II. ПРЯМЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

УДК 550.310:517.984 54

ОБ УСЛОВИЯХ ПОНИЖЕНИЯ ПОРЯДКА СИСТЕМЫ РЭЛЕЯ. I. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

А.Н. Кузнецов

Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук

Система Рэлея (вместе с уравнением Лява) определяется как результат разделения переменных в уравнениях линейной упругости в слоистой среде одного из трех типов: плоско, сферически или цилиндрически слоистой. Ее составляют два обыкновенных уравнения второго порядка, в которые частота и волновое число входят как параметры. В статье исследуется вопрос о возможности упрощения этой системы с помощью матричных преобразований, не зависящих от волнового числа. Найдены условия, позволяющие свести систему к двум системам второго порядка. Любая система Рэлея может быть задана матрицей с нулевым следом. При фиксированной частоте и переменной глубине три коэффициента этой матрицы описывают кривую в трехмерном пространстве. Равенство нулю кручения кривой эквивалентно условию упрощения системы. Этот факт позволяет явно выразить это условие через параметры среды и в компактной форме. Условие, зависящее от частоты, выражается одним дифференциальным соотношением, а не зависящее – двумя.

ON LOWERING THE ORDER OF THE RAYLEIGH SYSTEM. I. GENERAL THEORY

A.N. Kuznetsov

International Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences

The Rayleigh system, together with the Love equation, results from separation of variables in equations of linear elastodynamics in media of three kinds: flat, spherically, or cylindrically layered. This system consists of two second-order ordinary differential equations where frequency and wavenumber enter as parameters. This work investigates possibilities to simplify the Rayleigh sistem through matrix transformations independent of wavenumber. The reduction of the Rayleigh system to two second-order systems (simplification) is possible under conditions found in this paper. Any Rayleigh system is specified by a 2×2 matrix with zero trace. Three elements of this matrix describe a curve in a three-dimensional space when depth varies and the frequency is fixed. Zero curve torsion is equivalent to the simplification condition. This fact permits to express the simplification condition explicitlly and in a compact form. The condition which depends on frequency is expressed as one differential relation; the condition independent of frequency takes the form of two differential relationships.

ВВЕДЕНИЕ

Задача заключается в том, чтобы свести систему обыкновенных уравнений четвертого порядка с двумя параметрами к двум уравнениям второго порядка. Система состоит из преобразованных методами разделения переменных уравнений упругости, а параметрами в ней являются частота и волновое число. Этой системе, для краткости будем называть ее системой Рэлея, удовлетворяет образ P-SV-компоненты малых сейсмических колебаний плоско или сферически слоистой модели Земли. На базе именно такого типа моделей производится в настоящее время исследование сейсмических волн в Земле. Исследователи изобрели множество методов и подходов ([1–7]), цель которых – предложить методику решения прямых или обратных задач зачастую для некоторого класса сред далеко не самого общего вида, например, для кусочно однородных сред, сред Пикериса и т.п. Система Рэлея является в этих работах одной из главных проблем.

В работе [8] показано, что упрощение системы Рэлея возможно, если параметры среды удовлетворяют двум дифференциальным уравнениям. Этот результат явился обобщением предшествующих результатов и нескольких конкретных примеров упрощения. Впрочем, главным своим результатом Янг считал асимптотическое упрощение: он выделил в системе Рэлея ведущую при больших частотах часть, которая распалась на независимые подсистемы. Мы решили не использовать термин "расщепление", адэкватный употребляемому в [8–10] и др. термину "decoupling", поскольку ни в этих работах, ни у нас, строго говоря, расщепления не происходит, а имеется только триангуляция.

В общем виде проблема упрощения может быть сформулирована следующим образом. Требуется найти условия, подчинение которым параметров среды позволяет свести систему Рэлея с помощью линейных преобразований некоторого типа к системам второго порядка. Чтобы преобразование системы было более простой процедурой, чем ее решение, очевидно, требуется либо независимость преобразования от одного из параметров, либо простая зависимость от него (например, полиномиальная). Действительно, преобразование, зависящее от обоих параметров, найти легко – это фундаментальное решение; зная его, для нахождения любого решения достаточно задать константы. Линейность важна потому, что логарифмическим преобразованием система Рэлея, представленная в матричной форме Штурма–Лиувилля, сводится к нелинейной системе второго порядка, однако не ясно, является ли последняя проще исходной системы. Линейно упрощенная система логарифмическим преобразованием сводится к уравнениям первого порядка, последовательное решение которых требует значительно меньших вычислительных затрат, нежели прямое решение системы Рэлея. Попытки понижения порядка системы Рэлея до третьего нам не известны; вероятно, она так устроена, что либо вообще не упрощается, либо порядок понижается сразу на две единицы.

В одном из результатов работы [11] уже содержится возможность высокочастотного упрощения и это позволяет немедленно получить некоторые условия точного упрощения. Этот результат является простым следствием главного результата [11] – обнаружения возможности явного частичного разложения на множители оператора системы Рэлея. В настоящей статье дано решение проблемы упрощения в классе матричных преобразований системы Рэлея, не зависящих от волнового числа.

Результат состоит в том, что система Рэлея, записанная в матричной форме Штурма–Лиувилля (см. [11]) и имеющая четвертый порядок, сводится к двум линейным системам второго порядка в том и только в том случае, когда параметры среды удовлетворяют одному дифференциальному уравнению, зависящему от частоты. Преобразование не зависит от волнового числа. Не зависящее от частоты условие упрощения выражается двумя дифференциальными уравнениями.

Загадочным образом условие упрощения оказалось эквивалентно равенству нулю кручения кривой, которую описывают три коэффициента матрицы, определяющей систему Рэлея при заданной частоте (согласно [11]). (След этой матрицы равен нулю, поэтому речь идет о трех коэффициентах.) Этот факт дал возможность, пользуясь исчислением обобщенных кватернионов, выразить условие упрощения в компактной и в то же время явно выраженной через параметры среды форме. Обсуждение результатов производится в заключении.

Явные решения систем уравнений, выражающих условия понижения порядка при всех частотах, изучаются в работе [12]. Сравниваются условия упрощения Янга с нашими, рассматриваются примеры.

1. СВОДКА НЕОБХОДИМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассматривается одна из двух изотропных и идеально упругих сред: шар, в котором параметры Ламе λ, μ и плотность ρ зависят только от радиуса, либо полупространство, где эти величины зависят только от глубины. Малые колебания этих сред подчиняются линейным уравнениям упругости [1]

$$\rho\ddot{v}_i = (\lambda v_{k,k})_{,i} + (\mu v_{i,j})_{,j} + (\mu v_{j,i})_{,j}, \tag{1}$$

где v_i, $i = 1,2,3$ – компоненты вектора смещения; подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Какие-либо условия на границе или поля внешних сил не рассматриваются.

Метод разделения переменных [1, 2, 7] – это в данном случае представление общего решения (1) в виде

$$v_j = \int e^{i\omega t} w_{jk}(y,\zeta,\xi) u_{kl}(x,\omega,\xi) c_l(\zeta)\, d\omega d\zeta d\xi.$$

Здесь j, k, $l \in (1,2,3)$, x и y – разделившиеся компоненты сферических или цилиндрических координат, столбцы матрицы u_{kl} являются преобразованным смещением – это новое неизвестное, функции w_{jk} в плоском случае выражаются через функции Бесселя, в сферическом – через полиномы Лежандра. Волновые числа ζ и ξ могут пробегать дискретное множество значений и тогда соответствующий интеграл заменяется рядом, $c_l(\zeta)$ – произвольные постоянные, значения которых определяются граничными и начальными условиями и вариацией которых решается система (1) в неоднородном случае. Важным моментом здесь является независимость матрицы u от ζ (см. [2, 7]). Компоненты u_i любого столбца этой матрицы удовлетворяют системе обыкновенных уравнений (ей следовало бы присвоить имя сейсмологической системы, поскольку именно она является базой подавляющего большинства моделей распространения сейсмических волн в Земле), в которой третья компонента, отделившись от первых двух, удовлетворяет уравнению Лява, а первые две $u = (u_1, u_2)$ – системе Рэлея, которая имеет вид (см. [1, 7, 13])

$$\mathbf{P}_0(u) = 0, \quad \text{где } \mathbf{P}_0 = \partial(\mathbf{B}\partial + \mathbf{C}) - \mathbf{C}^T\partial + \mathbf{E}, \tag{2}$$

где $\partial = \dfrac{d}{dx}$; произведения всюду понимаются как композиции операторов, т.е. $\partial\mathbf{A} = \mathbf{A}\partial + \mathbf{A}'$, $(\ )' \equiv \dfrac{d(\ )}{dx}$, $\mathbf{E}^T = \mathbf{E}$, T – операция транспонирования.

В плоско слоистом случае $\mathbf{B} = diag(\nu, \mu)$, $\mathbf{C} = \xi \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\mu & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E} = diag(\omega^2\rho - \xi^2\mu,$ $\omega^2\rho - \xi^2\nu)$, где $\nu = \lambda + 2\mu$.

Сформулируем необходимые результаты [7, 11]. Конкретный вид матриц приводится только для ситуции слоистого полупространства, но результаты сохраняются и в случаях слоистого шара или цилиндра.

Введем обозначение для преобразования подобия матричного оператора $\mathbf{L}$ с помощью обратимого матричного оператора $\mathbf{M}$: $\mathrm{Int}_{\mathbf{M}}(\mathbf{L}) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{M}$. Очевидно, что $\mathrm{Int}_{\mathbf{MN}}(\mathbf{L}) = \mathrm{Int}_{\mathbf{N}}(\mathrm{Int}_{\mathbf{M}}(\mathbf{L}))$.

Пусть $\mathbf{P} = \mathrm{Int}_{\mathbf{M}_1}\left(\mathbf{M}_2^{-1}\mathrm{Int}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{P}_0)\right)$, где в плоском случае $\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} \varkappa\mu^{-1} & 0 \\ 0 & \mu\nu^{-1} \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ -2\mu' & \nu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\xi & 0 \\ \partial & 1 \end{pmatrix},$$

где $\varkappa$ – произвольная постоянная.

Тогда получим главную форму представления оператора Рэлея (2) в матричной форме Штурма–Лиувилля

$$\mathbf{P} = (\partial - \mathbf{L} + \mathbf{K})(\partial - \mathbf{L} - \mathbf{K}) - \xi^2. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ – двумерные матрицы, явно выражающиеся через параметры среды, след матрицы $\mathbf{K}$ равен нулю (т.е. $\mathrm{sp}(\mathbf{K}) = \mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{22} = 0$), главная диагональ матрицы $\mathbf{L}$ нулевая. Конкретный вид их в плоском случае:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mu' & -\frac{1}{2}\varkappa^{-1}\mu\nu^{-1}(\lambda + 3\mu) \\ \varkappa(\mu^{-2}\omega^2\rho + (\mu^{-1})'') & -\mu^{-1}\mu' \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\varkappa^{-1}\mu\nu^{-1}(\lambda + \mu) \\ -\varkappa(\mu^{-1})'' & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $\varkappa$ – та же постоянная.

Преобразованием $\mathbf{P}_1 = \mathrm{Int}_{\mathbf{G}}(\mathbf{P})$, где матрица $\mathbf{G}$ является каким-нибудь решением уравнения

$$\mathbf{G}' = \mathbf{L}\,\mathbf{G}, \tag{6}$$

уравнение (3) приводится к виду

$$\mathbf{P}_1 = (\partial + \mathbf{V})(\partial - \mathbf{V}) - \xi^2, \tag{7}$$

где $\mathbf{V} = \mathrm{Int}_{\mathbf{G}}(\mathbf{K})$, $\mathrm{sp}\mathbf{V} = 0$. Матрицы $\mathbf{G}$ и $\mathbf{V}$ через параметры среды явно не выражаются.

От матрицы $\mathbf{K}$ можно отделить слагаемое, зависящее от частоты ω:

$$\mathbf{K}(x,\omega) = \mathbf{K}_0(x) + \omega^2 k(x)\mathbf{N},$$

где $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ – стандартная нильпотентная матрица, а $k(x)$ в плоском случае, очевидно, равно $\varkappa\mu^{-2}\rho$.

Преобразованием $\mathbf{P}_2 = \mathrm{Int}_{\mathbf{M}_3}(\mathbf{P})$, где $\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a^{-1} \end{pmatrix}$, $a = k^{-1/2}$, $c = a'/\mathbf{L}_{12}$, равенство (3) приводится к виду

$$\mathbf{P}_2 = (\partial - \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{K}} + \omega^2\mathbf{N})(\partial - \hat{\mathbf{L}} - \hat{\mathbf{K}} - \omega^2\mathbf{N}) - \xi^2, \tag{8}$$

при этом снова след матрицы $\hat{\mathbf{K}}$ равен нулю, и главная диагональ матрицы $\hat{\mathbf{L}}$ нулевая.

Если здесь члены с ω^2 вынести за скобки, то оператор $\mathbf{P}_2$ примет вид

$$\mathbf{P}_2 = (\partial - \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{K}})(\partial - \hat{\mathbf{L}} - \hat{\mathbf{K}}) + \omega^2\mathbf{F} - \xi^2, \tag{9}$$

где матрица $\mathbf{F}$ диагональна и в плоском случае $\mathbf{F}_{11} = \mu^{-1}\rho$, $\mathbf{F}_{22} = \nu^{-1}\rho$.

2. ТРИАНГУЛЯЦИЯ И РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ

Система уравнений $\mathbf{P}(u) = 0$ (или $\mathbf{P}_1(u) = 0$) имеет четвертый порядок. Задача упрощения для нее состоит в том, чтобы свести ее к двум независимым системам второго порядка посредством не зависящего от ξ преобразования.

Триангуляцией системы $\mathbf{P}(u) = 0$ называется преобразование, в результате которого от нее отделяется одно или два уравнения первого порядка. Можно показать, что задачи триангуляции и разложения оператора (3) на операторные множители являются, по существу, эквивалентными. Результаты этого раздела доставляют некоторые достаточные условия триангуляции и разложения на множители операторов вида (3), (7) и (8). Эти условия являются также необходимыми, если ограничиться классом преобразований чуть более широким, чем матричные. Точным определением этого класса мы решили не загромождать работу.

Примем следующие соглашения. Матрицы и операторы будем обозначать заглавными буквами, их элементы – соответствующими строчными или индексом за скобками, причем нумерация элементов матрицы такова:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \qquad (\mathbf{A})_i = a_i, \;\; i = 1, \ldots, 4.$$

Индексы 1, 2, 3, 4 при строчных буквах резервируются для элементов матриц, для обозначения переменных с индексом используются цифры, начиная с 5.

В последующих предложениях первой части работы будут использоваться формы представления оператора Рэлея (3), (7), (8), (9), но конкретный вид входящих в них матриц (4), (5) не будет важен, а условия, которым эти матрицы подчинены, будут указываться в формулировке каждого предложения.

Лемма 1. Оператор $\mathbf{P}$ *из* (3), *в котором* $\mathrm{sp}(\mathbf{K}) = 0$, *имеет нулевой второй элемент, т.е.* $(\mathbf{P})_2 = 0$ *тогда и только тогда, когда*

$$l_2 = 0 \quad \text{и} \quad (l_4 - l_1)k_2 + k_2' = 0. \tag{10}$$

Доказательство. Раскрывая скобки в (3), получим:

$$\mathbf{P} = \partial^2 - 2\mathbf{L}\partial - \mathbf{L}' - \mathbf{K}' + \mathbf{L}^2 - \mathbf{K}^2 + [\mathbf{L}, \mathbf{K}],$$

где $[\mathbf{L}, \mathbf{K}] = \mathbf{LK} - \mathbf{KL}$.

Так как $(-2\mathbf{L})_2 = -2l_2$, то $l_2 = 0$. Тогда $([\mathbf{L}, \mathbf{K}])_2 = l_1k_2 + l_2k_4 - k_1l_2 - k_2l_4 = (l_1 - l_4)k_2$ и $(\mathbf{L}^2)_2 = l_1l_2 + l_2l_4 = 0$. Так как $\mathrm{sp}(\mathbf{K}) = 0$, то $\mathbf{K}^2 = -\det \mathbf{K}$, следовательно, $(\mathbf{K}^2)_2 = 0$ и получается в точности уравнение (10).

Предложение 1. Пусть $\mathbf{P}_2 = \mathrm{Int}_{\mathrm{H}}(\mathbf{P}_1)$, *где* $\mathbf{H}$ *такая матрица, что оператор* $\mathbf{P}_2$ *нижне треуголен,* $\mathbf{P}_1$ *имеет вид* (7), *где* $\mathrm{sp}(\mathbf{V}) = 0$. *Тогда между четырьмя функциями* v_1, v_2, v_3, *1 имеется линейная зависимость вида*

$$2\alpha\beta v_1 - \beta^2 v_3 + \alpha^2 v_2 = \gamma,$$

где α, β *и* γ *– постоянные, одновременно не обращающиеся в нуль.*

Справедливо и обратное утверждение: если есть такая зависимость, то оператор $\mathbf{P}_1$ можно триангулировать с помощью некоторой матрицы $\mathbf{H}$.

Доказательство. Оператор P_2 имеет вид (3), где $\mathbf{L} = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{H}'$, $\mathbf{K} = \mathrm{Int}_{\mathrm{H}}(\mathbf{V})$. Легко видеть, что определитель $\mathbf{H}$ можно считать равным 1. Тогда нетрудно вычислить

$$\begin{aligned} l_1 &= -l_4 = h_2h_3' - h_4h_1', \\ l_2 &= h_2h_4' - h_4h_2', \\ k_2 &= 2h_2h_4v_1 - h_2^2v_3 + h_4^2v_2. \end{aligned}$$

Воспользуемся леммой 1. Из условия $l_2 = 0$ очевидно вытекает, что

$$\beta h_4 = \alpha h_2 \tag{11}$$

с постоянными α и β не равными нулю одновременно. Тогда

$$\begin{aligned} \alpha^2k_2 &= h_4^2(2\alpha\beta v_1 - \beta^2v_3 + \alpha^2v_2) \stackrel{\mathrm{def}}{=} h_4^2\gamma, \\ \alpha(l_4 - l_1) &= 2h_4(\alpha h_1' - \beta h_3'). \end{aligned}$$

Выпишем второе условие (10), умножив его на α^3,

$$2\alpha h_4h_4'\gamma + \alpha h_4^2\gamma' + 2h_4(\alpha h_1' - \beta h_3')h_4^2\gamma = 0.$$

Умножив определитель $\mathbf{H}$ на α, получим из (11)

$$\alpha = \alpha h_1 h_4 - \alpha h_2 h_3 = h_4(\alpha h_1 - \beta h_3) \stackrel{\text{def}}{=} h_4 h_5.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha h_4' + h_5' h_4^2 = 0.$$

Действительно, $h_4' h_5 + h_4 h_5' = 0$, умножив на h_4, получим искомое. Следовательно, $\alpha h_4^2 \gamma' = 0$. Если $\alpha \neq 0$, то и $h_4 \neq 0$ согласно (11), так как иначе и h_2 равнялось бы нулю, что противоречит обратимости $\mathbf{H}$. Тогда $\gamma' = 0$, что и требуется. Если же $\alpha = 0$, то $\beta \neq 0$, и в силу очевидной симметрии получаем тот же результат.

Условие разложимости на множители немного слабее.

Предложение 2. Если $\mathrm{sp}(\mathbf{V}) = 0$ *и четыре функции* v_1, v_2, v_3 *и 1 линейно зависимы, то оператор* $\mathbf{P}_1$ *из* (7) *либо разложим на множители первой степени, либо триангулируем матричным преобразованием.*

Доказательство. Положим

$$\mathbf{P}_1 = (\partial + \mathbf{V} + \mathbf{R}\xi)(\partial - \mathbf{V} - \mathbf{R}\xi),$$

где $\mathbf{R}$ – неизвестная постоянная матрица с нулевым следом. Мы докажем, что либо такая матрица $\mathbf{R}$ существует, либо оператор $\mathbf{P}_1$ триангулируем. Можно доказать, что искать разложение оператора с матрицей $\mathbf{R}$ более общего вида, но зависящей от ξ явно выраженным образом, бесполезно.

Тогда, раскрывая скобки, получим

$$\mathbf{P}_1 = \partial^2 - \mathbf{V}' - \mathbf{V}^2 - \xi(\mathbf{VR} + \mathbf{RV}) - \mathbf{R}^2\xi^2.$$

Нетрудно вычислить:

$$\mathbf{VR} + \mathbf{RV} = 2r_1v_1 + r_2v_3 + r_3v_2. \tag{12}$$

Положим $\mathbf{R} = r\mathbf{R}_0$, где $\mathbf{R}_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$, постоянные α, β, γ выбраны в соответствии с заданной линейной зависимостью, которую согласно формуле (12) можно представить в виде $\mathbf{VR}_0 + \mathbf{R}_0\mathbf{V} = v$ с некоторой постоянной v, и нормированы так, чтобы $\mathbf{R}_0^2 = \pm\mathbf{1}$, либо фиксированы как-нибудь, если $\mathbf{R}_0^2 = \mathbf{0}$.

Тогда имеем $\mathbf{VR} + \mathbf{RV} = rv$ и либо

$$\pm\xi^2 r^2 + \xi v r - \xi^2 = 0, \tag{13}$$

либо $\xi v r - \xi^2 = 0, \quad$ если $\mathbf{R}_0^2 = \mathbf{0}$.

При $\mathbf{R}_0^2 \neq \mathbf{0}$, или $v \neq 0$ уравнение относительно r решается, корни могут быть комплексными.

Пусть $\mathbf{R}_0^2 = \mathbf{0}$, $v = 0$.

В этом случае существует постоянная матрица $\mathbf{H}$, такая, что $\mathrm{Int}_{\mathbf{H}}(\mathbf{R}_0) = \mathbf{N}$.

Применив преобразование $\mathrm{Int_H}$ к оператору $\mathbf{P}_1$ и полагая $\tilde{\mathbf{V}} = \mathrm{Int_H}(\mathbf{V})$, получим

$$\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{N} + \mathbf{N}\tilde{\mathbf{V}} = \tilde{v}_2 = \mathbf{0},$$

т.е. оператор $\tilde{\mathbf{P}}_1 = \mathrm{Int_H}(\mathbf{P}_1)$ – треугольный.

Проверка достаточных условий в предложениях *1* и *2* затруднена тем, что для этого требуется предварительно решить систему дифференциальных уравнений (6). Следующее предложение позволяет сформулировать условия триангуляции в терминах матриц $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$.

Предложение 3. Пусть

$$\mathbf{P} = (\partial - \mathbf{L} + \mathbf{K} + \omega^2\mathbf{N})(\partial - \mathbf{L} - \mathbf{K} - \omega^2\mathbf{N}) - \xi^2, \tag{14}$$

где коэффициенты матриц $\mathbf{L}$ *и* $\mathbf{K}$ *удовлетворяют условиям* $l_1 = l_4 = 0$, $k_1 + k_4 = 0$. *Тогда матрица* $\mathbf{H}(x)$ *такая, что оператор* $\mathbf{P}_1 = \mathrm{Int_H}(\mathbf{P})$ *треуголен, существует в том и только в том случае, если решение уравнения*

$$2h_2h_4k_1' - h_2^2k_3' + h_4^2k_2' + 2l_3h_2^2(k_1 + k_2) - 2l_2h_2h_4(k_3 + \omega^2) = 0, \tag{15}$$

представляющее собой одно из отношений h_2/h_4 *либо* h_4/h_2, *удовлетворяет уравнению*

$$h_2h_4' - h_4h_2' + h_4^2l_2 - h_2^2l_3 = 0. \tag{16}$$

Следствие. В условиях предложения 3 триангуляция не зависит от частоты ω *(и от* ξ*, конечно), если выполняется одно из условий:*

1) $l_2 = 0$ *и корень* h_2/h_4 *уравнения* (15) *удовлетворяет уравнению* (16). *Например, можно взять* $h_2 = 0$ *и тогда необходимо* $k_2' = 0$.

2) $l_3 = 0$, $k_3' = 0$. *В этом случае нужно положить* $h_4 = 0$.

Следствие очевидно.

Доказательство предложения 3. Пусть $P_1 = (\partial - \tilde{\mathbf{L}} + \tilde{\mathbf{K}})(\partial - \tilde{\mathbf{L}} - \tilde{\mathbf{K}}) - \xi^2$. Тогда

$$\tilde{\mathbf{L}} = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{H}' + \mathrm{Int_H}(\mathbf{L}),$$
$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathrm{Int_H}(\mathbf{K} + \omega^2\mathbf{N}).$$

Можно положить $\det\mathbf{H} = 1$. Тогда необходимые величины для использования леммы *1* будут иметь следующий вид:

$$\tilde{l}_2 = h_2h_4' - h_4h_2' + h_4^2l_2 - h_2^2l_3, \tag{17}$$

$$\tilde{l}_4 - \tilde{l}_1 = 2(h_4h_1' - h_2h_3' + h_1h_2l_3 - h_3h_4l_2), \tag{18}$$

$$\tilde{k}_2 = 2h_2h_4k_1 - h_2^2(k_3 + \omega^2) + h_4^2k_2. \tag{19}$$

Ввиду однородности уравнения $\tilde{l}_2 = 0$ положим $h_4 = hh_2$. Тогда для h получим из (17) уравнение

$$h' + h^2l_2 - l_3 = 0, \tag{20}$$

далее из (18) получаем

$$\tilde{l}_4 - \tilde{l}_1 = 2h_2(hh_1' - h_3' + h_1l_3 - hh_3l_2).$$

Равенство $\det \mathbf{H} = 1$ можно записать в виде $hh_1 - h_3 = h_2^{-1}$. Следовательно, с учетом (20), $hh_1' - h_3' = -h_2^{-2}h_2' - h_1(l_3 - h^2 l_2)$. Поэтому $\tilde{l}_4 - \tilde{l}_1 = 2(hl_2 - h_2^{-1}h_2')$.

Из (19) следует, что

$$\tilde{k}_2 = h_2^2(2hk_1 - (k_3 + \omega^2) + h^2 k_2). \tag{21}$$

Положим $\tilde{k}_2 = h_2^2(k_5 - \omega^2)$. Условие треугольности из леммы *1* для оператора $\mathbf{P}_1$ теперь запишется в виде

$$2h_2h_2'(k_5 - \omega^2) + h_2^2 k_5' + 2(hl_2 - h_2^{-1}h_2')h_2^2(k_5 - \omega^2) = 0.$$

После приведения подобных членов получаем

$$h_2^2(k_5' + 2hl_2(k_5 - \omega^2)) = 0.$$

Если в это равенство подставить $h = h_4/h_2$, развернуть выражение для k_5 с помощью (21) и домножить на h_2, то получится в точности уравнение (15).

Переформулировка предложения *2* в терминах матриц $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ требует использования некоторого алгебро-геометрического аппарата и будет дана в разд. 3. Значительно проще получить условия разложимости при всех ω и ξ.

Предложение 4. Пусть $\mathbf{P}$ *такой же как в предложении 3* (14) *и* $k_2 \neq 0$. *Тогда он разложим на множители при всех* ω, ξ, *если выполнено одно из условий*

1) $\alpha_2 l_3 - \alpha_3 l_2 = 0$, $\alpha_3 k_2 + \alpha_2 k_3 = \alpha_1$ *с некоторыми постоянными* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, α_2 *или* $\alpha_3 \neq 0$,

2) $l_2 = 0$, *функция* s_1, *определенная из уравнения с константами* α_n: $2\alpha_2 s_1 k_1 + (\alpha_3 - s_1^2)k_2 + \alpha_2^2 k_3 = \alpha_1$ *удовлетворяет уравнению* $s_1' + \alpha_2 l_3 = 0$.

Доказательство. Положим

$$\mathbf{P} = (\partial - \mathbf{L} + \mathbf{K} + \omega^2\mathbf{N} + \xi r\mathbf{S})(\partial - \mathbf{L} - \mathbf{K} - \omega^2\mathbf{N} - \xi r\mathbf{S}),$$

где матрица $\mathbf{S}$ имеет нулевой след, а r не зависит от x.

Раскрывая скобки, получим, что r удовлетворяет квадратному уравнению, аналогичному (13), если выполнены условия

$$\mathbf{S}' + [\mathbf{S}, \mathbf{L}] = \mathbf{0}, \tag{22}$$

$$\mathbf{S}^2 = \mathbf{const}, \tag{23}$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{K} + \omega^2\mathbf{N}) + (\mathbf{K} + \omega^2\mathbf{N})\mathbf{S} = \mathbf{const}. \tag{24}$$

По теореме Лиувилля–Якоби (23) следует из (22).

Значит, если из уравнений (22) и (24) исключить $\mathbf{S}$, то получится искомое соотношение. Очевидно, матричное уравнение (22) эквивалентно трем скалярным уравнениям, а уравнение (24) – одному. Так как неизвестных всего три: s_1, s_2, s_3, получится одно, зависящее от ω, соотношение. Эквивалентная этой процедуре операция будет проделана в разд. 3. Здесь мы получим не зависящие от ω соотношения, достаточные для разрешимости системы (22)–(24) относительно $\mathbf{S}$.

Итак, пусть

$$\mathbf{SN} + \mathbf{NS} = \mathbf{const}. \tag{25}$$

Записывая (22), (24), (25) в координатах, получим

$$\begin{cases} s_1' + s_2 l_3 - s_3 l_2 = 0 \\ s_2' + 2s_1 l_2 = 0 \\ s_3' - 2s_1 l_3 = 0 \\ 2s_1 k_1 + s_3 k_2 + s_2 k_3 + s_2 \omega^2 = \mathrm{const} \\ s_2 = \mathrm{const}. \end{cases} \tag{26}$$

Из последнего и второго уравнений системы (26) вытекает, что $s_1 l_2 = 0$.

Пусть $s_1 = 0$, тогда из третьего уравнения (26) вытекает, что $s_3 = \mathrm{const}$. Полагая $s_2 = \alpha_2, s_3 = \alpha_3$, получаем условие *1)*.

Пусть $l_2 = 0$. Подставляя из первого уравнения системы (26) l_3 в третье уравнение этой системы и интегрируя, получим

$$s_2 s_3 + s_1^2 = \alpha_3 = \mathrm{const}.$$

Снова полагая $s_2 = \alpha_2$, после подстановки s_2 и s_3 в четвертое уравнение системы (26) получим условие *2)*. Нетрудно показать, что одна из констант (23) или (24) будет отлична от нуля при всех ω, кроме, может быть, одного. Следовательно r можно найти.

3. СНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА И КРУЧЕНИЕ

3.1. Алгебраическое отступление

Чтобы сформулировать условие из предложения *2* в терминах матриц $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ целесообразно воспользоваться некоторыми (известными) понятиями матричного и векторного исчислений.

Известно [?], что алгебра двумерных матриц с операциями сложения и умножения является алгеброй кватернионов, следовательно – алгеброй Клиффорда. Ее еще называют алгеброй обобщенных кватернионов, чтобы противопоставить классическому телу кватернионов. В отличие от тела в ней есть делители нуля и нильпотенты.

Примем следующие соглашения относительно обозначений. Матрицы будем обозначать заглавными латинскими буквами, а элементы основного поля, которое может быть полем вещественных или комплексных чисел – строчными. Элементы матриц помечаются одним индексом в следующем порядке: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$. Поле будем считать вложенным в алгебру матриц по правилу $a = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Структура кватернионов связана с билинейной формой, которая вводится следующим образом.

Каждую матрицу $\mathbf{A}$ можно представить в виде $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + a$, где $\mathbf{A}_0$ – матрица с нулевым следом (т.е. $(\mathbf{A}_0)_4 = -(\mathbf{A}_0)_1$), а $2a = \mathrm{sp}(\mathbf{A})$. *Сопряженной* с $\mathbf{A}$ матрицей называется матрица $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_0 - a$. Симметрическая *билинейная форма*, которая будет также называться скалярным произведением, определяется формулой $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\bar{\mathbf{B}} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{A}})$.

Легко проверить, что $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \langle \mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0 \rangle - ab$, и что $\mathbf{AB}+\mathbf{BA} = 2a_1 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_2$, если $\mathrm{sp}(\mathbf{A}) = \mathrm{sp}(\mathbf{B}) = 0$; поэтому $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$ – скалярная величина.

Также легко проверить, что

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle = \mathbf{A}_0^2 - a^2 = -\det(\mathbf{A}).$$

Операция коммутирования $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ является дифференцированием по каждому аргументу, в том смысле, что справедлива формула Лейбница для действия, скажем, матрицы $\mathbf{A}$ на произведение матриц $\mathbf{BC}$:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{BC}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C} + \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}].$$

Очевидно, что $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = [\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0]$.

Такие дифференцирования алгебр называются внутренними, все прочие – внешними. Очевидно, две матрицы определяют одно и то же внутреннее дифференцирование только в том случае, когда они отличаются скалярным слагаемым, и внутренняя производная скаляра всегда равна нулю. Предположим, что матрицы зависят от переменной x дифференцируемым образом. Обычное дифференцирование $\partial = d/dx$ является, очевидно, внешним. Определим для любой матрицы $\mathbf{B}(x)$ внешнее дифференцирование ∂_{B} по формуле

$$\mathbf{A}'_{\mathrm{B}} = \partial_{\mathrm{B}}(\mathbf{A}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{A}' - [\mathbf{B}, \mathbf{A}].$$

Применение степеней оператора ∂_{B}, следуя традиции, будем обозначать $(\ldots)^{(n)}_{\mathrm{B}^n}$, например, $\partial^3_{\mathrm{B}}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}'''_{\mathrm{B}^3}$. Оператор ∂_{B} является дифференцированием в алгебре матриц:

$$\partial_{\mathrm{B}}(\mathbf{AC}) = \partial_{\mathrm{B}}(\mathbf{A})\mathbf{C} + \mathbf{A}\partial_{\mathrm{B}}(\mathbf{C}),$$
$$\partial_{\mathrm{B}}(a\mathbf{C}) = \partial(a)\mathbf{C} + a\partial_{\mathrm{B}}(\mathbf{C}).$$

Предложение 5. Пусть $\mathbf{B} = \mathbf{C}'\mathbf{C}^{-1}$, *тогда*

$$\mathrm{Int}_{\mathrm{C}^{-1}}(\mathbf{A}') = (\mathrm{Int}_{\mathrm{C}^{-1}}(\mathbf{A}))'_{\mathrm{B}}.$$

Проверка этой формулы не составляет трудности. Смысл ее заключается в том, что обычное дифференцирование ∂ после замены базиса в пространстве, где действуют матрицы, становится дифференцированием вида ∂_{B}; и обратно, всякое такое дифференцирование можно зависящей от x заменой базиса превратить в обычное, решив уравнение $\mathbf{C}' = \mathbf{CB}$. Следует предостеречь читателя, что это касается матриц, представляющих линейные преобразования некоторого векторного пространства, они преобразуются при замене базиса в векторном пространстве посредством операции Int. В то же время матрицы, представляющие собой наборы векторов (в качестве столбцов), преобразуются простым умножением на матрицу замены. Такими матрицами являются, например, матрицы фундаментальных решений систем линейных обыкновенных уравнений.

Пространство всех матриц обозначим буквой $\mathbf{M}$, а его подпространство матриц с нулевым следом – $\mathbf{M}_0$. Произведение двух матриц из $\mathbf{M}_0$ не обязано лежать в $\mathbf{M}_0$, однако $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \in \mathbf{M}_0$ для всех $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ из $\mathbf{M}$, и, если $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_0$ при всех x, то и $\partial_{\mathrm{B}}(\mathbf{A}) \in \mathbf{M}_0$.

Определим *смешанное произведение* трех матриц:

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \rangle = \langle [\mathbf{A}, \mathbf{B}], \mathbf{C} \rangle = \langle \mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}] \rangle.$$

Второе равенство нетрудно проверить.

Трехмерное пространство $\mathbf{M}_0$ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и векторным произведением $\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}=\frac{1}{2}[\mathbf{A},\mathbf{B}]$ является гиперболическим трехмерным векторным пространством, так как сигнатура формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ гиперболична: $(+,+,-)$.

Известные формулы евклидова пространства справедливы и в данном случае. Именно, смешанное произведение допускает круговые подстановки:

$$\langle\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\rangle=\langle\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{A}\rangle,$$

и для векторного произведения имеем тождества:

$$(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B})\wedge\mathbf{C}=(\mathbf{A}\wedge\mathbf{C})\wedge\mathbf{B}+\mathbf{A}\wedge(\mathbf{B}\wedge\mathbf{C})=\mathbf{A}\langle\mathbf{B},\mathbf{C}\rangle-\mathbf{B}\langle\mathbf{A},\mathbf{C}\rangle. \tag{27}$$

В отличие от евклидова случая ненулевая матрица может быть ортогональна сама себе, а коммутатор $[\mathbf{A},\mathbf{B}]$, будучи ортогонален обеим матрицам, может лежать в их плоскости, т.е. возможно равенство $[\mathbf{A},\mathbf{B}]=a\mathbf{A}+b\mathbf{B}$ с некоторыми a,b.

Предложение 6. Пусть $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbf{M}_0$. $[\mathbf{A},\mathbf{B}]=\mathbf{0}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *линейно зависимы.*

Доказательство. Если $\mathbf{A}\neq 0$, то можно найти матрицу $\mathbf{C}$ такую, что $\langle\mathbf{A},\mathbf{C}\rangle\neq 0$. Тогда по формуле (27) имеем нетривиальную линейную зависимость между матрицами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$

$$0=[[\mathbf{A},\mathbf{B}],\mathbf{C}]=4\mathbf{A}\langle\mathbf{B},\mathbf{C}\rangle-4\mathbf{B}\langle\mathbf{A},\mathbf{C}\rangle.$$

Предложение 7. Смешанное произведение $\langle\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\rangle$, *где* $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\in\mathbf{M}_0$, *равно нулю в том и только в том случае, когда матрицы* $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ *линейно зависимы.*

Доказательство. Пусть $\langle\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\rangle=\mathbf{0}$. Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ линейно независимы, то по предложению *6* $[\mathbf{A},\mathbf{B}]\neq 0$. Следовательно, $\mathbf{C}$ лежит в плоскости, ортогональной $[\mathbf{A},\mathbf{B}]$, но там уже лежат две независимые матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, значит, $\mathbf{C}$ является их линейной комбинацией.

3.2. Геометрическое отступление

Рассмотрим матрицы с нулевым следом, зависящие от x и трижды непрерывно дифференцируемые.

Поскольку такая матрица $\mathbf{A}(x)$ полностью определяется своими тремя элементами a_1,a_2,a_3, ее можно представить как кривую в трехмерном пространстве. Условие линейной зависимости из предложения *2*

$$\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\alpha_3a_3+\alpha_4=0$$

с постоянными α_i, означает геометрически, что кривая лежит в одной плоскости. Из дифференциальной геометрии известно, что это условие эквивалентно равенству нулю кручения кривой. Оказалось, что последнее условие можно сформулировать в виде матричного соотношения. После того как это будет сделано, искомое соотношение для матриц $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ получится довольно просто: условие равенства нулю кручения записывается для матрицы $\mathbf{V}(x)$ и к нему применяется матричное преобразование подобия $\mathrm{Int}_{\mathrm{G}^{-1}}$, обратное тому, посредством которого из матрицы $\mathbf{K}$ получилась матрица $\mathbf{V}$.

Напомним формулу для определения кручения. Пусть $A(s)$ – кривая в трехмерном евклидовом пространстве, параметризованная своей длиной. Тогда A' – единичный касательный вектор и $A'' = \varkappa N$, где $\varkappa$ – кривизна, а N – орт главной нормали. Все величины, естественно, зависят от s. Кручение τ определяется формулой $N' = -\varkappa A' + \tau B$, где $B = A' \times N$ – бинормаль. Умножив скалярно последнее равенство на B, получим формулу для кручения

$$\tau = (N', B) = (A', N, N') = \varkappa^{-2}(A', A'', A'''),$$

если кривизна не равна нулю. Здесь $(\cdot, \cdot)$ обозначает евклидово скалярное произведение, а $(\cdot, \cdot, \cdot) \stackrel{def}{=} ((\cdot \times \cdot), \cdot)$ – смешанное. Очевидно, если кривизна равна нулю, то $A'' = 0$, в этом случае положим по определению кручение равным нулю, а орт главной нормали – постоянным, тогда получим

Предложение 8. Кручение кривой $A(x)$ равно нулю тогда и только тогда, когда

$$(A', A'', A''') = 0. \tag{28}$$

Здесь x уже произвольный параметр. Легко проверить, что для двух различных параметризаций величины (A', A'', A''') различаются ненулевым множителем.

Предложение 9. Кручение матричной кривой $\mathbf{A}(x)$ равно нулю тогда и только тогда, когда равно нулю гиперболическое смешанное произведение

$$\langle \mathbf{A}', \mathbf{A}'', \mathbf{A}''' \rangle = \mathbf{0}. \tag{29}$$

Доказательство. Это предложение вытекает из предложения *7* и его аналога для евклидова смешанного произведения, поскольку из них следует, что как условие (28), так и условие (29) эквивалентны линейной зависимости векторов (или матриц) $\mathbf{A}', \mathbf{A}'', \mathbf{A}'''$ и, значит, (28) эквивалентно (29). Из предложения *8* получаем результат.

Следствие. Точки матричной кривой $\mathbf{A}(x)$ с координатами $a_1(x), a_2(x), a_3(x)$ лежат при всех x в одной плоскости тогда и только тогда, когда выполнено условие (29), *при условии, что кривизна этой кривой в нуль не обращается.*

Доказательство. Условие (29) можно заменить условием (28) и тогда следствие станет формулировкой вышеупомянутой теоремы дифференциальной геометрии кривых, которая утверждает, что равенство нулю кручения кривой эквивалентно ее расположению в некоторой плоскости, если кривизна не обращается в нуль. Она несложно выводится из теорем существования и единственности решений дифференциальных уравнений.

Отметим, что если кручение равно нулю, то кривая после прохождения точек или отрезков нулевой кривизны может изменить плоскость своего расположения.

3.3. Главный результат

Предложение 10. Пусть оператор $\mathbf{P}$ *имеет вид* (3). *Если* $\langle \mathbf{K}'_L, \mathbf{K}''_{L^2}, \mathbf{K}'''_{L^3} \rangle = \mathbf{0}$, *то возможно снижение его порядка либо путем разложения на множители, либо триангуляцией.*

Доказательство. Согласно предложению *9* условие предложения *2* можно записать в виде $\langle \mathbf{V}', \mathbf{V}'', \mathbf{V}''' \rangle = \mathbf{0}$. Применив к этому равенству операцию $\mathrm{Int}_{\mathrm{G}^{-1}}$, из предложения *5* получим результат.

Заметим, что при заданных λ и μ условие предложения *10* позволяет определить ρ, которое будет зависеть от трех произвольных постоянных, что согласуется и с условием предложения *2*. Можно получить из предложения *10* условия предложения *4*, позволяющие упрощать систему независимо от частоты, хотя это и требует значительных вычислений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В связи с тем, что условия для возможности упрощения системы Рэлея оказались весьма ограничительными, возникает вопрос: есть ли в этих результатах сколько-нибудь положительное содержание для приложений к общему случаю и могут ли они вообще найти применение? Ответим на него.

Во-первых, вслед за предшественниками [8, 9 и др.] можно использовать высокочастотное упрощение, при осуществлении которого не требуется подчинять параметры среды каким-либо условиям. Отметим, что результат, доставляющий эту возможность, получен уже в [11] (здесь он воспроизводится в формуле (9)). Там было также отмечено, что главную часть оператора (9) составляют образы стоящих на главной диагонали волновых операторов.

Во-вторых, допускающие упрощение системы можно использовать для кусочной аппроксимации общих систем. Несложный анализ показывает, что здесь можно ожидать значительных преимуществ по сравнению с широко используемой в настоящее время аппроксимацией однородными слоями. Как уже отмечалось, интегрирование упрощенной системы сводится к интегрированию уравнений первого порядка. Это даст значительную экономию в вычислениях, если требуется их производить на каждой частоте при нескольких значениях волнового числа. Приближение выглядит значительно более точным по сравнению с приближением однородными слоями: два параметра из трех, скажем λ и μ, можно взять прямо из заданной среды, а ρ выбрать близким к заданному, пользуясь тремя произвольными постоянными. Таким путем можно построить регуляризатор системы для итеративного метода решения при любой частоте, а не только при высокой, как в первом случае.

В-третьих, полученные результаты позволяют строить конкретные примеры упрощающихся систем, которые можно использовать для самых разнообразных нужд как исследовательского так и прикладного характера: в первую очередь для исследования спектральных свойств оператора Рэлея, для решения обратной задачи и для тех же самых приближений. Несколько таких примеров построены в [12].

Тем не менее, представляется разумным в настоящий момент не спешить с приложениями полученных результатов, а продолжить исследование возможности упрощения системы Рэлея с использованием более сильных средств, чем матричные преобразования. Например, использовать общие дифференциально- или интегрально-матричные преобразования. Интересно, будет ли кручение и в этом случае препятствием для упрощения? Кстати говоря, интересно было бы узнать, имеют ли геометрические инварианты кривой, которую описывают три элемента матрицы $\mathbf{V}$, т.е. длина, кривизна и кручение, физический смысл в теории упругости.

На первый взгляд кажется, что матричные преобразования себя не исчерпали. Можно записать систему в форме четырех уравнений и искать 4×4 -матричное преобразование. Исследование этого вопроса нами до конца не доводилось, однако гипотетический его исход состоит в том, что существование триангулирующей 4 × 4-матрицы эквивалентно разложению на множители матричного оператора Штурма–Лиувилля. Отметим также, что метод потенциалов, используемый в [8–10 и др.], является весьма специальным случаем дифференциально матричных преобразований и не дает преимуществ по сравнению с нашим методом.

Автор выражает благодарность В.М. Маркушевичу, Г.Л. Косареву и И.М. Алешину за полезные обсуждения этих результатов.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-05-65878) и РФФИ–ИНТАС (грант INTAS 95-0865).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. Том 1. М.: Мир, 1983. 520 с.
2. *Левшин А.Л.* Поверхностные и каналовые сейсмические волны. М.: Наука, 1973. 176 с.
3. *Kennett B.L.N.* Seismic wave propagation in stratified media. Cambridge: Cambridge University Press, 1983. 353 p.
4. *Костров Б.В., Епифанский А.Г.* Построение точных теоретических сейсмограмм для моделирования волнового поля локального землетрясения // Алгоритмы и практика определения параметров гипоцентров землетрясений на ЭВМ. Методические работы ЕССН. М.: Наука, 1983. С. 98-131.
5. *Лидский В.Б., Нейгауз М.Г.* К методу прогонки в случае самосопряжённой системы второго порядка // ЖВМ и МФ. 1962. Т. 2, N 1. С. 161-165.
6. *Шкадинская Г.В.* Метод расчёта поверхностных волн Рэлея в шаре // Алгоритмы интерпретации сейсмических данных. (Вычисл. сейсмология. Вып. 5). М.: Наука, 1969. С. 178-188.
7. *Киселев С.Г., Кузнецов А.Н., Маркушевич В.М.* Задача "уплощения Земли": происхождение, методы точного решения и разложение в ряд // Теоретические проблемы в геофизике. (Вычисл. сейсмология. Вып. 29). М.: Наука, 1997. С. 28-43.
8. *Young R.M.* P-SV interaction in layered media // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1983. Vol. 74. P. 613-620.
9. *Ansell J.H.* On the decoupling of P and S waves in inhomogeneous elastic media // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1979. Vol. 59. P.399-409.
10. *Richards P.R.* Weakly coupled potentials for high frequency elastic waves in continuously stratified media // Bull. Seismol. Soc. Amer. 1974. Vol. 64. P. 1575-1588.
11. *Киселев С.Г., Кузнецов А.Н., Маркушевич В.М., Цемахман А.С.* Об уравнениях упругих волн, допускающих разделение переменных в слоистых средах // Теоретические проблемы в геофизике. (Вычисл. сейсмология. Вып. 29). М.: Наука, 1997. С. 44-69.
12. *Кузнецов А.Н., Маркушевич В.М.* Об условиях понижения порядка системы Рэлея. II. Исследование сред, допускающих понижение, и их частных случаев. Наст. сб.
13. *Кузнецов А.Н.* Функция Лагранжа и разделение переменных для упругих колебаний в осесимметричной слоистой среде // Теоретические проблемы геодинамики и сейсмологии. (Вычисл. сейсмология. Вып. 27). М.: Наука, 1994. С. 171-190.
14. *Бурбаки Н.* Алгебра. М.: Физматгиз, 1962. 516 с.