных членов в соответствующих суммах. Величины $A_{sil}^{a_1 a_2}$, $B_{sjm}^{b_1 b_2}$ и $C_{skn}^{c_1 c_2}$ являются интегралами

$$\begin{aligned}A_{sil}^{a_1 a_2} &= \int_0^{L_1} (D_{a_1} \eta_i^s(x_1)) (D_{a_2} \zeta_i^s(x_1)) dx_1, \\ B_{sjm}^{b_1 b_2} &= \int_0^{L_2} (D_{b_1} \eta_j^s(x_2)) (D_{b_2} \zeta_m^s(x_2)) dx_2, \\ C_{skn}^{c_1 c_2} &= \int_0^{L_3} (D_{c_1} \eta_k^s(x_3)) (D_{c_2} \zeta_n^s(x_3)) dx_3,\end{aligned}\quad (13)$$

где η^s , ϑ^s и ζ^s (мы опускаем нижние индексы) – кубические сплайны, составляющие бикубические сплайны в разложениях компонент векторного потенциала ψ_s ($\hat{\eta}$, $\hat{\vartheta}$ и $\hat{\zeta}$ – аналогичные функции в разложении ρ). Величины F_{ijk}^{lmn} , G_{ijk}^{lmn} и E_{ijk}^{lmn} в (11) представляются в виде

$$F_{ijk}^{lmn} = P_{il}^{012} Q_{jm}^{002} R_{kn}^{002} - P_{il}^{001} Q_{jm}^{011} R_{kn}^{001}, \quad (14)$$

где

$$P_{il}^{a b s} = \int_0^{L_1} (D_a \hat{\eta}_i(x_1)) (D_b \hat{\eta}_l^s(x_1)) dx_1,$$

$$\begin{aligned}
 Q_{jm}^{abs} &= \int_0^{L_2} (D_a \widehat{\theta}_j(x_2))(D_b \theta_m^s(x_2)) dx_2, \\
 R_{kn}^{abs} &= \int_0^{L_3} (D_a \widehat{\zeta}_k(x_3))(D_b \zeta_n^s(x_3)) dx_3, \\
 G_{ijk}^{lmn} &= \int_0^{L_1} \widehat{\eta}_i(x_1) \widehat{\eta}_l(x_1) dx_1 \int_0^{L_2} \widehat{\zeta}_j(x_2) \widehat{\zeta}_m(x_2) dx_2 \int_0^{L_3} \widehat{\vartheta}_k(x_3) \widehat{\vartheta}_n(x_3) dx_3, \\
 E_{ijk}^{lmn} &= \psi_{pqr}^s \sum v_{a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3 c_1 c_2 c_3} A_{silp}^{a_1 a_2 a_3} B_{sjmq}^{b_1 b_2 b_3} C_{sknr}^{c_1 c_2 c_3},
 \end{aligned} \tag{15}$$

и последняя сумма вычисляется для всех целых индексов $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2$ и c_3 , каждый из которых принимает значения 0 или 1 и $a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 + c_1 + c_2 + c_3 = 2$. Значения $v_{a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3 c_1 c_2 c_3}$ легко получаются приведением подобных членов в соответствующих суммах. Наконец,

$$\begin{aligned}
 A_{silp}^{a_1 a_2 a_3} &= \int_0^{L_1} (D_{a_1} \widehat{\eta}_i(x_1))(D_{a_2} \widehat{\eta}_l(x_1))(D_{a_3} \zeta_p^s(x_1)) dx_1, \\
 B_{sjmq}^{b_1 b_2 b_3} &= \int_0^{L_2} (D_{b_1} \widehat{\zeta}_j(x_2))(D_{b_2} \widehat{\zeta}_m(x_2))(D_{b_3} \zeta_q^s(x_2)) dx_2, \\
 C_{sknr}^{c_1 c_2 c_3} &= \int_0^{L_3} (D_{c_1} \widehat{\vartheta}_k(x_3))(D_{c_2} \widehat{\vartheta}_n(x_3))(D_{c_3} \vartheta_r^s(x_3)) dx_3.
 \end{aligned} \tag{16}$$

В численном алгоритме для решения уравнений (11) рассчитываются значения переменных $\rho_{ijk}(t + \Delta t)$ и $\psi_{ijk}^s(t + \Delta t)$ в момент времени $(t + \Delta t)$, когда значения этих переменных в момент t уже известны. Чтобы решить уравнения (11), рассчитаем матрицу C_{sijk}^{lmn} , затем вычислим $\rho_{ijk}(t) F_{ijk}^{lmn}$ и решим ЛАУ, т.е. первую из систем в (11). Найденные значения $\psi_{ijk}^s(t)$ подставим в (15) и найдем правые части ОДУ в (11). Решая систему ОДУ, найдем $\rho_{ijk}(t + \Delta t)$. Начальные значения $\rho_{ijk}(0)$ получаются с помощью разложения начальной функции из (6) по базисным сплайнам.

При реализации указанного метода главная трудность состоит в большом количестве коэффициентов, входящих в уравнения (11). Чтобы обойти эту трудность хотя бы частично, заметим, что многие коэффициенты в (11) равны нулю. Например, интегралы в (13) обращаются в нуль, когда носители сплайнов под знаком интеграла не пересекаются. Поэтому естественно собрать таблицы индексов, указывающих на ненулевые значения коэффициентов в приведенных выше формулах, заранее рассчитать эти значения и пользоваться ими в расчетах. Матрица C_{sijk}^{lmn} является ленточной и симметрической, так что в памяти компьютера нужно иметь лишь ее полудиагональ.

При построении численных алгоритмов весьма полезными оказались следующие соображения:

1) модельная область, уравнения движения и граничные условия обладают свойствами симметрии относительно плоскостей $x_i = L_i/2$, $i = 1, 2, 3$, которые отражаются в строении матрицы ЛАУ, т.е. C_{sijk}^{lmn} : систему ЛАУ с $3 \times N_1 \times N_2 \times N_3$ можно разбить на 8 независимых подсистем, каждая из которых содержит около $\frac{3}{8} \times N_1 \times N_2 \times N_3$ неизвестных. Матрица каждой подсистемы содержит в 32 раза меньше ненулевых элементов, чем матрица полной системы,

2) функцию ρ можно представлять в виде линейной комбинации базисных трилинейных функций, сконцентрированных на малых носителях. Такое представление упрощает расчеты, но увеличивает ошибки. Чтобы уменьшить ошибку, функцию ρ можно представить на сетке с шагом более мелким, чем в сетке для ψ_1, ψ_2, ψ_3 . Этот подход использовался и ранее (см., например, [14]).

Расчет топографии поверхности

Вязкое течение, возникающее при погружении тяжелого тела в окружающей его астеносфере, изменяет топографию поверхности $z(x_1, x_2, t)$. Мы определяем эту функцию приближенно. На верхней поверхности, где заданы условия идеального скольжения, определяются нормальные усилия. Изменение высоты $z(x_1, x_2, t)$ определяется из условия, согласно которому избыточный вес поднявшегося (или недостающий вес опустившегося) материала компенсируется нормальными усилиями, а именно

$$z(x_1, x_2, t) = \frac{-p(x_1, x_2, x_3, t) + \mu(x_1, x_2, x_3, t)e_{33}(x_1, x_2, x_3, t)}{g\rho(x_1, x_2, x_3, t)}, \quad (17)$$

где мы полагаем $x_3 = L_3$ и используем (4) для e_{33} . Когда решение задачи получено, легко найти p при $x_3 = L_3$ в (17) путем интегрирования уравнений (1) для $i = 1$ и 2 :

$$p = \int_0^{x_1} \mu D_i e_{1i}(\xi_1, x_2 = 0, x_3 = L_3) d\xi_1 + \int_0^{x_2} \mu D_i e_{2i}(x_1, \xi_2, x_3 = L_3) d\xi_2. \quad (18)$$

Топография поверхности $z(x_1, x_2, t)$ рассчитывается по формулам (17) и (18) с точностью до константы; эта константа выбирается так, чтобы выполнялся закон сохранения массы. Такой метод использовался в работах [3, 15], в [16] было показано, что этот метод дает хорошие результаты при малых возмущениях поверхности.

Проверка точности метода

Полная проверка точности метода предполагает сравнение с результатами, которые получены ранее другими методами. Лучше всего сравнивать приближенное решение с точным, полученным в виде формулы для какого-либо частного случая. Однако аналитическое решение даже двумерных задач такого рода неизвестно. Поэтому точность можно проверять путем сравнения с полученными ранее численными решениями, проверки законов сохранения на всем интервале времени и оценки ошибок при решении отдельных уравнений.

Решение трехмерных задач, аналогичных поставленной выше, авторам неизвестно. Мы проверяли закон сохранения массы на каждом шаге по времени и получили относительное изменение полной массы порядка 0.3%, что вполне приемлемо.

Кроме того, мы проверяли точность определения векторного потенциала ψ , задавая в уравнениях (3) правые части в виде комбинаций тригонометрических функций. В зависимости от количества периодов этих функций в модельной области точность колебалась от 0.2% (1 период) до 1% (3 периода) при аппроксимации неизвестных на сетке $16 \times 16 \times 16$.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Мы рассчитали простейшую трехмерную модель изгиба кристаллического фундамента без учета нагрузок от осадочного чехла. Эта модель основана на механизме, предложенном в работе [9] и развитом в [3, 13]. В расчетах были использованы безразмерные переменные; погружение фундамента рассчитывалось в модельной прямоугольной области Ω со сторонами $L_1 = 5$, $L_2 = 2.5$ и $L_3 = 1$. В силу симметрии задачи относительно плоскости $x = 0$ (мы используем привычные обозначения x, y, z вместо x_1, x_2, x_3) рассматривалась половина этой области: $L_1 = L_2 = 2.5$, $L_3 = 1$. Тяжелое тело являлось в начальный момент эллиптическим цилиндром Ω_ρ

$$\Omega_\rho = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{0.5^2} + \frac{y^2}{0.25^2} \leq 1, \quad 0.5 - 1/30 \leq z \leq 0.5 + 1/30 \right\}.$$

Плотность ρ полагалась 1.0 в Ω_ρ и 0.9 в остальной части Ω . Мы приняли $\mu = 1.0$ для упрощения расчетов.

Рис. 2 иллюстрирует изгиб поверхности, положение тяжелого тела и скорости вязкого течения для двух моментов безразмерного времени: $t = 16$ и $t = 208$. За единицу измерения длины принята величина 200 км, так что длина и ширина модельной области равны каждая 500 км, а ее высота составляет 200 км. На рис. 2,а изгиб поверхности (топография) приведен в м. На рис. 2,б,в изображены сечения области плоскостями, соответственно, $x = 0$ и $y = 250$ км.

Видно, что погружение поверхности в данном (конкретном) случае доходит до 2000 м при довольно малых временах ($t = 16$), т.е. вначале скорость погружения велика по сравнению с последующими этапами эволюции модели. Когда время увеличивается, погружение фундамента инвертируется, и при $t = 208$ (на самом деле раньше) уменьшается до 1500 м. Это объясняется изостатическими эффектами: с течением времени поверхность вязкой жидкости при отсутствии других плотностных неоднородностей стремится стать горизонтальной. Также видно, что тяжелое тело деформируется при погружении – его средняя часть опускается быстрее краев.

Выбранные значения параметров являются лишь очень грубым приближением к их реальным величинам. Плотность и вязкость в реальной Земле изменяются с глубиной, кроме того, имеется скачок вязкости на границе между тяжелым телом и окружающей средой. Однако данная модель демонстрирует возможности предложенного приближенного метода и основные черты эволюции осадочного бассейна, полученного на основе механизма эклогитизации пород в верхней части астеносферы.

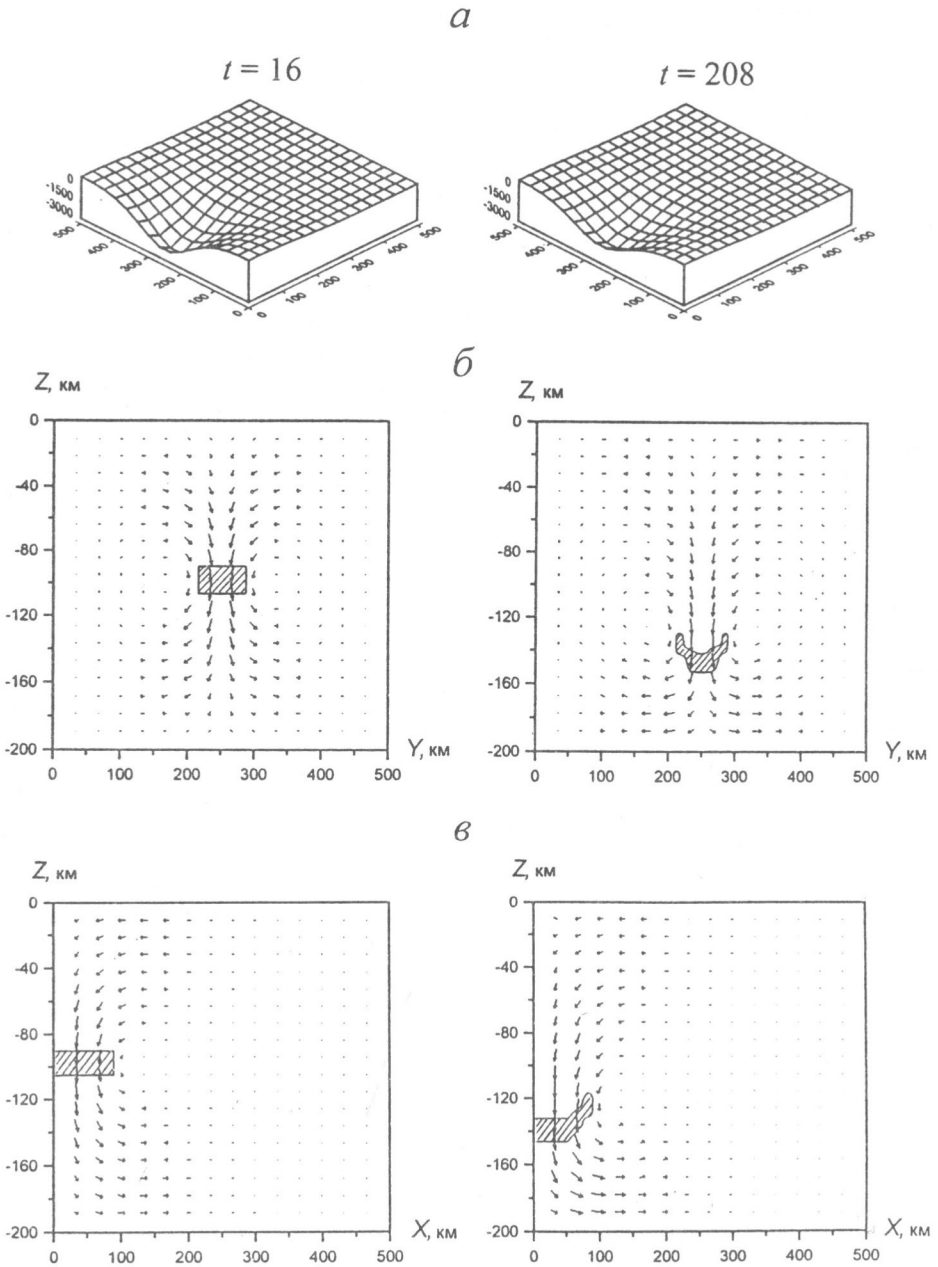


Рис. 2. Топография поверхности (*a*), сечение модельной области плоскостью $x = 0$ (*б*) и плоскостью $y = 250$ км (*в*) для двух моментов безразмерного времени
Стрелками обозначены скорости вязкого течения

ПРИЛОЖЕНИЕ: БАЗИСНЫЕ ТРИКУБИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ

Неизвестные функции представляются в виде линейных комбинаций базисных трикубических сплайнов с неизвестными коэффициентами. Базисные трикубические сплайны представляют собой всевозможные произведения базисных кубических сплайнов, которые строятся ниже.

Разделим отрезок $0 \leq y \leq L$ на N интервалов одинаковой длины точками $y_n = (n - 1)h$, $h = L/(N - 1)$, $n = 1, 2, \dots, N$. Зададим функции: $\alpha(y)$, $\beta(y)$, $\delta(y)$, $\delta^*(y)$, $\beta^*(y)$, $\alpha^*(y)$, определенные для $0 \leq y \leq 3h$, и $\gamma(y)$ на отрезке $0 \leq y \leq 4h$ следующим способом: на каждом из интервалов $y_{n-1} \leq y \leq y_n$, $n = 1, 2, 3, 4$ она является кубическим многочленом $c_0 + c_1(y - y_i)/h + c_2((y - y_i)/h)^2 + c_3((y - y_i)/h)^3$, коэффициенты которого c_0, c_1, c_2 и c_3 перечислены в таблице.

ТАБЛИЦА

n	$\alpha(y)$				$\beta(y)$				$\delta(y)$				$\gamma(y)$			
	c_0	c_1	c_2	c_3	c_0	c_1	c_2	c_3	c_0	c_1	c_2	c_3	c_0	c_1	c_2	c_3
1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{36}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	0	$-\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{5}{12}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{2}{3}$	0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$
3	$\frac{1}{18}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$

n	$\delta^*(y)$				$\beta^*(y)$				$\alpha^*(y)$			
	c_0	c_1	c_2	c_3	c_0	c_1	c_2	c_3	c_0	c_1	c_2	c_3
1	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{7}{36}$
3	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	0	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{36}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{5}{12}$	$\frac{11}{36}$

Определенные таким способом 7 стандартных функций обладают следующими свойствами:

1) они сами, их первые и вторые производные непрерывны в области их определения, т.е. эти функции являются сплайнами;

2) функции удовлетворяют следующим граничным условиям:

при $y=0$ $\alpha(y) = \beta(y) = \gamma(y) = \beta^*(y) = \alpha^*(y) = \delta^*(y) = 0, \delta(y) = 1,$
 $\alpha'(y) = \delta'(y) = \gamma'(y) = \beta^{*'}(y) = \alpha^{*'}(y) = \delta^{*'}(y) = 0, \beta'(y) = 1/h,$
 $\beta''(y) = \delta''(y) = \gamma''(y) = \beta^{*''}(y) = \alpha^{*''}(y) = \delta^{*''}(y) = 0, \alpha''(y) = 1/h^2;$

при $y=3h$ $\alpha(y) = \beta(y) = \gamma(y) = \beta^*(y) = \alpha^*(y) = \delta(y) = 0, \delta^*(y) = 1,$
 $\alpha'(y) = \delta'(y) = \gamma'(y) = \beta'(y) = \alpha^{*'}(y) = \delta^{*'}(y) = 0, \beta^{*'}(y) = -1/h,$
 $\beta''(y) = \delta''(y) = \gamma''(y) = \beta^{*''}(y) = \alpha^{*''}(y) = \delta^{*''}(y) = 0, \alpha^{*''}(y) = 1/h^2;$

при $y=4h$ $\gamma(y) = \gamma'(y) = \gamma''(y) = 0$;
 при $y=2h$ $\gamma(y) = 1$.

Базисными сплайнами на отрезке $0 \leq y \leq L$ являются функции $s_1(y), s_2(y), \dots, s_N(y)$, выбранные из определенных выше стандартных функций: $s_1(y)$ и $s_2(y)$ (граничные сплайны) выбираются из $\alpha(y), \beta(y), \delta(y)$ так, чтобы удовлетворить граничным условиям при $y = 0$; например, $s_1(y) = \delta(y), s_2(y) = \beta(y)$, когда аппроксимируется функция $f(y)$, для которой $f(0) = a$ и $f''(0) = 0$; $s_i(y) = \gamma(y - (i - 2)h)$ для $(i - 2)h \leq y \leq (i + 2)h, i = 2, 3, \dots, N - 2$.

Базисные трикубические сплайны представляются в виде $\omega_{ijk}(x_1, x_2, x_3) = \eta_i(x_1) \zeta_j(x_2) \vartheta_k(x_3)$, где $\eta_i(x_1), \zeta_j(x_2)$, и $\vartheta_k(x_3)$ являются базисными кубическими сплайнами, построенными аналогично $s_i(y)$ на отрезках $0 \leq x_1 \leq L_1, 0 \leq x_2 \leq L_2$ и $0 \leq x_3 \leq L_3$ (сторонах Ω), разделенных на N_1, N_2, N_3 интервалов длиной h_1, h_2 и h_3 , соответственно. Базисные трикубические сплайны для $\psi_s, s = 1, 2, 3$ представляются в виде $\eta_i^s(x_1) \vartheta_j^s(x_2) \zeta_k^s(x_3)$, а для μ и ρ - в виде $\hat{\eta}(x_1) \hat{\vartheta}(x_2) \hat{\zeta}(x_3)$. Граничные сплайны выбираются так, чтобы удовлетворить условиям (5).

Данная работа была выполнена при поддержке Международного научно-технического центра (грант 008-94).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Harby W.F., Turcotte D.L., Bird J.M.* Thermal and mechanical evolution of the Michigan basin // *Tectonophysics*. 1976. Vol.36. P.57-75.
2. *Hamdani Y., Mareschal J.-C., Arkani-Hamed J.* Phase changes and thermal subsidence in intracontinental sedimentary basins // *Geophys. J. Int.* 1991. Vol.106. P.657-665.
3. *Naimark B.M., Ismail-Zadeh A.T.* Numerical models of subsidence mechanism in intracratonic basins: Application to North American basins // *Geophys. J. Int.* 1995. Vol.123. P.149-160.
4. *Ismail-Zadeh A.T., Naimark B.M., Kostyuchenko S.L.* Quantitative modelling of the Tunguska Basin evolution in the Palaeozoic: A role of eclogitization within the uppermost mantle // *J. Geodyn.* 1997. Vol.23. P.47-64.
5. *McKenzie D.P.* Surface deformation, gravity anomalies and convection // *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 1977. Vol.48. P.211-238.
6. *Spohn T., Schubert G.* Convective thinning of the lithosphere: A mechanism for the initiation of continental rifting // *J. Geophys. Res.* 1982. Vol.87. P.4669-4681.
7. *Lambeck K.* The role of compressive forces in intracratonic basin formation and mid-plate orogenies // *Geophys. Res. Lett.* 1983. Vol.10. P.845-848.
8. *Joyner W.B.* Basalt-eclogite transition as a cause for subsidence and uplift // *J. Geophys. Res.* 1967. Vol.72. P.4977-4998.
9. *Лобковский Л.И., Исмаил-заде А.Т., Наймарк Б.М., Никушин А.М., Клутинг С.* Механизм погружения земной коры с образованием осадочных бассейнов // *ДАН*. 1993. Т.330. N 6. С.256-260.
10. *Cloetingh S., Eldholm O., Larsen B.T., Gabrielsen R.H., Sassi W.* Dynamics of extensional basin formation and inversion: Introduction // *Tectonophysics*. 1994. Vol.240. P.1-9.
11. *Braun J.* Three-dimensional numerical modelling of compressional orogenies: Thrust geometry and oblique convergence // *Geology*. 1993. Vol.21 P.153-156.

12. *Van Wees J.D., Cloetingh S.* A finite difference technique to incorporate spatial variation in rigidity and planar faults into 3D models for lithosphere flexure // *Geophys. J. Int.* 1994. Vol.117. P.179-195.
13. *Исмаил-заде А.Т., Лобковский Л.И., Наймарк Б.М.* Геодинамическая модель формирования осадочного бассейна в результате образования и последующего фазового перехода магматической линзы в верхней мантии // *Геодинамика и прогноз землетрясений. (Вычисл. сейсмология. Вып. 26).* М.: Наука, 1994. С.139-155.
14. *Ten A., Yuen D. A., Podladchikov Yu. Yu., Larsen T. B., Pachepsky E., Malevsky A. V.* Fractal features in mixing of non-Newtonian and Newtonian mantle convection // *Earth Planet. Sci. Lett.* 1997. Vol.146. P.401-414.
15. *Christensen U.R.* An Eulerian technique for thermomechanical modeling of lithospheric extension // *J. Geophys. Res.* 1992. Vol.97. P.2015-2036.
16. *Poliakov A., Podladchikov Y.* Diapirism and topography // *Geophys. J. Int.* 1992. Vol.109. P.553-564.