

УДК 550.311

## МИГРАЦИЯ МАГМЫ И КОМПАКЦИЯ ВМЕЩАЮЩИХ ПОРОД С ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

Г.И. Ходаковский, В.П. Трубицын

*Международный институт теории прогноза землетрясений  
и математической геофизики Российской академии наук*

М. Рабинович, Ж. Колинер

*Группа исследований в космической геодезии,  
Национальный центр научных исследований/  
Национальный центр космических исследований, Тулуза, Франция*

Получено численное решение уравнений миграции расплава в пористой сжимаемой среде с вязкостью матрицы вмещающих пород, зависящей от концентрации расплава (пористости). При постоянной вязкости и при инверсии концентрации расплава возникают уединённые волны пористости. В работе показано, что условия для возникновения решения в виде уединённых волн изменяются, если вязкость матрицы скачкообразно зависит от пористости. Рассмотрена модель, в которой вязкость скачкообразно уменьшается при критическом значении пористости порядка 6% (в соответствии с экспериментальными данными Херта и Колшtedта). Оказалось, что в этом случае решение в виде уединённых волн возникает при однородном начальном распределении пористости. При этом амплитуда возникающих уединённых волн оказывается в несколько раз больше, чем при постоянной вязкости. Модель используется для описания возможного сценария образования некоторых наблюдаемых слоев интрузий в Оманском офиолите.

## MAGMA MIGRATION AND COMPACTION OF SURROUNDING ROCKS WITH VARIABLE VISCOSITY

G.I. Khodakovskii, V.P. Trubitsyn

*International Institute of Earthquake Prediction Theory  
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences*

M. Rabinowicz, and G. Ceuleneer

*Groupe de Recherche en Geodesie Spatiale CNRS/CNES, Toulouse, France*

We provided numerical solutions for the equation of magma migration in compacting porous media. The matrix viscosity depends on melt concentration (porosity). For constant viscosity without density inversion the melt moves up, replacing the matrix. The inversion of melt concentration produces magma solitary waves. We show that the variable viscosity changes the condition of wave development. We consider the model when viscosity rapidly drops around the critical value of porosity (which is equal to about 6% by laboratory experiment

of Hirt and Kohlstedt). It is found that the solitary waves are generated even without the inversion of melt concentration, in particular, for a constant initial porosity distribution. The amplitude of these waves is several times greater than for the constant viscosity. We discuss a possible explanation of formation of certain intrusive structures in the Oman ophiolite by magma solitary waves.

## ВВЕДЕНИЕ

Частично расплавленная среда при математическом описании может быть представлена двухфазной сплошной средой, состоящей из высоковязкой матрицы вмещающих пород и расплава, моделируемого идеальной (эффективно невязкой) жидкостью. Взаимодействие между этими двумя фазами описывается обобщенным законом Дарси. Формулировка такой математической модели с незначительными различиями в упрощающих гипотезах была предложена в работах [1–3]. Строгий и простой вывод общих уравнений компакции для переноса массы, количества движения и энергии дан в работе [2], где получены характерные решения этих уравнений и проанализирован их физический смысл (в частности, введена длина компакции).

В работах [4, 5] найдено численное решение одномерной задачи компакции, в [3] и [6] получены численные решения для двумерных, а в [7] – для трехмерных моделей. В большинстве работ по моделированию процесса компакции рассматривается случай постоянной вязкости. В работах [4–6, 8] показано, что нелинейное соотношение, существующее между проницаемостью и пористостью, приводит к образованию локальных концентраций пористости, имеющих длину порядка длины компакции. Эти концентрации, которые называют *волнами пористости*, изменяют начальное распределение пористости и движутся к дневной поверхности под действием силы Архимеда, возникающей благодаря разнице плотностей между расплавом и матрицей вмещающих пород. Барсillon и Рихтер [8] показали, что эти волны пористости являются уединёнными волнами, взаимодействующими между собой и, следовательно, не являются классическими солитонами, как считали Скотт и Стевенсон (см. [5]). Опираясь на численные расчеты и используя приближение ударных волн, Шпигельман (см. [6]) получил необходимое условие образования уединённых волн. Это условие требует убывания пористости с высотой, поскольку инверсия плотности приводит к гравитационной неустойчивости. В работе [9] проведены расчеты для степенной зависимости проницаемости от пористости для показателей степени  $n = 1, 2, 3$ . Такие зависимости согласуются с данными экспериментов [10–12]. Оказалось, что при линейной зависимости ( $n = 1$ ) проницаемости от пористости возникают лишь малые возмущения в профилях искомым функций и, следовательно, даже при наличии благоприятного условия образования волн пористости амплитуда их пренебрежимо мала. Напротив, если  $n > 1$ , образуются уединённые волны конечной амплитуды. В работе [9] показано также, что амплитуда волн возрастает, а длина волны убывает с ростом показателя степени  $n$  в зависимости проницаемости от пористости.

Решение системы нелинейных уравнений компакции существенно зависит от начального распределения пористости. В частности, при начальной пористости, убывающей с высотой, возникают уединённые волны конечной амплитуды; при постоянной однородной начальной пористости появляются бесконечно малые воз-

мушения, и при возрастающей с высотой пористости происходит только монотонное всплывание расплава, исследованное в работе [4]. В работе [6] показано, что максимальная амплитуда образующихся уединённых волн зависит от величины убывания пористости с высотой в заданном начальном распределении.

В вышеуказанных работах не учитывались эффекты, связанные с зависимостью вязкости вмещающих пород от концентрации расплава. Однако при увеличении количества расплава в породе происходит резкое уменьшение ее вязкости от  $10^{22}$  Па с для породы без расплава до 100 Па с – для полностью расплавленных базальтов. Согласно геолого-минералогическим данным, существуют породы, в которых содержание расплава достигало 15–20% [13–15]. В экспериментальной работе [16] измерена вязкость частично расплавленных пород и обнаружено резкое падение вязкости при содержании расплава порядка 6%. В работе [9] проведены численные расчеты уравнений компакции для степенной и арктангенциальной зависимости вязкости породы от содержания расплава.

В настоящей работе изложена постановка задачи и выделены новые свойства ее решения, возникающие при учете зависимости вязкости от пористости. Можно сказать, что эти свойства – проявление новой неустойчивости решения, которая растет значительно быстрее, чем неустойчивость, связанная лишь с переменной проницаемостью. В связи с этим за малое время волны пористости достигают более значительных амплитуд, чем при постоянной вязкости, а образование волн пористости происходит даже и при ранее устойчивом постоянном начальном распределении пористости. Приводятся новые результаты численных расчетов миграции магмы для случая постоянного начального распределения расплава при его концентрации, превышающей 6%, когда проявляется новая неустойчивость решения, связанная с переменной вязкостью.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И УРАВНЕНИЯ КОМПАКЦИИ

### Уравнения сохранения массы и импульса для двухфазной жидкости

Рассмотрим частично расплавленную породу в поле силы тяжести. Она представляет собой сплошную среду, состоящую из двух фаз:

- 1) нерасплавленная порода – пластически деформируемая матрица, которая моделируется высоковязкой жидкостью;
- 2) магматический расплав, моделируемый эффективно идеальной жидкостью.

При нагревании породы на стыках ее зерен происходит плавление легкоплавких минералов. Возникающее состояние среды можно описать матрицей вмещающих пород с порами, заполненными расплавом. Элементарный объем сплошной среды содержит эти две фазы, для каждой из которых запишем законы сохранения массы и количества движения. Эти законы должны быть отнесены к объемной доле каждой фазы в элементарном объеме.

Обозначим через  $f$  пористость среды, равную (по определению) объемной концентрации расплава. Тогда  $f$  – объем, соответствующий расплаву, а  $(1 - f)$  – объем, соответствующий твердой матрице. Пусть  $\mathbf{w}$  – скорость жидкого расплава,  $\mathbf{W}$  – скорость твердой матрицы,  $\rho_l$  – плотность жидкого расплава,  $\rho_s$  – плотность твердой матрицы,  $p$  – давление,  $\mathbf{g}$  – ускорение силы тяжести,  $\sigma_s^{ij}$  – девиатор тензора напряжений,  $\mathbf{R}$  – объемная сила межфазного взаимодействия,

$G$  – поток массы, вызванный обменом массой между фазами, протекающим либо из-за плавления твердой матрицы, либо из-за кристаллизации жидкого расплава. Тогда законы сохранения запишутся системой дифференциальных уравнений (см., например, [17]), т.е.

*законы сохранения массы*

$$\frac{\partial(\rho_l f)}{\partial t} + \text{div}(\rho_l f \mathbf{w}) = G \quad \text{для жидкого расплава,} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial(\rho_s(1-f))}{\partial t} + \text{div}(\rho_s(1-f)\mathbf{W}) = -G \quad \text{для высоковязкой жидкости;} \quad (1.2)$$

*законы сохранения количества движения*

$$f\rho_l \frac{d\mathbf{w}}{dt} = -\text{grad}(fp) - f\rho_l \mathbf{g} - \mathbf{R} \quad \text{для жидкого расплава,} \quad (1.3)$$

$$(1-f)\rho_l \frac{d\mathbf{W}}{dt} = -\text{grad}((1-f)p) - (1-f)\rho_s \mathbf{g} + \mathbf{R} + \nabla((1-f)\sigma_s^{ij}) \quad \text{для высоковязкой жидкости.} \quad (1.4)$$

Эта система полностью описывает сплошную среду, если мы знаем ее термодинамику (которая дает связующие соотношения между двумя плотностями, давлением и пористостью), реологию (связывающую тензор напряжений с тензором скоростей деформаций) и силу межфазного взаимодействия. Для получения этих зависимостей необходимо выбрать некоторую модель, основанную на физических гипотезах, конкретизирующих и упрощающих общую постановку задачи.

### Уравнения изотермической компакции

Следуя МакКензи [2], примем следующие упрощающие предположения:

- 1) плотности фаз постоянны;
- 2) давление в расплаве и высоковязкой матрице совпадают;
- 3) реология матрицы ньютоновская

$$\sigma_s^{ij} = \left( \zeta - \frac{2}{3}\eta \right) \text{div}\mathbf{W} + \eta(\nabla_i \mathbf{W}^j + \nabla_j \mathbf{W}^i), \quad (1.5)$$

где  $\zeta$  и  $\eta$  – объемная и сдвиговая вязкости матрицы, подверженной пластическому течению;

4) сила межфазного взаимодействия выражается зависимостью, которая переводит уравнение (1.3) в закон Дарси, описывающий движение жидкости в пористой среде [18]

$$\mathbf{R} = \frac{\mu f^2}{k}(\mathbf{w} - \mathbf{W}) - p\text{grad}f, \quad (1.6)$$

где  $k$  – проницаемость, а  $\mu$  – вязкость расплава;



5) движения медленны, т.е. мы пренебрегаем инерционными членами в уравнениях движения, как это принято для течений Стокса с малыми числами Рейнольдса ( $Re \ll 1$ );

6) нет потока массы, связанного с обменом массой между фазами внутри элементарного объема сплошной среды:  $G = 0$ . Это соответствует постоянной температуре во время всего процесса миграции магмы.

Подставим (1.5) в (1.4) и используем (1.6) с учетом вышеуказанных предположений – система уравнений (1.1)–(1.4) перейдет в новую систему, описывающую задачу компакции [2]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f\mathbf{w}) = 0, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \text{div}((1-f)\mathbf{W}) = 0, \quad (1.8)$$

$$f(\mathbf{w} - \mathbf{W}) = -\frac{k}{\mu} \text{grad}(p - \rho_l g z), \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} (\zeta + \frac{\eta}{3}) \text{grad div } \mathbf{W} + \text{div}(\eta \text{grad } \mathbf{W}) + \text{grad}(\zeta + \frac{\eta}{3}) \text{div } \mathbf{W} = \\ = -\frac{\mu}{k} f(\mathbf{w} - \mathbf{W}) + (1-f) \delta \rho g. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь  $\delta \rho = \rho_s - \rho_l$  – разность между плотностями матрицы и расплава, вызывающая силу Архимеда, а вязкости матрицы отнесены к ее объему:  $\eta' = (1-f)\eta$ ,  $\zeta' = (1-f)\zeta$  (штрихи в дальнейшем опущены).

Система (1.7)–(1.10) состоит из четырех уравнений, связывающих четыре неизвестные функции: пористость  $f$ , давление  $p$  и скорости расплава  $\mathbf{w}$  и матрицы  $\mathbf{W}$ . Эта система уравнений замкнута, если известны зависимости для ”реологических коэффициентов”: вязкостей ( $\eta$ ,  $\zeta$ ) и проницаемости  $k$ .

Необходимо отметить, что математическая модель, описанная выше, имеет физический смысл только до значений пористости порядка 30%. Выше этого порога нельзя говорить о пористой среде, поскольку твердая матрица разрушается и закон Дарси не выполняется.

## 2. ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ

### Система уравнений для пористости и скорости матрицы

Если считать, что неизвестные функции зависят только от одной координаты  $z$ , то система уравнений существенно упростится. Исключая первый член из уравнений (1.7), (1.8), в одномерном приближении получим

$$\frac{\partial f w}{\partial z} = -\frac{\partial(1-f)W}{\partial z}. \quad (2.1)$$

Интегрирование (2.1) по  $z$  дает

$$f w = -(1-f)W + c, \quad (2.2)$$

где  $c$  – константа интегрирования, равная нулю, если среда как целое не движется. Уравнение (1.9) также может быть проинтегрировано и получено следующее выражение для давления:

$$p = \mu \int \frac{W}{k} dz + \rho_1 g z. \quad (2.3)$$

Кроме того, в одномерном случае уравнение (1.10) упрощается. Подставляя  $w$  из (2.2) в (1.10), получим

$$\left(\zeta + \frac{4\eta}{3}\right) \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\zeta + \frac{4\eta}{3}\right) \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\mu}{k} W + (1-f)\delta\rho g. \quad (2.4)$$

Поскольку в уравнении (2.4) вместо двух независимых коэффициентов вязкости остается только одна их комбинация, удобно сделать замену переменных:  $\eta' = (\zeta + 4\eta/3)$ .

Уравнение (1.8) в одномерном случае принимает следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial((1-f)W)}{\partial z} = 0. \quad (2.5)$$

Таким образом мы получили систему из двух уравнений (2.4) и (2.5) для двух неизвестных функций – пористости  $f$  и скорости матрицы  $W$ . Найдя эти неизвестные, можно определить скорость движения расплава и давление из соотношений (2.2) и (2.3).

### Безразмерные переменные

Уравнения (2.4), (2.5) удобно записать в безразмерном виде. Выберем следующие единицы измерения для скорости  $W_0$  и длины  $L$ :

$$W_0 = \frac{k_0}{\mu} (1-f_0)\delta\rho g, \quad (2.6)$$

$$L = \sqrt{\frac{k_0}{\mu}} \eta_0, \quad (2.7)$$

где  $f_0$  – некоторое произвольно выбранное значение пористости, а  $k_0$  и  $\eta_0$  – значения для проницаемости и вязкости матрицы, полученные из известных зависимостей:  $k_0 = k(f_0)$  и  $\eta_0 = \eta(f_0)$ . Реальные значения для вязкости и проницаемости выразятся в виде:

$$\eta = \eta_0 \eta(f), \quad k = k_0 k(f). \quad (2.8)$$

Характерная длина  $L$ , на которой изменения скорости компакции матрицы сравнимы с самой величиной скорости, называется длиной компакции (2.7). Единица измерения для скорости (2.6) имеет смысл скорости расплава Дарси при  $f = f_0$ . Для частично расплавленного вещества верхней мантии при характерных значениях пористости порядка 0.1 (10%), единица измерения для скорости может изменяться от 1.6 мм в год до 1.6 м в год в зависимости от характерного значения проницаемости. Длина компакции может изменяться в пределах от 100 м до 3 км в зависимости от характерных значений проницаемости и вязкости, определяемых формулой (2.8).

Сделаем замену переменных:

$$z = z' L, \quad W = W' W_0, \quad f = f' f_0, \quad w = w' W_0 / f_0, \quad p = p' \mu W_0 L / k_0 + \rho_1 g z, \quad (2.9)$$

она удобна тем, что в новых переменных скорости расплава и матрицы имеют одинаковый порядок величины. Размерные скорости расплава в  $1/f$  раз больше скоростей высоковязкой матрицы.

В новых переменных система уравнений (2.1)–(2.4) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} f - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{1}{f_0} - f \right) W \right] = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \eta(f) \frac{\partial}{\partial z} W \right] - \frac{1}{k(f)} W = \frac{1 - f_0 f}{1 - f_0}, \quad (2.11)$$

$$w = -(1/f_0 - f) W / f, \quad (2.12)$$

$$p = \mu \int \frac{W}{k} dz + \rho_1 g z. \quad (2.13)$$

Поскольку давление  $p$  и скорость расплава  $w$  выражаются явно через скорость матрицы  $W$  и пористость  $f$ , то решение системы четырех уравнений (2.10)–(2.13) сводится к решению только двух взаимосвязанных уравнений (2.10)–(2.11). Для решения этой системы необходимо задать начальное и граничное условия для пористости и два граничных условия для скорости. Верхнюю ( $z = 1$ ) и нижнюю ( $z = 0$ ) границы выберем свободными, т. е.  $\left. \frac{\partial W}{\partial z} \right|_{0,h} = 0$ , начальное распределение пористости зададим в виде  $f(z, t = 0) = f^*(z)$ .

Численное решение задачи было получено при ее дискретизации методом конечных разностей следующим образом:

$$\begin{aligned} f_i^{n+1} &= f_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[ \left( \frac{1}{f_0} - f_i \right) W_i - \left( \frac{1}{f_0} - f_{i-1} \right) W_{i-1} \right], \\ &\left( \eta_{i+1/2} + \frac{1}{12} r_{i+1} (\Delta z)^2 \right) W_{i+1} - \left( \eta_{i+1/2} + \eta_{i-1/2} - \frac{10}{12} r_i (\Delta z)^2 \right) W_i + \\ &+ \left( \eta_{i-1/2} + \frac{1}{12} r_{i-1} (\Delta z)^2 \right) W_{i-1} = \left( \frac{1}{12} s_{i+1} + \frac{1}{12} s_{i-1} + \frac{10}{12} s_i \right) (\Delta z)^2 + \\ &+ o \left( \frac{1}{240} (\Delta z)^6 W^{(4)} \right), \end{aligned}$$

где  $r_i = \frac{1}{k(f_i)}$ ,  $s_i = \frac{1-f_0 f_i}{1-f_0}$ ,  $\eta_i = \eta(f_i)$  (нижний индекс – номер шага по пространственной переменной, верхний – по времени). Полуцелый индекс обозначает, что значение переменной берется в середине интервала. Эта схема соответствует схеме 4-го порядка, описанной в работе [8], и обобщена на случай переменной вязкости.

### 3. ЗАВИСИМОСТЬ ПРОНИЦАЕМОСТИ И ВЯЗКОСТИ ОТ ПОРИСТОСТИ

Проницаемость матрицы определяется площадью сечения связанных поровых каналов и их геометрией. Например, для правильной матрицы, состоящей из плотноупакованных одинаковых сфер, проницаемость может быть вычислена теоретически, при этом оказывается (см. [13]), что  $k \sim f^3/(1 - f^2)$ . Для реальных сред зависимость проницаемости от пористости имеет более сложную форму [10–12]. Приближенно эту зависимость можно представить в виде обобщенного степенного закона

$$k(f) = Af^n, \quad (3.1)$$

где  $A$  – константа, зависящая от геометрии матрицы, а показатель степени  $n$  может принимать значения  $n = 1, 2, 3 \dots$  для различных диапазонов значений пористости.

В большинстве предыдущих работ, посвященных модели компакции, вязкость считалась постоянной. Впервые случай переменной вязкости рассмотрели Скотт и Стевенсон [5], они приняли форму зависимости вязкости от пористости в виде

$$\eta = f^{-m}, \quad m \in [0, 1]. \quad (3.2)$$

Эта форма удобна благодаря своей простоте, но не совсем соответствует физической реальности, поскольку дает бесконечное значение вязкости при  $f = 0$  (хотя известно, что вязкость вещества в мантии имеет конечное значение).

Согласно [13], в частично расплавленной верхней мантии под срединно-океаническими хребтами содержится довольно значительное количество магматической жидкости – 5-10% объемной концентрации магматического расплава. Поэтому в этой области весьма вероятно резкое изменение пластического поведения твердой матрицы, ведущее к скачкообразному падению вязкости, если пористость достигает некоторого критического значения.

В работе [9] была предложена зависимость для вязкости

$$\eta(f) = \eta_0 / \pi(\pi/2 - \arctan(q(f - f_c))), \quad (3.3)$$

которая имеет следующий физический смысл: пористость мало влияет на вязкость вплоть до некоторого критического значения пористости  $f_c$ , при достижении которого вязкость скачкообразно падает. Это пороговое значение, возможно, соответствует моменту, когда зерна твердой матрицы оказываются смоченными жидкостью. При этом вязкость по величине может упасть на 2-3 порядка при увеличении пористости на несколько процентов. Зависимость (3.3) была затем подтверждена лабораторными экспериментами Херта и Колштедта [16], обнаружившими подобный скачок вязкости при пористости порядка 5-6%. В приведенных ниже расчетах значение пороговой пористости  $f_c$  было принято равным 0.06. Значение константы  $q$  фиксирует область изменения пористости, при которой происходит скачок вязкости: при  $q = 300$  вязкость резко падает при изменении пористости на 0.2%; при  $q = 50$  скачок вязкости осуществляется при изменении пористости на 1% (от 5,5 до 6,5%).

#### 4. ВОЛНЫ ПОРИСТОСТИ В ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЕ

##### Результаты численных расчетов для среды с переменной вязкостью и постоянной проницаемостью

Влияние зависимости вязкости высоковязкой жидкости от пористости на решение задачи компакции исследовалось в работах [5, 9]. Простейший случай зависимости в виде (3.2) (см. [5]) показал, что переменная вязкость практически не влияет на решение. Зависимость типа (3.3) (см. [9]) существенно влияет на решение задачи компакции. Хотя для реальных сред от пористости зависят как вязкость, так и проницаемость, но для выявления только роли переменной вязкости были проведены расчеты с постоянной проницаемостью.

Как указывалось выше, согласно экспериментам вязкость резко убывает в окрестности 6% значения пористости. Для расчетов была принята зависимость (3.3) при  $q = 300$ , т.е. резкий скачок вязкости. В качестве начального распределения пористости принято распределение Гаусса с амплитудой 2%, где пористость изменяется от 5 до 7%. Результаты расчетов распределения пористости и скорости вязкой матрицы для разных моментов времени представлены на рис. 1, из которого видно, что со временем пористость начинает скачкообразно возрастать и в распределении  $f(z)$  появляется острый пик. Со временем этот пик растет и над ним появляются вторичные пики, при этом амплитуда пиков последовательно убывает с ростом высоты.

Таким образом в рассматриваемой модели пористой среды первичные неоднородности расплава не мигрируют вверх, а происходит лишь перераспределение расплава внутри неоднородности. Возникающие структуры не являются бегущими уединенными волнами, как при переменной проницаемости, так как они не изменяют своего пространственного положения со временем. Все эти изменения в распределении пористости имеют место только в области, где пористость имеет значения больше критического.

При сравнении конечного и начального распределений пористости (см. рис. 1), видно, что в результате эволюции часть расплава (в области, превышающей критическое значение) мигрирует сверху вниз, а вещество вязкой жидкости вытесняется вверх из области, где образуется пик расплава. На первый взгляд это противоречит тому, что легкий расплав мигрирует вверх. Чтобы снять это недоумение, нужно учесть движение расплава и матрицы во всем рассматриваемом объеме. Как видно из рис. 1, скорость движения вязкой жидкости всегда и во всей области отрицательна, т.е. направлена вниз, поэтому, согласно уравнению (2.12), расплав также во всей области всегда движется вверх. Но поскольку скорости матрицы и расплава зависят от распределения пористости, то они неоднородны и на фоне общего вертикального подъема расплава в области  $f < f_c = 0.06$  происходит его локальное перераспределение в области  $f > f_c = 0.06$ , а именно: расплав из этой области поднимается вверх, а на его место поступает снизу новый расплав. При этом в верхнюю часть поступает меньше вещества, чем в нижнюю, в результате чего и происходит перераспределение расплавленного вещества в пик. Этот процесс можно сравнить с локальным выпячиванием стенки вертикальной резиновой трубки, по которой поднимается жидкость. Заметим, что при нели-

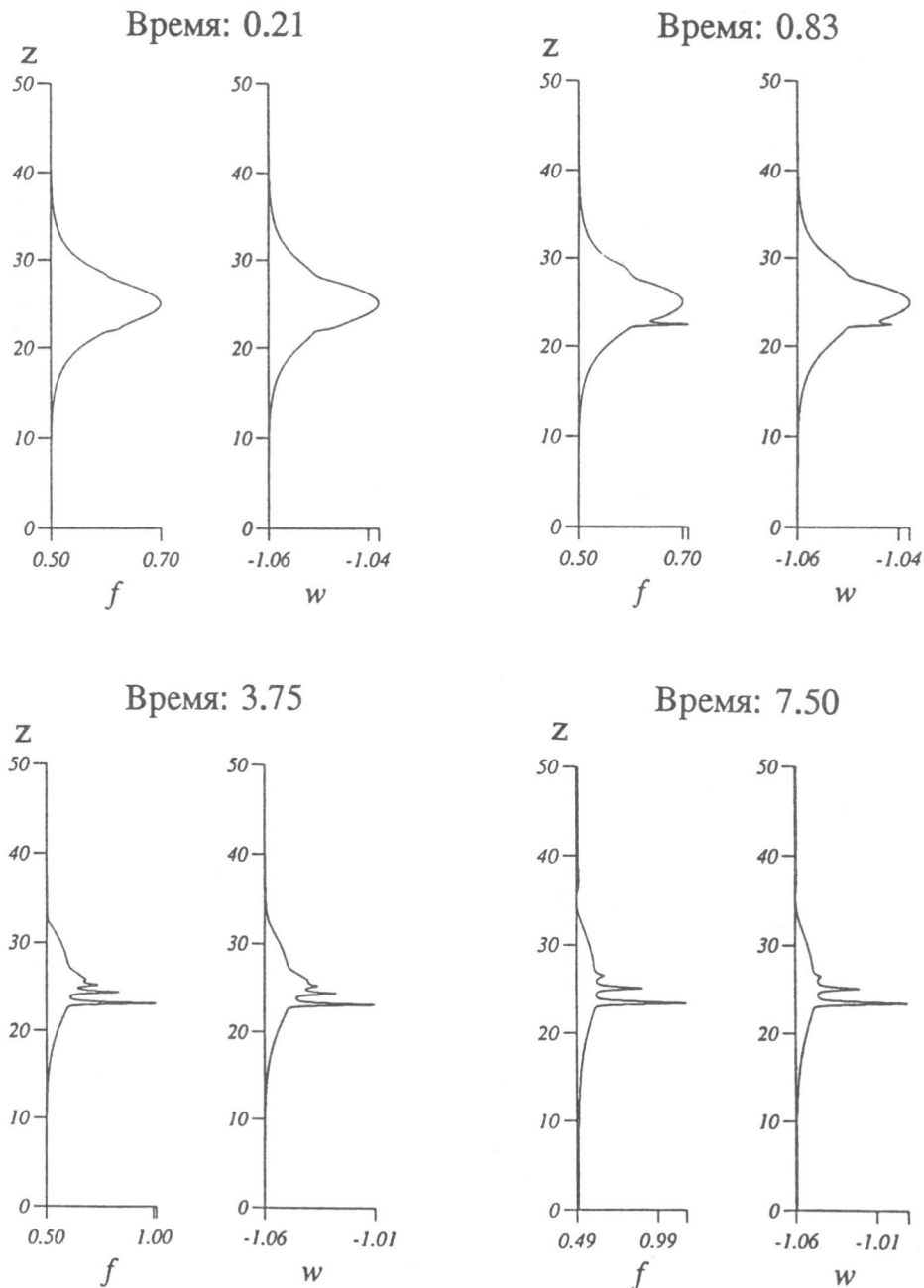


Рис. 1. Безразмерные распределения пористости  $f(z)$  и скорости матрицы  $W(z)$  для модели с постоянной проницаемостью и арктангенциальной зависимостью вязкости от пористости для четырех моментов времени

Единица измерения для пористости, входящая как параметр в уравнения, равна 0.1,  $z$  – высота, измеряемая в длинах компакции

нейных свойствах материала стенки, взаимодействующей с жидкостью, возможна миграция вниз легкой жидкости внутри выступающей области (на фоне общего подъема жидкости).

Переменная вязкость приводит к следующим новым эффектам:

1) образование пика в распределении пористости происходит в области возрастания, а не убывания пористости (см. рис. 1). При постоянной вязкости наблюдалось образование бегущей волны [4, 6, 8], в то время как при постоянной проницаемости и переменной вязкости начальная неоднородность не поднимается, а только деформируется;

2) время всего развития неоднородности (роста пика до значительных амплитуд) при переменной вязкости на порядок больше, чем при постоянной, хотя процесс появления зародыша неустойчивости при переменной вязкости, ведущей к образованию пика, происходит практически мгновенно;

3) для образования пика необходимо, чтобы в начальном распределении пористости были области, где пористость превышает критическое значение;

4) изменение распределения пористости (см. [9]) определяется в основном "резкостью" скачка вязкости (значением  $q$ ), а не начальным распределением пористости, которое вообще никак не влияет на решение задачи в области ниже критического значения. Из сказанного выше следует, что если вязкость изменяется по закону (3.3), то для пористости, которая превышает критическое значение, соответствующее скачку вязкости, появляется новая сильная неустойчивость, связанная исключительно с законом изменения вязкости.

### Результаты численных расчетов для среды с переменной вязкостью и переменной проницаемостью

Модель миграции расплава с компакцией вмещающей его вязкой жидкости в общем случае переменной вязкости и переменной проницаемости рассматривалась в работе [9]. Была исследована миграция расплава в моделях, где начальное распределение пористости представляется либо гауссовской кривой, либо монотонно убывает с высотой. В обоих случаях, благодаря инверсии плотности, кроме монотонного всплывания расплава при медленной компакции [4], возникает новое решение задачи, представляющее собой распространяющиеся вверх волны пористости. Возникает вопрос, возможно ли образование подобных волн при начальном однородном распределении расплава  $f^*(z) = f(z, t = 0) = \text{const}$ . В настоящей работе проводятся расчеты миграции расплава для модели  $f^* = \text{const}$  при проницаемости, изменяющейся по кубическому закону (3.1) и вязкости, зависящей от пористости по закону (3.3) при  $q = 50$ . Расчеты показывают, что волны пористости конечной амплитуды при постоянном начальном распределении  $f^* = \text{const}$  появляются только в тех случаях, когда одновременно изменяются и проницаемость, и вязкость. Волны не появляются в области, где значение пористости меньше критического.

Рассчитанная из уравнений (2.9), (2.10) эволюция распределений пористости (объемного содержания расплава), скорости и вязкости матрицы для начальной постоянной пористости, равной 7% и превышающей критическое значение  $f_c = 6\%$  (в размерных единицах), приведены на рис. 2. Во всех распределениях вначале образуются симметричные волновые пакеты малой амплитуды. В дальнейшем

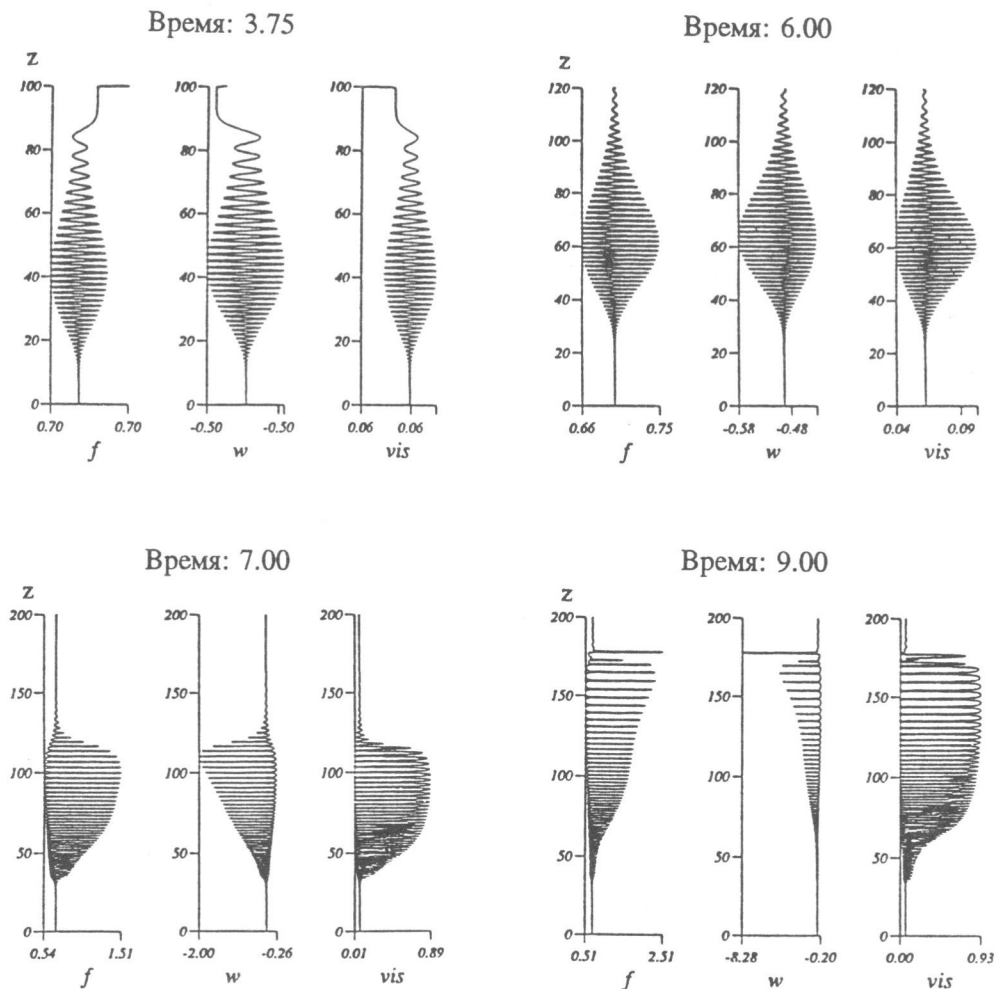


Рис. 2. Безразмерные распределения пористости  $f(z)$ , скорости матрицы  $W(z)$  и вязкости матрицы  $vis(z)$  для модели с переменной проницаемостью и арктангенциальной зависимостью вязкости от пористости для четырех моментов времени

Пространственный размер расчетного окна изменяется со временем от  $100L$  до  $200L$

амплитуда этого пакета волн растет, и при достижении им окрестности критического значения пористости пакет становится несимметричным – критическое значение ограничивает волны снизу. Амплитуда волн в пакете начинает при этом быстро расти, и волны выстраиваются в порядке возрастания их амплитуды. Мы видим, что вне волн пористости вязкость изменяется слабо; напротив, в волнах вязкость резко падает до нуля. Надо отметить, что для времени  $t = 9.00$  в решении для вязкости огибающая пакета волн стабилизируется на значении примерно  $0.9$  от вязкости твердой матрицы, т.е. вязкость системы в целом, кроме счетного числа волн, определяется вязкостью породы при пористости меньше критической.



При увеличении пористости среды растет проницаемость и убывает вязкость. При превышении критического значения пористости начинает проявляться новая сильная неустойчивость решения, связанная с резким убыванием вязкости. Совместное влияние переменной вязкости и переменной проницаемости уменьшает устойчивость начального распределения пористости. Это влияние приводит к следующим свойствам решения:

1. Волны пористости образуются как в области убывания пористости (для постоянной вязкости), так и при значениях пористости, превышающих критическое (для постоянной проницаемости).

2. Процесс появления волны пористости в виде мгновенного изменения профиля скорости такой же, как при постоянной проницаемости, но ориентация профиля скорости совпадает со случаем при постоянной вязкости: максимумы пористости соответствуют минимумам скорости твердой фазы.

3. Волны пористости движутся к дневной поверхности, как при постоянной вязкости. Однако, если начальное распределение пористости есть распределение Гаусса (см. [9]), то количество волн сокращается вплоть до образования со временем лишь одной волны со значительной амплитудой, как при постоянной проницаемости. Это – проявление сильного нелинейного взаимодействия между волнами.

4. Для больших значений  $q$  волны пористости ограничены снизу критическим значением  $f_c$ , как при постоянной проницаемости, но с уменьшением  $q$  волны возникают в области ниже критического значения  $f_c$ , так что при  $q = 1$  они качественно не отличаются от случая при постоянной вязкости.

5. Длина волны пористости и максимальная амплитуда определены в основном значением  $q$  (резкостью закона вязкости), но амплитуда начального распределения играет также существенную роль для максимальной амплитуды волны. Достигаются наибольшие амплитуды при наибольшем контрасте пористости в начальном распределении.

6. В конечной стадии эволюции расплав мигрирует сквозь вязкую матрицу в виде следующих друг за другом на некотором расстоянии неоднородностей повышенной концентрации.

Таким образом, основное влияние переменной вязкости в виде закона (3.3) на решения задачи компакции проявляется в уменьшении пространственного масштаба образующихся структур, в которых концентрируется все больше расплава во все более узких областях.

## 5. ВОЗМОЖНЫЕ ГЕОЛОГИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Чтобы использовать результаты моделирования для объяснения некоторых структур миграции магмы, наблюдаемых в породах верхней мантии Земли под срединно-океаническими хребтами, необходимо установить соответствие между реально наблюдаемыми геологическими величинами и принятой нами идеализированной моделью. Эта проблема касается пористости, являющейся в модели основной искомой функцией.

1. Пористость (см. ниже) может описывать реальные концентрации магмы. Реликты верхнемантийной магмы сохранились в некоторых обнажениях гарц-

бургитов в офиолитах. Химический состав этих реликтов говорит о том, что они кристаллизовались при высокой температуре (1200–1500°C) и их источником явилась базальтовая жидкость [19]. Закристаллизовавшись в узком температурном интервале, эти магматические реликты могут дать качественную информацию о пространственном распределении магматической жидкости в момент перед кристаллизацией. В частности, эти реликты свидетельствуют о значительных локальных концентрациях магмы в верхней мантии под срединно-океаническими хребтами [20].

2. Вязкость важна лишь для значения до его резкого падения. Она играет важную роль в задаче, поскольку входит в масштаб длины (в длину компакции). Для оценки этого значения пользуются геофизическими данными. Моделирование мантийной циркуляции под срединно-океаническими хребтами приводят к значениям вязкости матрицы порядка  $10^{18}$  Па·с [10, 12].

3. Проницаемость матрицы – третий параметр проведенного нами моделирования. Что касается зависимости проницаемости от пористости, то для больших (превышающих 3%) значений пористости используется кубический закон ( $n = 3$ ). Наши возможные геологические приложения лежат в области значений пористости около критического (5–6%), где заведомо надо пользоваться кубической зависимостью. Что касается абсолютных значений для проницаемости, то они задаются уровнем пористости и для размеров зерен матрицы верхнемантийной частично расплавленной породы имеют порядок  $10^{-10}$ – $10^{-13}$  кв.м. Эти значения вместе со значениями вязкостей твердой матрицы и магматического расплава задают вилку характерных масштабов, в частности, для длины компакции  $L$  имеем значения от 100 до 3000 м, а для единицы измерения скорости  $W$  – от 1.6 мм/год до 1.6 м/год.

Наблюдаемые структуры миграции магмы в верхней мантии чрезвычайно разнообразны и имеют самый различный масштабный уровень. Это и структуры, имеющие размер в несколько миллиметров, и крупные зоны магматических концентраций размером в десятки метров.

Были предложены различные механизмы формирования этих структур:

1. Спонтанное перераспределение магмы под действием изменения вязкости на пространственно-масштабном уровне, сравнимом с зернами твердой матрицы, предложенное Стевенсоном [21], возможно, объясняет образование мелких структур, расположенных в самых разнообразных направлениях.

2. Механическая неустойчивость при взаимодействии магмы, находящейся вне химического равновесия с окружающей породой, предложенная Агароновым и др. [22], возможно, объясняет образование структур дендритовой формы преимущественно в вертикальном направлении с возрастающими кверху пространственными размерами.

3. Волны пористости, изученные в настоящей работе, могут объяснить образование крупных структур миграции магмы, открытых недавно Колинером в верхнемантийных породах (офиолиты Омана) [20]. Эти структуры образовались при высокой температуре (т.е. в частично расплавленной мантии), субпараллельны палеогранице Мохо (т.е. были горизонтальны) и не представляют резко несогласного залегания во вмещающей породе. Характерный пространственный размер этих структур миграции – десятки метров, что сравнимо с шириной пиков волн пористости, рассчитанных в настоящей работе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 95-05-14922).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Каракин А.В., Лобковский Л.И.* Механика пористой двухфазной вязкодеформируемой среды и некоторые геофизические приложения // Механика жидкости и газа. 1979. N.6. С. 53-63.
2. *McKenzie D.* The generation and compaction of partially molten rock // J. Petrol. 1984. Vol.25. P. 713-765.
3. *Scott D., Stevenson D.* Magma ascent by porous flow // J. Geophys. Res. 1986. Vol.91. P. 9283-9296.
4. *Richter F.M., McKenzie D.* Dynamical models for melt segregation from a deformable matrix // J. Geol. 1984. Vol.92. P. 729-740.
5. *Scott D., Stevenson D.* Magma solitons // Geophys. Res. Lett. 1984. Vol.11. P. 1161-1164.
6. *Spiegelman M.* Flow in deformable porous media II: numerical analysis – the relationship between shock waves and solitary waves // J. Fluid Mech. 1993. Vol.247. P. 39-63.
7. *Wiggins C., Spiegelman M.* Magma migration and magmatic solitary waves in 3-D // Geophys. Res. Lett. 1995. Vol.22. P. 1289-1292.
8. *Barcilon V., Richter F.M.* Non-linear waves in compacting media // J. Fluid Mech. 1986. Vol.164. P. 429-448.
9. *Khodakovskii G., Rabinowicz M., Ceuleneer G., Trubitsyn V.* Melt percolation in a partially molten mantle mush: effect of a variable viscosity // Earth and Planet. Sci. Letters. 1995. Vol.134. P. 267-281.
10. *McKenzie D.* Some remarks on the movement of small melt fraction in the mantle // Earth and Planet. Sci. Lett. 1989. Vol.95. P. 53-72.
11. *Daines M. J., Kohlstedt D. L.* The transition from porous to channelized flow due to melt/rock reaction during melt migration // Geophys. Res. Lett. 1994. Vol.21. P. 145-148.
12. *Kohlstedt D.* Structure, rheology and permeability of partially molten rock at low melt fractions // Mantle flow and melt generation at mid-ocean ridges. Geophys. Monograph., Series 71. 1992. 325 p.
13. *Rabinowicz M., Nicolas A., Vigneresse J.L.* A rolling mill effect in asthenosphere beneath oceanic spreading centers // Earth Planet. Sci. Lett. 1984. Vol.67. P. 97-108.
14. *Rabinowicz M., Ceuleneer G., Nicolas A.* Melt segregation and flow in mantle diapirs below spreading centers: evidence from the Oman ophiolite // J. Geophys. Res. 1987. Vol.92. P. 3475-3486.
15. *Buck W., Su W.* Focused mantle upwelling below mid-ocean ridges due to feedback between viscosity and melting // Geophys. Res. Letts. 1989. Vol.16. P. 641-644.
16. *Hirth G., Kohlstedt D.* Experimental constraints on the dynamics of the partially molten upper mantle: deformation in the diffusion creep regime // J. Geophys. Res. 1995. Vol.100. P. 1981-2001.
17. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т.1. М.: Наука, 1983. 536 с.
18. *Drew D. and Segel L.* Averaged equations for two-phase flows // Stud. Appl. Math. 1971. Vol.50. P. 205-231.
19. *Bender J., Langmuir C., Hanson G.* Petrogenesis of basalt glasses from the Tamayo region, East Pacific Rise // J. Petrol. 1983. Vol.25 P. 213-254.

20. *Ceuleneer G., Monneréau M., Amri I.* Distribution of melt migration relics in a fossil mantle diapir (Oman ophiolite): evidence for channeled porous flow in the asthenosphere // *Nature*. 1996. Vol.379. P. 149-153.
21. *Stevenson D.* Spontaneous small-scale melt segregation in partial melts undergoing deformation // *Geophys. Res. Lett.* 1989. Vol.16. P. 1067-1070.
22. *Aharonov E., Whitehead, J. A., Kelemen P. B., Spiegelman M.* Channelling instability of upwelling melt in the mantle // *J. Geophys. Res.* 1995. Vol.100. P. 20433-20450.