

УДК 550.331

СТАТИСТИКА ОСАДОЧНОЙ ТОЛЩИ: МОДЕЛЬ

Г.М. Молчан

*Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук*

Д. Туркотт

Департамент геологических наук Корнельского Университета США

Рассмотрена простейшая стохастическая модель данных бурения осадочной толщи: глубина слоя и его возраст. Модель основана на предположении, что скорость осадконакопления складывается из случайной гауссовской автомодельной стационарной компоненты и постоянной составляющей b . При этом из всех слоев осадочной толщи, залегающих на одной высоте в течение всего периода ее формирования, под действием эрозии сохраняется только самый молодой по возрасту. В этой модели аналитически изучены следующие вопросы: распределение по размерам как временных гэпов так и мощностей слоев с кажущейся непрерывной датировкой, временная мультифрактальность осадочных слоев и задача оценивания параметра b . Исчерпывающий ответ дан в условиях, когда случайная компонента скорости осадков является белым шумом.

**THE STATISTICS OF A SEDIMENTARY SEQUENCE:
A MODEL**

G.M. Molchan

*International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences*

D. Turcotte

Department of Geological Sciences, Cornell University, USA

A simple stochastic model is applied to drilling data for a sedimentary sequence (layer depth - age). The model is based on the assumption that the rate of sedimentation is a stochastic self-affine process with a constant drift b . It is further assumed that, of all the sedimentary layers that had been deposited at the same level, all but the youngest one have been eroded. The following problems have been studied in the model: the size distribution of both time gaps in the sedimentary record and layer thicknesses with apparent continuous time dating, the temporal multifractality of sedimentary layers, and the estimation of the parameter b . An exhaustive answer is available for the case in which the random component in the rate sedimentation is white noise.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть функция $\xi(t)$ описывает динамику рельефа в некоторой точке, т.е. высоту поверхности от времени. Если в формировании рельефа участвует только процесс осадконакопления, то всякое уменьшение высоты $\xi(t)$ осуществляется за счет того, что все предыдущие слои, датированные временами $\tau < t$ и залегающие на высотах $d > \xi(t)$, исчезают под действием природных сил. В результате осадочная толща описывается набором слоев (d, τ) , где d – глубина залегания (отсчет снизу вверх) и τ – его возраст. В терминах динамики $\xi(t)$ связь (d, τ) можно описать возрастающими функциями

$$d(\tau) = \inf\{\xi(t) : t \geq \tau\},$$

$$\tau(d) = \sup\{t : \xi(t) \leq d\}$$

так что $d(\tau(x)) = x$.

Плоские участки $d(\tau)$, $d(\tau) = \text{const}$, или скачки в $\tau(d)$, $(\tau(d-0), \tau(d+0)) = \Delta\tau$, отвечают перерывам во времени (*гэпам*) в осадочной толще. Примем во внимание порог разрешения ϵ в датировке слоев. Тогда на оси времени гэпы $\Delta\tau$ размера больше ϵ будут перемежаться с участками кажущегося строгого возрастания $d(\tau)$ (см. рисунок). Эти участки δ_ϵ назовем ϵ -кластерами; очевидно, в них отсутствуют гэпы размера больше ϵ .

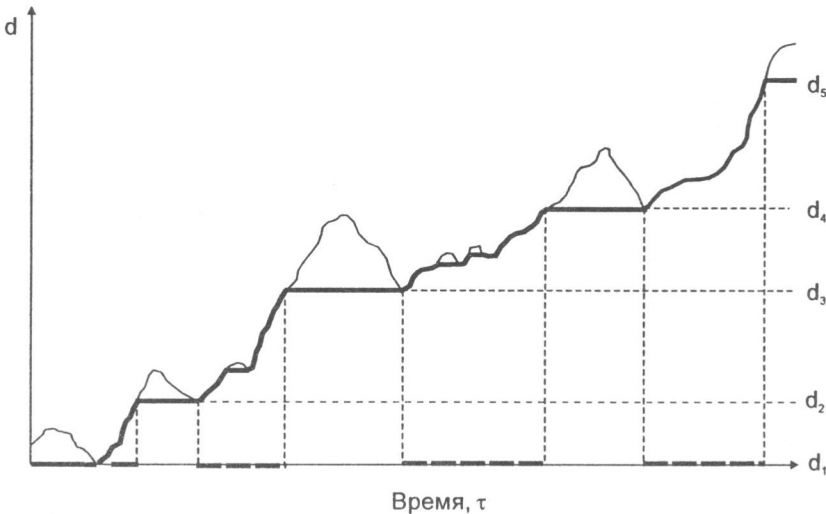


Схема геологического процесса осадконакопления

Жирная сплошная линия – высота осадочного слоя как функция возраста, $d(\tau)$; *тонкая сплошная линия* – высота осадочных слоев, исчезнувших под влиянием эрозии; $d_{i+1} - d_i$ – толщина слоя с кажущейся непрерывной датировкой при заданном разрешении возраста осадков ϵ ; эти слои образуют на оси времени ϵ -кластеры (*жирный пунктир*)

Предположим, что динамику рельефа $\xi(t)$ можно описать соотношением

$$\delta\xi(t) = b\delta t + \delta w(t),$$

где $b > 0$ – средняя скорость осадконакопления, а $\delta w(t)/\delta t$ – случайная составляющая скорости. Отрицательные значения $\delta\xi$ ответственны за процесс эрозии.

Потребуем, чтобы статистические свойства случайной составляющей скорости были автомодельны и стационарны, т.е. для любых постоянных $\Lambda > 0$ и c :

$$\delta w(\Lambda t + c) \stackrel{\mathcal{P}}{=} \Lambda^H \delta w(t),$$

где $\stackrel{\mathcal{P}}{=}$ означает тождество вероятностных законов для случайных функций, участвующих в равенстве. Предполагая гауссовость приращений δw , случайный процесс $w(t)$, нормированный условиями $w(0) = 0$, $Ew(1) = 1$, однозначно задается структурной функцией

$$E|w_\gamma(t) - w_\gamma(s)|^2 = |t - s|^\gamma, \quad \gamma = 2H.$$

Процесс этого типа $w_\gamma(t)$ известен как дробное броуновское движение (FBM) индекса $\gamma \in (0, 2)$. Его траектории непрерывны, что обеспечивает непрерывность $d(\tau)$. Случай $\gamma = 1$ соответствует броуновскому движению или процессу Винера. Применительно к модели осадконакопления наиболее интересен случай $\gamma = 0.5$ [1].

Известно, что w_γ растет медленнее, чем $t^{\gamma/2+\varepsilon}$ при любом $\varepsilon > 0$, точнее, с вероятностью 1

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup w_\gamma(t) t^{-\gamma/2} |\ln \ln t|^{-1/2} = \sqrt{2}, \quad (1)$$

(см., например, [2]). Поэтому $\xi(t) = bt + w_\gamma(t) = bt(1 + o(1))$ и, следовательно, функция $\tau(d) = \sup\{t : \xi(t) \leq d\}$ конечна почти наверное для любого конечного d . Тем самым объекты $d(\tau)$ и $\tau(d)$ в случае $w_\gamma(t)$ хорошо определены на полуоси R_1^+ . При всех $\gamma \in (0, 2)$ функция $d(\tau)$ имеет вид канторовой (или "чертовой") лестницы. Это значит, что она почти всюду не растет, $d'(t) = 0$, а ее точки роста образуют самоподобное фрактальное множество. Если ввести порог разрешения ε на оси t , тогда точки роста разобьются на ε -кластеры, введенные выше. Расстояние любой точки кластерного интервала δ_ε до ближайшей точки роста всегда меньше ε .

С точки зрения приложений представляют интерес следующие вопросы:

- 1) как оценить параметр b по данным (d, τ) ,
- 2) каково распределение гэпов по размерам,
- 3) если d_ε есть толщина слоя, отвечающего ε -кластеру δ_ε (приращение $d(\tau)$ на интервале δ_ε), то каково распределение d_ε по размерам. В наблюдениях оно экспоненциально.

С математической точки зрения интересно также

- 4) описать фрактальную структуру носителя $d(\tau)$, т.е. размерность точек роста $d(\tau)$ и/или мультифрактальный спектр меры $d(\tau)$ (мы отождествляем $d(\tau)$ с мерой, которая порождается приращениями $d(\tau)$ на интервалах).

К настоящему времени на все вопросы можно дать полный ответ лишь в марковском случае ($\gamma = 1$). Вопросы 1-3 решаются с помощью хорошо продвинутой теории процессов Леви (см., например, [3]), а вопрос о мультифрактальности следует из работ [4, 5]. Общий случай $\gamma \in (0, 2)$ значительно сложнее. Для него ниже рассмотрим вопросы 1) и 2). В частности, распределение гэпов по размерам находится в области больших значений $|\Delta\tau|$.

Статья организована следующим образом. Раздел 1 содержит решение вопросов 1-4 для марковского случая, $\gamma = 1$. В разделе 2 формулируются и обсуждаются результаты для общего случая, $\gamma \in (0, 2)$. Раздел 3 содержит доказательства основных утверждений из разд. 2.

1. МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ, $\gamma = 1$

Пусть $\xi(t) = w(t) + bt$, $t \geq 0$, где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс. Известно, что $\xi(t)$ обладает независимыми приращениями, причем процесс $\xi(t + \tau) - \xi(\tau)$, $t > 0$ эквивалентен исходному. Последнее свойство сохраняется, если момент τ является случайным, зависящим от траектории до момента τ . Пусть $\mathcal{P}(d\xi)$ – мера на пространстве реализаций ξ , связанная со случайным процессом $\xi(t)$. Наряду с $\mathcal{P}(d\xi)$ практически важна и другая мера $\mathcal{P}^\uparrow(d\xi)$, связанная с процессом $\tilde{\xi}(t) = \xi(t + \tau) - \xi(\tau)$, $t > 0$, где τ – время последнего прохождения процессом $\xi(t)$ некоторого уровня d_0 , т.е. $\tilde{\xi}(t) > 0$ для всех $t > 0$. Условная мера $\mathcal{P}^\uparrow(d\xi)$ может быть корректно определена через $\mathcal{P}(d\xi)$ и условие $\{\xi(t) > 0, t > 0\}$ (см. [3]). Мера \mathcal{P}^\uparrow естественно связана со статическим анализом осадочной толщи, когда за начало отсчета выбирается некоторый осадочный слой, например, самый нижний.

Следующее утверждение можно найти в [3]:

относительно меры \mathcal{P}^\uparrow процесс $\tau(d) = \sup\{t : \xi(t) \leq d\}$ является процессом с однородными независимыми приращениями, распределение которых определяется преобразованием Лапласа

$$E \exp\{-\theta(\tau(D+x) - \tau(x))\} = \exp\{-D(\sqrt{2\theta + b^2} - b)\}. \quad (2)$$

Иначе говоря,

$$\tau(d) = \int_0^d \int_0^\infty t \pi(dh, dt), \quad (3)$$

где π – пуассоновская мера событий $(h, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ с интенсивностью

$$\frac{E\pi(dh, dt)}{dh dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{-3/2} \exp\left(-\frac{b^2 t}{2}\right) := \lambda_b(t). \quad (4)$$

Более грубо, (3) означает, что

$$\tau(d) = \sum_{0 < h_i < d} t_i,$$

где (h_i, t_i) пуассоновское поле точек с мерой интенсивности (4). Первая координата отвечает глубине i -го осадочного слоя, а t_i – размеру временного гэпа между последовательными осадочными слоями i и $i + 1$.

Из представления (3), (4) вытекают важные следствия.

Следствие 1. Распределение гэпов по размерам.

Среднее число временных гэпов $\Delta\tau > t$ в осадочной толще размера D есть

$$N(\Delta\tau > t) = D\Lambda_t,$$

где $\Lambda_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty \exp(-b^2 x/2) x^{-3/2} dx.$

Доказательство. В силу (3), (4)

$$N(\Delta\tau > t) = E \int_0^D \int_t^\infty \pi(dh, dt) = D \int_t^\infty \lambda_b(t) dt.$$

Следствие 2. Распределение d_ϵ по размерам.

Приращение $d(t)$ на ϵ -кластере имеет экспоненциальное распределение с параметром Λ_ϵ

$$P(d_\epsilon > D) = \exp(-\Lambda_\epsilon D).$$

Доказательство. $P(d_\epsilon > D) = P(n_\epsilon(D) = 0)$, где $n_\epsilon(D)$ есть число событий $\{h_i, t_i\}$ с $t_i > \epsilon$ и $h_i < D$. В силу (3) $n_\epsilon(D) = \int_0^D \int_\epsilon^\infty \pi(dh, dt)$, т.е. $n_\epsilon(D)$ имеет пуассоновское распределение с параметром $D\Lambda_\epsilon$. Поэтому $P(n_\epsilon(D) = 0) = \exp(-\Lambda_\epsilon D)$.

Следствие 3. Мультифрактальность точек роста $d(\tau)$.

Множество точек роста $d(\tau)$ имеет хаусдорфову размерность $1/2$ с вероятностью 1. О мультифрактальности этого множества свидетельствует асимптотика числа ϵ -кластеров из интервала $(0, T)$, имеющих размер порядка ϵ^α ($\epsilon \rightarrow 0$):

$$\#\{\delta_\epsilon \in (0, T) : \epsilon^\alpha / |\ln \epsilon| < |\delta_\epsilon| < \epsilon^\alpha\} \sim \epsilon^{-f(\alpha)}, \tag{5}$$

где $\epsilon = 2^{-n} \rightarrow 0$ и $f(\alpha) = 1 - \alpha/2$, $\alpha \in [1, 2]$, а символ $a \sim b$ означает, что $P(0 < \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} a/b \leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} a/b < \infty) = 1$.

Следствие 4. Мультифрактальность меры $d(\tau)$.

Пусть d_ϵ – приращение $d(\tau)$ на ϵ -кластере δ_ϵ . Тогда

$$\#\{\delta_\epsilon \in (0, T) : |\delta_\epsilon|^\alpha / |\ln \epsilon| < d_\epsilon < |\delta_\epsilon|^\alpha\} \sim \epsilon^{-f^*(\alpha)}, \tag{6}$$

с вероятностью 1, когда $\epsilon = 2^{-n} \rightarrow 0$, $n = 1, 2, \dots$

Здесь

$$f^*(\alpha) = 3/2 - 2\alpha, \quad \alpha \in [1/2, 3/4].$$

В обоих утверждениях (следствия 3, 4) $f(\alpha)$ и $f^*(\alpha)$ являются хаусдорфовыми размерностями для точек роста $d(\tau)$, в которых $|\delta_\epsilon| \sim \epsilon^\alpha$ и $d_\epsilon \sim |\delta_\epsilon|^\alpha$ соответственно. Подробнее см. [4, 5].

Доказательство. Следствия 3 и 4 доказаны в [4] для процессов $d(\tau)$, обратных (3), (4) с $b = 0$. В этом случае функция $d(\tau)$ растет только в нулях винеровского процесса и служит для него мерой локального времени [3]. Классический результат Леви говорит, что хаусдорфова размерность нулей винеровского процесса равна $1/2$ с вероятностью 1.

Заметим теперь, что меры, отвечающие процессам (3), (4) с разными b , абсолютно непрерывны относительно друг друга на любом конечном интервале, поскольку соответствующие процессам $\tau(d)$, $0 < d < D$ спектральные меры скачков (4) удовлетворяют условию Какутани: $\int_0^\infty (\sqrt{\lambda_{b_1}(t)} - \sqrt{\lambda_{b_2}(t)})^2 dt < \infty$ (см., например, [6]). Отсюда следует абсолютная непрерывность мер, отвечающих процессам

$\{d(\tau), 0 < \tau < 1\}$ или, что то же, процессам $\tau(d)$, остановленных в случайный момент $d = d^*$ первого достижения уровня $\tau = 1$. Согласно [6], для этого достаточно показать, что

$$P(d^* = \infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} P(d > x) = \lim_{x \rightarrow \infty} P(\tau(x) < 1) = 0,$$

что очевидно следует из (2).

Поэтому все высказывания (события), имеющие вероятность 0 или 1 для процесса $d(\tau)$ с $b = 0$, автоматически имеют ту же вероятность и для процесса $d(\tau)$ с $b \neq 0$. Утверждения о мультифрактальности $d(\tau)$ относятся к утверждениям типа "0-1", что доказывает следствия 3, 4.

Следствие 5. Оценки параметра $\beta = b^{-1}$.

Пусть $\hat{\beta}_{LH}$ – оценка максимального правдоподобия параметра $\beta = b^{-1}$ по данным $\{\tau(d), d \in (0, D)\}$. Тогда она имеет вид

$$\hat{\beta}_{LH} = \tau(D)/D$$

и распределена согласно закону

$$P\{\hat{\beta}_{LH} \in dx\} = \sqrt{D/(2\pi x^3)} \exp(-\frac{D}{2x}(x/\beta - 1)^2) dx.$$

Оценка $\hat{\beta}_{LH}$ несмещенная, т.е. $E\hat{\beta}_{LH} = \beta$, а ее дисперсия $\sigma^2(\hat{\beta}_{LH}) = D^{-1}\beta^3$.

Модифицированной оценкой максимального правдоподобия для b служит $\hat{b}_{LH} = D/\tau(D) - D^{-1}$. Она является несмещенной и имеет дисперсию $b/D + 2D^{-2}$.

Пусть $\hat{\beta}_{WLH}$ – оценка наименьших квадратов с весом $W(h) = h^\alpha$, т.е. $\hat{\beta}_W$ реализует минимум функционала

$$\int_0^D [\tau(h) - \beta h]^2 W(h) dh \rightarrow \min_{\beta}.$$

Тогда

$$\hat{\beta}_{WLS} = \int_0^D \tau(h) W(h) h dh / \int_0^D W(h) h^2 dh.$$

Оценка $\hat{\beta}_{WLH}$ несмещенная, а ее эффективность относительно $\hat{\beta}_{LH}$, измеряемая отношением стандартных ошибок, есть

$$\sigma(\hat{\beta}_{LH})/\sigma(\hat{\beta}_{WLH}) = \sqrt{1 - (2\alpha + 6)^{-1}}.$$

Доказательство следствия 4 представляет легкое упражнение с пуассоновскими мерами. Распределение $\hat{\beta}_{LH}$ определено преобразованием Лапласа распределения $\tau(d)$ в (2). Это распределение находится явно, поскольку $\exp(-\rho\sqrt{2\theta})$ есть преобразование Лапласа распределения Леви: $f(x) = \rho \exp(-\rho^2/2x)(2\pi x^3)^{-1/2}$. Моменты $D\hat{\beta}_{LH}$ определяются производящей функцией (2), а моменты $1/\hat{\beta}_{LH}$ – производящей функцией $E \exp(-\theta/\hat{\beta}_{LH}) = (1 + 2\theta/D)^{-1/2} \exp(bD(1 - \sqrt{1 + 2\theta/D}))$.

Традиционный статистический анализ (см., например, [7]) показывает, что оценка $\hat{\beta}_{LH}$ асимптотически ($D \rightarrow \infty$) оптимальна, т.е. имеет наименьший разброс. Однако это не исключает практической ценности оценок $\hat{\beta}_{WLS}$, поскольку они менее чувствительны к загрязнению данных и, как видим, могут быть высокоэффективными. Например, эффективность $\hat{\beta}_{WLS}$ более 90% при всех $\alpha \geq 0$.

2. FBM-МОДЕЛЬ, $\gamma \in (0, 2)$

Пусть $\xi(t) = w_\gamma(t) + bt$, где $w_\gamma(t)$ является дробным броуновским движением. Суммируем результаты для функции $d(\tau)$ в этом случае.

Утверждение 2.1. Множество точек роста функции $d(\tau)$ имеет лебегову меру нуль для почти каждой траектории $\xi(t)$.

Таким образом, производная $d'(t)$ равна 0 почти всюду с вероятностью 1. Этот результат объясняет, почему в математической модели $d(\tau)$ потребовалось ввести ε -кластеры точек роста $d(\tau)$. В случае $\gamma = 1$ следствия 3, 4 существенно усиливают утверждение 2.1: множество точек роста $d(\tau)$ является фракталом размерности $1/2$, а $d(\tau)$ как мера является мультифракталом с линейным мультифрактальным спектром. Этот спектр, как оказалось, нельзя рассчитать в рамках традиционного подхода, основанного на моментной функции Реньи [5]. Практически мультифрактальные свойства $d(\tau)$ вряд ли наблюдаемы из-за конечности разрешения датировки слоев. Однако утверждения подобного рода подчеркивают сложность объектов типа $d(\tau)$.

Утверждение 2.2. Пусть $\Delta\tau$ – временной гэп функции $d(\tau)$ и P_T – условная вероятность $P(|\Delta\tau| > T) | a \in \Delta\tau$ при условии, что $\Delta\tau$ накрывает заданную точку a . Тогда при $T \gg 1$

$$c_\gamma^{-2} < \ln P_T^{-1} / (0.5b^2 T^{2-\gamma}) < \rho_\gamma^2 + \varepsilon,$$

где $\varepsilon = \varepsilon(T)$ – произвольно малое число, а c_γ^{-1} и ρ_γ определяются аналитически приведенными ниже формулами (11, 12) (см. разд. 3), либо таблицей

γ	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
c_γ^{-1}	.12	.20	.29	.38	.48	.59	.71	.84	.99
ρ_γ	1.73	1.88	1.95	1.99	2.00	2.00	2.00	2.04	2.29

В случае $\gamma = 1$ точный результат (следствие 1) дает $c_\gamma^{-1} = \rho_\gamma = 1$. Отметим однако, разницу в результатах утверждения 2.1 и следствия 1. Следствие 1 относится к статистике гэпов в ансамбле реализаций $d(\tau)$, которые начинаются в случайный момент времени τ , когда $\xi(\tau + t) - \xi(\tau) > 0$ для всех $t > 0$. В 2.2 реализации $d(\tau)$ начинаются в неслучайный момент $t = 0$ и рассматриваются гэпы, которые накрывают некоторую фиксированную точку "а". Однако роль указанных различий несущественна для асимптотики P_T , $T \rightarrow \infty$. Поэтому интервал $(c_\gamma^{-2}, \rho_\gamma^2)$ при $\gamma = 1$ свидетельствует о степени грубости утверждения 2.2.

Утверждение 2.3. Среднее $d(\tau)$ линейно по τ

$$Ed(\tau) = b\tau - m_\gamma b^{-\gamma/(2-\gamma)},$$

а его стандартное отклонение допускает оценку

$$s_\gamma \tau^{\gamma/2} < \sigma[d(\tau)] \leq \tau^{\gamma/2} + b^{-\gamma/(2-\gamma)} \sigma_\gamma.$$

Постоянная s_γ^2 определена ниже (см. формулу (10) в разд. 3) и таблицей

γ	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
s_γ	.80	.88	.94	.98	1.0	.98	.92	.81	.60

а $(m_\gamma, \sigma_\gamma^2)$ суть среднее и дисперсия случайной величины

$$\eta = \max_{x>0} (w_\gamma(x) - x).$$

В случае $\gamma = 1$ величина η экспоненциально распределена с параметром 2.

Представленные здесь оценки дисперсии $d(\tau)$ полезны в двух отношениях: для проверки согласия данных $\tau(d)$ с моделью и для оценивания дисперсии простейшей оценки параметра b вида

$$\hat{b} = d(T)/T.$$

При $bT^{1-\gamma/2} \gg 1$ оценка \hat{b} асимптотически несмещенная и имеет стандартное отклонение $\sigma(\hat{b})$ порядка $T^{\gamma/2-1}$:

$$s_\gamma/T^{1-\gamma/2} < \sigma(\hat{b}) \leq (1 + \varepsilon)/T^{1-\gamma/2},$$

где $\varepsilon = \varepsilon(T)$ произвольно мало.

Учитывая линейность тренда $d(\tau)$, можно дать целый класс несмещенных оценок типа наименьших квадратов с весом W

$$\hat{b}_{WLS} = \int_0^T d(t)(t - \bar{t})W(t)dt / \int_0^T (t - \bar{t})^2 W(t)dt,$$

где $\bar{t} = \int_0^T tW(t)dt / \int_0^T W(t)dt$.

Обратим внимание на кажущееся противоречие: $Ed(\tau) = b\tau + \text{const}$, тогда как $E^\uparrow \tau(d) = b^{-1}d$. Появление $\text{const} \neq 0$ обязано опять использованию разных ансамблей $d(\tau)$ и, соответственно, усреднениям по разным мерам \mathcal{P} и \mathcal{P}^\uparrow (см. выше).

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЙ

Доказательство утверждения 2.1

Из представления $d(\tau) = \inf_{t \geq \tau} (w_\gamma(t) + bt)$ и из непрерывности $w_\gamma(t)$ следует непрерывность $d(\tau)$. При этом $d(\tau) = \text{const}$ в некоторой правой окрестности τ , если только \inf в представлении $d(\tau)$ достигается в точке $t > \tau$. Поэтому τ есть точка роста $d(\tau)$, если только $\xi(\tau) < \xi(\tau + x)$, $x > 0$ или в терминах $w_\gamma(\tau)$

$$\frac{w_\gamma(\tau + x) - w_\gamma(\tau)}{x} > -b, \quad x > 0. \quad (7)$$

Пусть \mathcal{A} – множество особых точек τ , в которых выполнено (7) хотя бы локально, т.е. для $x \in (0, \varepsilon)$. Множество \mathcal{A} случайно, поэтому его удобнее рассматривать как подмножество $X = R^1 \times \Xi$, где Ξ – пространство реализаций w_γ . Сечение $\mathcal{A}(\xi)$ определяет особые точки для реализации ξ , а сечение $\mathcal{A}(\tau)$ определяет все реализации, для которых τ есть особая точка. Введем на X меру $\mathcal{L}(dt) \times \mathcal{P}(d\xi)$, где \mathcal{L} – мера Лебега, а \mathcal{P} – мера на траекториях, индуцированная процессом ξ . В силу (1) с вероятностью 1

$$\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{w_\gamma(t+x) - w_\gamma(t)}{x} = -\infty.$$

Это значит, что \mathcal{P} – мера множества $\mathcal{A}(\tau)$ для любого τ равна 0. Но тогда по теореме Фубини \mathcal{L} -мера множества $\mathcal{A}(\xi)$ тоже равна нулю для почти всех ξ .

Доказательство утверждения 2.2

Пусть $(\tau - \Delta, \tau)$ – максимальный интервал, содержащий точку a , в котором $d(t) = \text{const}$. Нас интересует событие $\mathcal{A} = \{\Delta > T > a\}$. Введем события

$$A_R = \left\{ \min_{(a, R+a)} \xi(t) > \min_{(R+a, \infty)} \xi(t) \right\},$$

тогда $A_T \subseteq A \subseteq A_{T-a}$ и поэтому

$$P(A_T) \leq P(A) \leq P(A_{T-a}), \quad (8)$$

т.е. задача сводится к оценке вероятности A_R , $R \gg 1$. Учитывая, что

$$w_\gamma(t) - w_\gamma(t_0) \stackrel{\mathcal{P}}{=} w_\gamma(t - t_0),$$

имеем

$$P(A_R) = P\left(\min_{(-R, 0)} \xi(t) > \min_{(0, \infty)} \xi(t) \right). \quad (9)$$

Оценка снизу. Загрубим оценку $P(\mathcal{A}) > P(A_T)$. Пусть $t_0 = a + T(1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ и

$$B = \{\xi(t) > \xi(t_0), t \in (a, \tau + a)\} = \{w_\gamma(t) - w_\gamma(t_0) > b(t_0 - t), t \in (a, \tau + a)\}.$$

Тогда $B \subset \mathcal{A}$ и $P(\mathcal{A}) > P(B)$. Учтем, что

$$w_\gamma(t) - w_\gamma(t_0) \stackrel{\mathcal{P}}{=} w_\gamma(t_0 - t) \stackrel{\mathcal{P}}{=} T^{\gamma/2} w_\gamma\left(\frac{t_0 - t}{T}\right).$$

Поэтому

$$B \stackrel{\mathcal{P}}{=} \{w_\gamma(\tau) > b\theta\tau, \tau \in (\varepsilon, 1 + \varepsilon)\}, \quad \text{где } \theta = T^{1-\gamma/2},$$

и поскольку

$$w_\gamma(\tau) \stackrel{\mathcal{P}}{=} w_\gamma(\tau - \varepsilon) - w_\gamma(-\varepsilon),$$

то

$$B \stackrel{P}{=} \{w_\gamma(\tau) - w_\gamma(-\varepsilon) \geq b\theta(\tau + \varepsilon), \tau \in (0, 1)\}.$$

Разложим $w_\gamma(-\varepsilon)$ в сумму независимых слагаемых $w_\perp + w_\wedge$, где $w_\wedge = E(w_\gamma(-\varepsilon) | w_\gamma(t), t \in (0, \infty))$, есть наилучший прогноз $w_\gamma(-\varepsilon)$ по данным $\{w_\gamma(\tau), \tau > 0\}$. Тогда w_\perp не зависит от $\{w_\wedge, w_\gamma(\tau), \tau \in (0, 1)\}$. Отсюда

$$\begin{aligned} P(B) &> P(w_\perp > \theta b(1 + \varepsilon) + \varphi_T, w_\wedge + w_\gamma(\tau) \geq -\varphi_T, \tau \in (0, 1)) = \\ &= \Psi\left(\frac{\theta b(1 + \varepsilon) + \varphi_T}{\sigma(\varepsilon)}\right) q_T. \end{aligned}$$

Здесь первый множитель есть $P(w_\perp > \theta b(1 + \varepsilon) + \varphi_T)$. Поэтому он определяется через гауссову функцию ошибок

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2/2} du \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} x^{-1}, \quad x \rightarrow \infty$$

и дисперсию w_\perp :

$$\sigma_\varepsilon^2 = Ew_\perp^2 = \varepsilon^\gamma s_\gamma^2,$$

где s_γ^2 — дисперсия ошибки наилучшего прогноза $w_\gamma(-1)$ по данным $\{w_\gamma(t), t \in (0, \infty)\}$. Согласно [8]

$$s_\gamma^2 = \Gamma\left(\frac{3-\gamma}{2}\right) / \left[\Gamma\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\Gamma(2-\gamma)\right]. \quad (10)$$

Второй сомножитель $q_T = P\{w_\wedge + w_\gamma(\tau) \geq -\varphi_T, \tau \in (0, 1)\} \rightarrow 1, T \rightarrow \infty$, если $\varphi_T \rightarrow \infty$.

В итоге получаем оценку:

$$P(\mathcal{A}) > C_T \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} T^{2-\gamma} b^2 \rho_{\gamma,T}^2\right) [T^{1-\gamma/2} b \rho_{\gamma,T}]^{-1},$$

где $C_T \sim 1, T \rightarrow \infty$ и $\rho_{\gamma,T} \sim (1 + \varepsilon)\varepsilon^{-\gamma/2}/s_\gamma = \rho_\gamma, T \rightarrow \infty$.

Минимизируем ρ_γ по ε . Тогда получим $\varepsilon = \gamma/(2 - \gamma)$ и

$$\rho_\gamma = \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)^{-(1-\gamma/2)} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{-\gamma/2} / s_\gamma. \quad (11)$$

Оценка сверху. Согласно (8), (9) при любом θ

$$\begin{aligned} P(\mathcal{A}) &\leq P\left(\min_{(a-T, 0)} (w_\gamma(t) + bt) > \min_{(0, \infty)} (w_\gamma(t) + bt)\right) \leq \\ &\leq P\left(\min_{(a-T, 0)} (w_\gamma(t) + bt) > -bT\theta\right) + P\left(\min_{(0, \infty)} (w_\gamma(t) + bt) < -bT\theta\right) = p_1 + p_2. \end{aligned}$$

Пусть $0 < \varepsilon < 1 - a/T$. Тогда

$$p_1 < P(w_\gamma(-\varepsilon T) - b\varepsilon T > -bT\theta) = \Psi(bT^{1-\gamma/2}(\theta - \varepsilon)\varepsilon^{-\gamma/2}).$$

Оценим p_2 :

$$\begin{aligned} p_2 &< \sum_{k=0}^{\infty} P(\min_{(0,T)} [w_\gamma(kT + \tau) + b\tau < -bT(k + \theta)]) \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} P(\max_{(0,T)} w_\gamma(Tk + \tau) > bT(k + \theta)). \end{aligned}$$

Воспользуемся оценкой Ферника [9] для распределения максимума гауссовского процесса. Применительно к w_γ имеем для всех $x \geq \sqrt{5}$

$$P(\max_{0,T} w_\gamma(Tk + \tau) > xT^{\gamma/2}[(k + 1)^{\gamma/2} + c_\gamma]) \leq 10 \int_x^\infty e^{-u^2/2} du,$$

где

$$c_\gamma = (2 + \sqrt{2}) \int_1^\infty 2^{-u^2\gamma/2} du. \quad (12)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} p_2 &< 10\sqrt{2\pi} \sum_{k \geq 0} \Psi(bT^{1-\gamma/2}(k + \theta)[(k + 1)^{\gamma/2} + c_\gamma]^{-1}) < \\ &< 10\sqrt{2\pi} \sum_{k \geq 0} \Psi(bT^{1-\gamma/2} \frac{(k + \theta)(k + 1)^{-\gamma/2}}{1 + c_\gamma}). \end{aligned}$$

При $T \rightarrow \infty$ сумма имеет тот же порядок малости, что и первое слагаемое в ней, т.е.

$$p_2 \leq 10\sqrt{2\pi} \Psi(bT^{1-\gamma/2} \frac{\theta}{1 + c_\gamma})(1 + o(1)), \quad T \rightarrow \infty.$$

Чтобы выровнять порядки малости p_1 и p_2 , положим

$$(\theta - \varepsilon)\varepsilon^{-\gamma/2} = \theta/(1 + c_\gamma)$$

и потребуем, чтобы это выражение было максимальным по $\varepsilon \in (1, 1 - a/T)$. Получим

$$\frac{\theta}{1 + c_\gamma} = \frac{\varepsilon}{1 + c_\gamma - \varepsilon^{\gamma/2}} \Big|_{\varepsilon=1-\frac{a}{T}} = \frac{1}{c_\gamma} (1 - O(\frac{a}{T})).$$

Следовательно,

$$P(A) \leq C \Psi(bT^{1-\gamma/2} \frac{1 - \varepsilon_T}{c_\gamma}),$$

где $\varepsilon_T \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$.

Доказательство утверждения 2.3

Найдем среднее и оценим дисперсию $d(\tau) = \min_{t>\tau}(w_\gamma(t) + bt)$. Имеем:

$$\begin{aligned} d(\tau) &= w_\gamma(\tau) + b\tau + \min_{t>\tau}[w_\gamma(t) - w_\gamma(\tau) + b(t - \tau)] = \\ &\stackrel{P}{=} w_\gamma(-\tau) + b\tau + \min_{t>0}[w_\gamma(t) + bt]. \end{aligned}$$

Подставим сюда $w_\gamma(t) \stackrel{P}{=} w_\gamma(t\lambda)\lambda^{-\gamma/2}$ с $\lambda = b^{1/(1-\gamma/2)}$. Получим:

$$d(\tau) \stackrel{P}{=} (w_\gamma(-\tau\lambda) + \min_{t>0}[w_\gamma(t\lambda) + t\lambda])b^{-\gamma/(2-\gamma)} + b\tau. \quad (13)$$

Отсюда $Ed(\tau) = b\tau + m_\gamma b^{-\gamma/(2-\gamma)}$, где $m_\gamma = E\eta$ и $\eta = \min_{x>0}[w_\gamma(x) + x]$.

Из (13) получаем оценку для стандартного отклонения $d(\tau)$:

$$\sigma(d(\tau)) < [\sigma(w(-\tau\lambda)) + \sigma(\eta)]b^{-\gamma/(2-\gamma)} = \tau^{\gamma/2} + \sigma(\eta)b^{-\gamma/(2-\gamma)}.$$

Чтобы получить оценку $\sigma(d(\tau))$ снизу, разложим, как и ранее, $w(-\tau\lambda)$ в сумму $w_\perp(-\tau\lambda) + w_\lambda(-\tau\lambda)$, где w_\perp - ошибка прогноза $w_\gamma(-\tau\lambda)$ по данным $\{w_\gamma(t), t > 0\}$. Поэтому

$$\sigma^2(d(\tau)) \geq Ew_\perp^2(-\tau\lambda)b^{-2\gamma/(2-\gamma)} = (\tau\lambda)^\gamma s_\gamma^2 b^{-2\gamma/(2-\gamma)} = \tau^\gamma s_\gamma^2,$$

где s_γ^2 определено в (10).

Доказательство экспоненциальности распределения η при $\gamma = 1$ можно найти в [3].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Реальная статистика осадочных отложений демонстрирует следующие характерные особенности: прерывистость возраста осадков (временные гэпы) и ее проявление на всех временных масштабах; расчетные значения скорости осадконакопления степенным образом зависят от масштаба (фрактальность) и, наконец, стохастичность процесса отложений. Все эти свойства представлены в рассмотренной модели, которая исходит из афинной инвариантности случайной составляющей скорости осадков.

Уникальность рассмотренной модели состоит в том, что для нее (в марковском случае) удастся явно описать процесс формирования осадков $t(d)$ в виде скачкообразного процесса с независимыми приращениями. В нем большие гэпы $\Delta\tau$ и мощности непрерывных слоев d_ϵ (при любом разрешении в датировке) распределены по размерам экспоненциально. В свою очередь малые гэпы распределены степенным образом с отрицательным показателем.

Наряду с фрактальностью в марковской модели удастся полностью исследовать мультифрактальность $d(\tau)$. Таких стохастических примеров крайне мало, а в рассматриваемой проблематике наш пример, по-видимому, пока единственный. В отличие от распределений Δ и d_ϵ , сосчитанные мультифрактальные статистики

(5), (6), говорят о том, что сгущения возрастов осадочных слоев не одинаковы и центры сходных по типу сгущений имеют разную фрактальную размерность. То же самое относится к моментам времени, в которых по-разному произошло наращивание осадков, например, по типу $\delta d(\tau) \sim (\delta\tau)^\alpha$. С математической точки зрения, эти вопросы очень тонкие, где интуиция не всегда помогает. Например, в марковском случае естественная гипотеза состоит в том, что $d(\tau)$ есть монофрактал, т.е. во всех точках роста $\delta d(\tau) \sim (\delta\tau)^\alpha$ с $\alpha = 1/2$. Оказывается однако, что для α имеется целый спектр значений, которые реализуются на разных фрактальных множествах. К тому же размерности этих множеств не поддаются корректному анализу с помощью обобщенных размерностей или функции Реньи.

Мультифрактальный анализ осадков на практике сильно ограничен объемом и разрешением данных. Поэтому указанные теоретические результаты представляются важными. Они подчеркивают, в частности, сложность проблемы оценивания скорости осадконакопления.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 96-61-0037).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Turcotte D.* Fractals and chaos in geology and geophysics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992. 398 p.
2. *Orey S.* Growth rates of gaussian processes with stationary increments // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1971. Vol.77. P.609-612.
3. *Bertoin J.* Lévy processes. (Cambridge tracts in mathematics, N.121). Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996. 265 p.
4. *Molchan G.M.* Multifractal analysis of brownian zero set // *J. Stat. Phys.* 1995. Vol.79, N 3/4. P.701-730.
5. *Molchan G.M.* Anomalies in multifractal formalism for local time of brownian motion // *J. Stat. Phys.* 1998. Vol.91, N 1/2. P.199-220.
6. *Jacod J., Shiryaev A.N.* Limit theorems for stochastic processes. Springer-Verlag: Berlin, London, N.-Y. 1987. 820 p.
7. *Cox D.R., Hinkley D.V.* Theoretical statistics, Chapman and Hall. 1974. 560 p.
8. *Molchan G.M.* Burgers equation with self-similar gaussian initial data: tail probabilities // *J. Stat. Phys.* 1997. Vol.88, N 5/6. P.1139-1150.
9. *Fernique X.* Regularite des trajectoires des fonctions aleatoires gaussiennes. Lectures Notes in Mathematics. N 480. 1975. 120 p.