УДК 550.310:517.984.54

ОБ УСЛОВИЯХ ПОНИЖЕНИЯ ПОРЯДКА СИСТЕМЫ РЭЛЕЯ. II. ИССЛЕДОВАНИЕ СРЕД, ДОПУСКАЮЩИХ ПОНИЖЕНИЕ, И ИХ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ

А.Н. Кузнецов, В.М. Маркушевич
Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук

Исследуются две системы дифференциальных уравнений относительно параметров плоскослоистой среды, полученные в I-й части работы. Первая выражает условия, при которых система уравнений для трансформант P–SV-колебаний сводится к двум уравнениям Штурма–Лиувилля; вторая выражает условие разложимости на множители оператора системы для P–SV-колебаний. Обе системы недоопределены. Решение каждой из них зависит от произвольно выбранной функции. Найдены решения обеих систем в квадратурах и первый интеграл первой системы. Доказывается, что первая система эквивалентна системе Янга, решающей ту же задачу. Следовательно, вторая система, будучи более общей, чем первая, является усилением результата Янга. Для среды, подчиненной первой системе, выписана система упрощенных уравнений P–SV-колебаний. Рассмотрен класс сред со степенной зависимостью параметров среды от глубины, удовлетворяющий первой системе. Он оказался довольно емким, в него вошли примеры Гупты и Янга и некоторые из указанных Хуком. Показано, что примеры Пикериса и Зволинского удовлетворяют второй, но не первой системе. Этим же свойством обладает оператор упругости, каждый сомножитель которого является оператором Дирака; тем самым обнаруживается параллель между теорией упругости и квантовой теорией.

ON CONDITIONS FOR REDUCTING THE ORDER OF A RAYLEIGH SYSTEM. II. STUDY OF THE MEDIA ALLOWING THE REDUCTION AND THEIR PARTICULAR CASES

A. N. Kuznetsov, and V. M. Markushevich
International Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences

We study two systems of differential equations dealing with parameters of a flat layered medium, which was derived in the first part of this work. The first of these systems provides restrictions on the parameters under which the system of equations for transformed of P–SV vibrations is reduced to two Sturm–Liouville's equations. The second expesses conditions for factorization of the P–SV vibration system. Both systems are underdetermined. A solution of each of them depends on an arbitrary chosen function. We have integrated both systems by quadratures, and found the first integral of the first sistem. The first system has proven to be equivalent to R. M. Young's one which solves the same problem. Consequently, the second system strengthens the Young result, since it is generalization of the first. For a medium that obeys the first system, simplified equations of P–SV vibrations are written down. We consider the set of media with power law denendence of parameters on depth, which satisfy the first system. The set happens to be rather capacious and includes examples by Gupta and Young and some of the media given by Hook. We show that media considered by Pekeris and Zvolinskii satisfy the second system but not the first. The same is true for the elasticity operator which is factorized into two Dirac's operators and thereby demonstrates some parallels between theory of elasticity and quantum theory.

ВВЕДЕНИЕ

Колебания рэлеевского типа, или P–SV-колебания, привлекают внимание сейсмологов, так как представляют собой очень мощное сейсмическое явление. При использовании вибраторов вертикального типа в сейсморазведке было отмечено, что около 80% энергии вибратора распространяется в виде поверхностных волн Рэлея. Эти колебания находят широкое применение и в технике для акустического контроля качества слоистых изделий, при конструировании линий задержки и т.д.

В то же время свойства поверхностных волн Рэлея мало изучены. Известно, что спектральные свойства этих волн более сложны, чем, например, волн Лява. Спектр волн Рэлея, видимо, может содержать комплексные а также кратные точки [1]. При прослеживании эволюции спектра с частотой, т.е. дисперсии, могут появиться ветви с обратной дисперсией – для таких мод знаки фазовой и групповой скоростей противоположны [2, 3]. Не ясно, какие зависимости плотности и параметров Ламе от глубины связаны с появлением таких нестандартных свойств волн Рэлея.

Для изучения свойств рэлеевских колебаний полезно иметь достаточно широкое множество сравнительно простых примеров. Поиск таких примеров ведется уже более полувека [4-8]. Мы продолжаем эту работу в [9] и в настоящей статье, опираясь на метод, позволяющий записать уравнения для рэлеевских колебаний в форме Штурма–Лиувилля [10].

1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Система уравнений для трансформант смещений при P–SV-колебаниях плоскослоистых сред [10, 11] имеет вид

$$\mathbf{P}u = 0, \quad \text{где} \quad \mathbf{P} = \partial(\mathbf{B}\partial + \mathbf{C}) - \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\partial + \mathbf{E}. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{P}$ – симметричный оператор, т.е. $\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}$, $\mathbf{E}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}$, $\partial^{\mathrm{T}} = -\partial$, $\xi^{\mathrm{T}} = \xi$; $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{E}$ – матрицы второго порядка, ∂ – оператор дифференцирования, T – оператор транспонирования; произведение ∂A рассматривается как композиция операторов, т.е. $\partial A = A\partial + A'$, $(\,)' \equiv d(\,)/dx$, $u = (v_1, v_2)^{\mathrm{T}}$. Матрицы $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{E}$ имеют вид

$$\mathbf{B} = \operatorname{diag}(\nu, \mu), \quad \mathbf{C} = \xi \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\mu & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \operatorname{diag}(\omega^2\rho - \xi^2\mu,\ \omega^2\rho - \xi^2\nu),$$

где диагональная матрица 2×2 с элементами a_1 и a_2 обозначена $\operatorname{diag}(a_1, a_2)$; λ и μ – параметры Ламе, ρ – плотность, $(\lambda, \mu, \rho) = (\lambda(x), \mu(x), \rho(x))$, $\nu = \lambda + 2\mu$, ω – частота, ξ – волновое число.

Обозначим преобразование подобия матричного оператора $\mathbf{L}$ с помощью матрицы $\mathbf{M}$ как

$$\operatorname{Int}_{\mathbf{M}}(\mathbf{L}) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{M}.$$

В [10] доказано, что

$$\mathbf{P}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Int}_{\mathbf{M}_2}(\mathbf{M}_1^{-1}\operatorname{Int}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{P})) = (\partial - \mathbf{L} + \mathbf{K})(\partial - \mathbf{L} - \mathbf{K}) - \xi^2. \tag{2}$$

Здесь

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\xi & 0 \\ \partial & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ -2\mu' & \nu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} \varkappa\mu^{-1} & 0 \\ 0 & \mu\nu^{-1} \end{pmatrix},$$

$\varkappa$ – произвольная константа,

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mu' & -\frac{1}{2}\varkappa^{-1}\mu\nu^{-1}(\lambda + 3\mu) \\ \varkappa(\mu^{-2}\omega^2\rho + (\mu^{-1})'') & -\mu^{-1}\mu' \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\varkappa^{-1}\mu\nu^{-1}(\lambda + \mu) \\ -\varkappa(\mu^{-1})'' & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Положим

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \omega^2 \boldsymbol{k}\,\mathbf{N}, \quad \boldsymbol{k} = \varkappa\mu^{-2}\rho,$$

здесь значения величин α, β, γ, δ определяются в соответствии с (3), (4).

Пусть $\widetilde{\mathbf{P}}_2 = \operatorname{Int}_{\mathbf{H}}(\mathbf{P}_2)$, где $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ y & a^{-1} \end{pmatrix}$, $a = \varkappa^{-1/2}\mu\rho^{-1/2}$, $y = a'\delta^{-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{P}}_2 &= (\partial - \widetilde{\mathbf{L}} + \widetilde{\mathbf{K}} + \omega^2\mathbf{N})(\partial - \widetilde{\mathbf{L}} - \widetilde{\mathbf{K}} - \omega^2\mathbf{N}) - \xi^2 = \\ &= (\partial - \widetilde{\mathbf{L}} + \widetilde{\mathbf{K}})(\partial - \widetilde{\mathbf{L}} - \widetilde{\mathbf{K}}) + \omega^2\widetilde{\mathbf{F}} - \xi^2 = \\ &= \partial^2 - 2\widetilde{\mathbf{L}}\partial + \widetilde{\mathbf{M}} + \omega^2\widetilde{\mathbf{F}} - \xi^2, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\widetilde{\mathbf{F}} = \operatorname{diag}(\mu^{-1}\rho, \nu^{-1}\rho),$$

$$\widetilde{\mathbf{K}} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{K}_0\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \alpha + a^{-1}y\beta & a^{-2}\beta \\ -2ay\alpha + a^2\gamma - y^2\beta & -a^{-1}y\beta - \alpha \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{L}} = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{H}' + \mathbf{H}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & a^{-2}\delta \\ -ay' - a^2\gamma & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{M}} = -\widetilde{\mathbf{L}}' - \widetilde{\mathbf{K}}' + \widetilde{\mathbf{L}}^2 - \widetilde{\mathbf{K}}^2 + \widetilde{\mathbf{L}}\widetilde{\mathbf{K}} - \widetilde{\mathbf{K}}\widetilde{\mathbf{L}}.$$

По следствию *2* из предложения *3* работы [9] получаем, что оператор (5) триангулируется, если

$$\begin{aligned} &\widetilde{\mathbf{L}}_{21} = 0, \\ &\widetilde{\mathbf{K}}_{21} = C_0 = \mathrm{const}. \end{aligned} \tag{6}$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{L}} &= \begin{pmatrix} 0 & a^{-2}\delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \widetilde{\mathbf{M}} &= \begin{pmatrix} m + \det \mathbf{K}_0 & -(a^{-2}(\delta+\beta))' + 2a^{-2}\delta(\alpha + a^{-1}y\beta) \\ 0 & -m + \det \mathbf{K}_0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{7}$$

где $m = -(\alpha + a^{-1}y\beta)' + a^{-2}\delta C_0$, $\det \mathbf{K}_0 = -(\alpha + a^{-1}y\beta)^2 - a^{-2}\beta C_0$.

Сделать оператор (5) нижним треугольным с помощью следствия *1* из предложения *3* в [9] не удается, так как $\delta = \lambda + \mu \neq 0$ по физическим соображениям.

2. УСЛОВИЯ ТРИАНГУЛЯЦИИ ОПЕРАТОРА РЭЛЕЯ

Очевидно, уравнения (6), которые выражают условия триангуляции, имеют вид

$$\begin{cases} a' = \delta y \\ a\gamma + y' = 0 \\ \beta y^2 + 2\alpha a y + C_0 - a^2\gamma = 0, \end{cases} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} &a = \varkappa^{-1/2}\mu\rho^{-1/2}, \quad \alpha = \mu'\mu^{-1}, \quad \gamma = \varkappa(\mu^{-1})'', \\ &\beta = -\frac{1}{2\varkappa}\frac{\mu(\lambda + 3\mu)}{\nu}, \quad \delta = \frac{1}{2\varkappa}\frac{\mu(\lambda+\mu)}{\nu}, \\ &\delta + \beta = -\varkappa^{-1}\mu^2\nu^{-1}, \quad \delta - \beta = \varkappa^{-1}\mu. \end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, мы имеем систему двух уравнений с тремя неизвестными материальными параметрами λ, μ и ρ. Очевидно, что в качестве неизвестных могут быть выбраны также y, a, δ и μ в системе из трех уравнений (8).

Предложение 1. Система (8) *имеет интеграл*

$$C_1 = C_0 \varkappa \mu + \varkappa y z - \frac{1}{2}\mu^2 y^2, \tag{10}$$

где

$$z = a\mu'. \tag{11}$$

Общее решение (8) *может быть найдено следующим путем. Функция* $y(\mu)$ *выбирается произвольно,* $z(\mu)$ *определяется из* (10), $\delta(\mu)$ *из*

$$(\delta - \varkappa^{-1}\mu)y^2 + (2\mu^{-1}y + y'_\mu)z + C_0 = 0, \tag{12}$$

$a(\mu)$ *из*

$$z a^{-1} a'_\mu = \delta y. \tag{13}$$

После этого функция $\mu(x)$ *определяется интегрированием* (11), *а* λ *и* $\rho(x)$ *из* (9). *При этом предполагается, что* μ *не постоянна и что функции* y, z, δ *и* μ *не обращаются в нуль.*

Доказательство. Наличие интеграла устанавливается прямым дифференцированием (10) в силу (8). Условие (12) получается из второго и третьего уравнений системы (8) исключением γ с переходом к аргументу μ, а (13) является произведением первого уравнения системы (8) на уравнение (11).

Замечание. Конечно, найти решение и в том числе первый интеграл не так просто, как доказать справедливость полученного результата. Однако сколько-нибудь интересных сложностей здесь не возникает. Пользуясь тем, что система не зависит от x, можно исключить из нее dx. Затем, используя очевидную однородность, таким же образом исключается переменная a. Результатом этих операций будет решение. Интеграл обнаруживается как простое следствие выписываемых по ходу дела формул.

3. СИСТЕМА ЯНГА

Янг [4] преобразует систему (1), записанную в виде системы четырех уравнений первого порядка, стремясь упростить члены при ω^2, которые являются определяющими при высоких частотах. Остальные члены в общем случае не упрощаются. Однако если две функции, введенные Янгом, обращаются в нуль, то система сводится к двум уравнениям Штурма–Лиувилля.

В качестве полевых переменных выбираются, во-первых, взвешенные трансформанты смещений U_i, связанные с исходными трансформантами u_i соотношениями

$$U_i = \rho^{1/2} u_i, \quad i = 1, 2,$$

во-вторых, потенциалы $\mathbf{P}$ и S, определяемые формулами

$$\begin{aligned} U_1' &= -\omega^2 \rho \mu^{-1} \mathbf{P} + \xi U_2 - g U_1, \\ U_2' &= -\omega^2 \rho \nu^{-1} S + \xi U_1 + g U_2. \end{aligned} \tag{14}$$

Функция g определяется уравнениями

$$g_2 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}(\ln a^2)', \quad g_1 = (\ln\rho)' - g_2, \quad g = \frac{1}{2}(g_2 - g_1), \tag{15}$$

где a определено в (9). Тогда из уравнений (1) для P–SV-колебаний несложно выводятся уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{P}' &= U_1 - \xi S + g\mathbf{P} - \omega^{-2}c_2U_1, \\ S' &= U_2 - \xi\mathbf{P} - gS - \omega^{-2}c_1U_2, \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$c_1 = X_1' + g_2X_1, \quad c_2 = X_2' + g_1X_2, \quad X_1 = \frac{\mu}{\rho}g_1, \quad X_2 = \frac{\nu}{\rho}g_2. \tag{17}$$

Уравнения (14), (16) являются системой четырех уравнений первого порядка относительно четырех переменных $(U_1, U_2, \mathbf{P}, S)$.

Искомые уравнения Янга имеют вид

$$c_1 = c_2 = \text{const}. \tag{18}$$

Если материальные параметры среды им удовлетворяют, то каждая из компонент волнового вектора $w = (w_1, \ldots, w_4)$, где $w_1 = U_1 - \xi S$, $w_2 = \xi\mathbf{P}$, $w_3 = U_2 - \xi\mathbf{P}$, $w_4 = \xi S$, является решением некоторого уравнения Штурма–Лиувилля. Например,

$$\begin{aligned} w_2'' + ((\omega^2 + C_0)\frac{\rho}{\nu} - g' - g^2)w_2 - \xi^2 w_2 = 0, \\ w_4'' + ((\omega^2 + C_0)\frac{\rho}{\mu} + g' - g^2)w_4 - \xi^2 w_4 = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

где g определено в (17).

Так как w_2 и w_4 умножением на константу ξ^{-1} переводятся в $\mathbf{P}$ и S, соответственно, то по ним из (16) можно найти U_1, U_2, а следовательно, и трансформанты смещений u_1, u_2.

Уравнения для w_1 и w_3 эквивалентны (19).

Обозначим через m_2 и m_4 потенциалы уравнений (19), т.е. коэффициенты при w_2 и w_4. Найдя из (15) и (22), что $g = -(\alpha + a^{-1}y\beta)$, получим из (5) и (7), что система $\widetilde{\mathbf{P}}U = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} u_1'' + m_4u_1 - \xi^2u_1 + m_1u_2' + m_3u_2 = 0, \\ u_2'' + m_2u_2 - \xi^2u_2 = 0, \end{aligned} \tag{20}$$

где $m_1 = a^{-2}\delta$, $m_3 = -(a^{-2}(\delta+\beta))' - 2a^{-2}\delta g$.

Таким образом, диагональные операторы упрощенного оператора (5) совпадают с операторами Янга (19).

Предложение 2. Система(8) *совпадает с системой Янга*(18), *записанной в виде*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(c_2 - c_1) = 0 \\ \frac{1}{2}(c_2 + c_1) = -C_0 \\ a' = y\delta. \end{cases} \tag{21}$$

Доказательство. Поясним, что третье уравнение здесь просто вводит новую переменную y.

Очевидно требуется лишь согласовать обозначения. Опуская несложные вычисления, приведем выражения переменных g_1, g_2, X_1, X_2 через переменные, входящие в (8)

$$\begin{aligned} g_1 &= 2\alpha - \varkappa^{-1}a^{-1}\mu y, \\ g_2 &= -(\delta + \beta)a^{-1}y, \\ X_1 &= (2\varkappa z\mu^{-1} - y)a, \\ X_2 &= ay. \end{aligned} \tag{22}$$

Подстановка этих величин в (21) приводит к (8).

4. УСЛОВИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ ОПЕРАТОРА РЭЛЕЯ

Согласно предложению *4* первой части работы [9] имеется два не зависящих от частоты условия, при выполнении любого из которых оператор Рэлея (1) либо разложим на множители, либо триангулируем. Второе из этих условий имеет только математический смысл, среда с положительными параметрами ему удовлетворять не может, поэтому изучается только первое условие. Оно имеет вид [см. 9]

$$\begin{aligned} &\alpha_2\widetilde{\mathrm{L}}_{21} - \alpha_3\widetilde{\mathrm{L}}_{12} = 0, \\ &\alpha_2\widetilde{\mathrm{K}}_{21} + \alpha_3\widetilde{\mathrm{K}}_{12} = \alpha_1, \end{aligned}$$

где α_i – некоторые постоянные, $\widetilde{\mathbf{K}}$, $\widetilde{\mathbf{L}}$ – матрицы оператора (5).
Подставив сюда элементы этих матриц и добавив уравнение-обозначение для переменной y, получим систему

$$\begin{cases} a' = \delta y \\ \alpha_2 a(a\gamma + y') + \alpha_3 a^{-2}\delta = 0 \\ \alpha_2(a^2\gamma - 2a\alpha y - y^2\beta) + \alpha_3 a^{-2}\beta = \alpha_1, \end{cases} \tag{23}$$

где переменные a, δ, y, μ являются неизвестными функциями переменной x.

Согласно (9) величины α и δ выражаются через параметры среды и, обратно, λ и ρ выражаются через a, δ и μ, поэтому (23) эквивалентна системе двух уравнений для параметров среды.

Выпишем из (9) замыкающие систему (23) выражения: $\alpha = \mu^{-1}\mu'$, $\beta = \delta - \varkappa^{-1}\mu$, $\gamma = \varkappa(\mu^{-1})''$.

При $\alpha_3 = 0$ из (23) очевидно получается система (8). Поэтому среды, допускающие разложение на множители, но не триангулируемые, должны удовлетворять системе (23) при $\alpha_3 \neq 0$. Заметим, что согласно предложению *2* работы [9] бывают операторы триангулируемые, но не разложимые на множители.

Предложение 3. Система (23) решается в квадратурах. Выражаясь подробнее, общее ее решение получается из произвольно заданной функции некоторого аргумента с помощью операций интегрирования, обращения функции, подстановки и алгебраических операций, включая извлечение квадратного корня.

Это предложение можно еще сформулировать так. Посредством последовательности замен переменных система (23) сводится к одному уравнению с двумя неизвестными функциями. Относительно одной из них уравнение является линейным алгебраическим, а относительно другой – дифференциальным.

Разумеется, при разрешении системы могут возникнуть особенности, связанные с операциями деления, извлечения корня и обращения функций, здесь мы оставляем их без рассмотрения.

Доказательство. Первым шагом в решении является чисто косметическое преобразование системы (23).

Вычтем из третьего уравнения второе, чтобы вторая производная μ (т.е. γ) осталась только в одном уравнении, и добавим к системе еще одно уравнение, выразив γ через производную от α. Получим систему четырех уравнений первого порядка. Так как при $\alpha_3 = 0$ система уже решена, а случай $\alpha_2 = 0$ не интересен, будем считать, что $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_3 \neq 0$. Тогда можно сделать сокращающую количество констант подстановку

$$\mu = \varkappa c_1 s, \quad \alpha_2 = c_1\alpha_3, \quad \alpha_1 = -\alpha_3 c_1 c_2,$$

где c_1, c_2 – постоянные.

Тогда $\beta = \delta - c_1 s$, $\gamma = c_1^{-1}s^{-1}(\alpha^2 - \alpha')$, и в итоге получим систему

$$\begin{cases} s' = \alpha s \\ a' = \delta y \\ a^2 s^{-1}(\alpha^2 - \alpha') + c_1 a y' + a^{-2}\delta = 0 \\ 2a\alpha y + a y' + y^2\delta - c_1 s y^2 + s a^{-2} = c_2 \end{cases} \tag{24}$$

с неизвестными s, α, a, δ, y.

Второй шаг, по существу, является решающим. Используя линейность системы по производным переменных и по δ, а также отсутствие в них производной δ, можно понизить порядок системы на единицу, например, следующим образом. Сначала исключим y' из последнего уравнения, сдвинув δ на y' с очевидным коэффициентом. Затем уничтожим y' во втором (где он возникнет после замены δ) и третьем уравнениях путем замены переменных a и α, соответственно. Объединив эти действия, получим следующую подстановку:

$$\begin{aligned} &\delta = v + t y^{-3} y', \\ &a = -t y^{-1}, \\ &\alpha = u - \frac{1}{2} s y^2 t^{-1} b, \end{aligned} \tag{25}$$

где $b = c_1 - t^{-2}$, t, u, v – новые переменные вместо a, α, δ.

Некоторого вычисления требует лишь подстановка в третье уравнение, в результате имеем

$$\begin{cases} s' = \alpha s \\ t' = -vy^2 \\ t^2(\alpha^2 - u') + \frac{1}{2}sy^2 b(\alpha t + vy^2) = 0 \\ vy^2 - 2tu = c_2. \end{cases} \tag{26}$$

Здесь неизвестны s, t, u, v, y.

Теперь система легко решается. Так как она не зависит от x, выберем в качестве новой независимой переменной s, попутно исключая из системы v с помощью последнего уравнения и заменяя y на p по формуле $y^2 = s^{-1}p$. В результате получим

$$\begin{cases} \alpha s t'_s = -e \\ t^2\alpha(\alpha - su'_s) + \frac{1}{2}pb(\alpha t + e) = 0, \end{cases} \tag{27}$$

где $\alpha = u - \frac{1}{2}pt^{-1}b$, $e = 2tu + c_2$, b то же, что в (25), неизвестны t, u, p.

Так как теперь s присутствует только в виде дифференциала логарифма, то взяв, например, t в качестве нового аргумента, получим искомое уравнение относительно p, коэффициенты которого зависят от произвольной функции $u(t)$

$$t^2(\alpha^2 + eu'_t) + \frac{1}{2}pb(\alpha t + e) = 0,$$

после подстановки сюда α, b, e квадратичный по p член исчезнет, окончательно имеем

$$p(tu + c_2)(c_1 - t^{-2}) + 2t^2((2tu + c_2)u'_t + u^2) = 0. \tag{28}$$

Сокращение членов свидетельствует о наличиии неоптимальности либо в алгоритме, либо в записи (24) исходной системы. Возможно вместо α следовало взять просто производную μ или μ^{-1}.

В заключение раздела поясним логику решения. После определения функций $u(t)$ и $p(t)$ в (28) из любого уравнения (27) интегрированием находим $\ln(s(t))$, затем также интегрированием можно найти $x(t)$, например, из второго уравнения системы (26) (разумеется, после вычисления $y(t)$ и $v(t)$). Обратив $x(t)$, выразим найденные переменные в виде функций от x, дальнейшее ясно. Не совсем ясно начало – как выбрать произвольную функцию $u(t)$? Одним из путей является численный анализ, в ходе которого в качестве исходной функции можно взять один из параметров среды, а функцию $u(t)$ найти путем численного решения дифференциальной системы. График $u(t)$ может подсказать аналитическую формулу.

5. ПРИМЕРЫ

5.1. Степенные среды

Исследуем случай, когда параметры среды имеют вид

$$(\mu, \lambda) = (\mu_0, \lambda_0)x^s, \quad \rho = \rho_0 x^t$$

с постоянными μ_0, λ_0, ρ_0, s, t.

Будут определены те значения этих констант, при которых система Рэлея (1) триангулируется, и выписаны диагональные операторы соответствующей треугольной системы.

Так как переменная x не входит явно ни в одно из уравнений систем (1), (8), то, заменив x на $x + x_1$, $x_1 > 0$, можно получить среду без особенностей при $x \geq 0$.

В качестве условий триангуляции используем уравнения (8) и их интеграл (10). Полагая $a = a_0 x^r$, найдем из $(9)_1$, что $t = 2(s-r)$, и после подстановки параметров в уравнения и несложных вычислений получим систему

$$\begin{cases} s(s+1) + 2dr(r-s-1) = 0 \\ r(s-dr)x^{2r-2} + C_2 x^s = C_3 \\ r((d-2)r+1)x^{2r-2} = C_3, \end{cases} \tag{29}$$

где r, s, d неизвестны, $d = \nu_0(\lambda_0 + \mu_0)^{-1}$, C_2 и C_3 – произвольные постоянные, причем C_2 и C_0 из (8) связаны соотношением

$$C_0 = 2\varkappa a_0^2 \mu_0^{-1} d C_2,$$

так что при определенных из (29) значениях величин a_0, μ_0, d, C_2 постоянная C_0 может быть взята произвольно благодаря произвольности $\varkappa$.

При выполнении (29) диагональные члены треугольного оператора (5) согласно (7) и (20) представляются в виде

$$\begin{aligned} Q_1 &= \partial^2 + C_6 \mu_0^{-1} x^u + C_4 x^{-2} - \xi^2, \\ Q_2 &= \partial^2 + C_6 \nu_0^{-1} x^u + C_5 x^{-2} - \xi^2, \end{aligned} \tag{30}$$

где $u = t - s$, $C_6 = (\omega^2 + C_0)\rho_0$, $C_4 = -g_0 - g_0^2$, $C_5 = g_0 - g_0^2$, $g_0 = 2dr - r - s$.

Решение системы (29) элементарно, ответ делится на 6 типов, рассмотрим их по порядку.

1. $s = t = u = r = 0$; $C_0 = C_4 = C_5 = 0$. Среда однородна, операторы (30) имеют постоянные коэффициенты.

В первых трех случаях μ_0, λ_0, ρ_0 задаются произвольно, в остальных трех произвольно только ρ.

2. $s = 0$, $t = u = -2$, $r = 1$; $C_0 \neq 0$, $g_0 = 2d - 1$.

Операторам (30) соответствуют уравнения Бесселя. Этот пример имеется у Хука [7].

3. $s = -1$, $t = -2$, $u = -1$, $r = 0$; $C_0 = C_5 = 0$, $C_4 = -2$.

Операторы (30) – уиттекеровы [12]. Этот пример появился в работе Янга [4].

4. $s > -1$, $t = s - 1$, $u = -1$, $r = \frac{1}{2}(s+1)$; μ_0 и λ_0 связаны равенством $d = 2 - r^{-1}$, $g_0 = \frac{1}{2}(s-1)$, $C_0 = 0$.

Операторы (30) снова уиттекеровы.

5. $s > 0$, $t = s - 2$, $u = -2$, $r = \frac{1}{2}s + 1$; μ_0 и λ_0 связаны: $d = 2 - r^{-1}$, $C_0 \neq 0$, $g_0 = -\frac{1}{2}s$.

В (30) теперь операторы Бесселя.

При $s = 2$ среда называется слоем Гунта [8].

6. $1 < s < 3$, $t = 2s - 2$, $u = s - 2$, $r = 1$; $d = \frac{1}{2}(s+1)$, $C_0 = C_4 = C_5 = 0$.

В теоретической физике операторы вида (30) называют операторами Шредингера с обобщенным кулоновым потенциалом. При $s = 2$ получается среда Пикериса [5], а коэффициенты операторов (30) становятся постоянными.

5.2. Среды Зволинского и Пикериса

Эти уже довольно давно обнаруженные [5, 6] случаи интегрирования уравнений Рэлея имеют общее свойство – постоянство скоростей сдвиговых волн $v_s^2 = \mu/\rho$ и волн сжатия $v_p^2 = \nu/\rho$. Вследствие этого все величины, входящие в систему (23), выражаются через μ. Результат подстановки имеет вид

$$\begin{cases} p_1(\mu^{-1}\mu')^2 + p\mu^{-1}\mu'' = c_3 \\ p_2(\mu^{-1}\mu')^2 - \mu^{-1}\mu'' = c_4, \end{cases} \tag{31}$$

где c_3, c_4 – произвольные постоянные, причем c_3 пропорциональна $\alpha_2^{-1}\alpha_3$ с коэффициентом, зависящим от скоростей

$$p_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}p, \quad p_2 = 1 - p + 2p^2, \quad p = \mu/(\lambda + \mu) = \text{const}.$$

Если значения скоростей таковы, что определитель системы (31) отличен от нуля, то система (31) имеет семейство решений $\mu = \mu_0 e^{Rx}$, где μ_0 и R произвольны. Это семейство называется средами Зволинского [13].

Определитель системы (31) имеет корни $p = -1, 1, \frac{1}{2}$. Физический смысл имеет только значение $\frac{1}{2}$, в этом лучае $\lambda = \mu$, т. е. среда является пуассоновой. Система (31) сводится тогда к уравнению

$$\mu^{-1/2}(\mu^{1/2})'' = c_3,$$

решение которого в зависимости от значения c_3 имеет один из трех видов:

$$\mu^{1/2} = \begin{cases} A\,\mathrm{ch}Rx + B\,\mathrm{sh}Rx \\ A\cos Rx + B\sin Rx \\ A + Bx. \end{cases}$$

Среда, в которой μ изменяется по одному из этих законов, называется средой Пикериса [14].

Таким образом, система уравнений Рэлея для сред Зволинского и Пикериса допускает понижение порядка. Оператор может не триангулироваться, тогда он разлагается на множители.

5.3. Оператор Дирака

Рассмотрим частный случай разложения на множители оператора, который получается из (2) матричным преобразованием

$$\mathbf{P} = (\partial + \mathbf{V})(\partial - \mathbf{V}) - \xi^2 = (\partial + \mathbf{V} + i\xi\mathbf{I})(\partial - \mathbf{V} - i\xi\mathbf{I}), \tag{32}$$

где i – комплексная мнимая единица, $\mathbf{I}$ – матричная:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{sp}\,\mathbf{V} = 0.$$

Легко видеть, что это разложение эквивалентно равенству $\mathbf{VI} + \mathbf{IV} = 0$, которое означает, что матрица $\mathbf{V}$ симметрическая, т.е. $v_2 = v_3$. Следовательно, каждый сомножитель в (32) является приведенным к канонической форме оператором "типа Дирака", по определению в монографии [15], половина которой посвящена изучению спектральных свойств таких операторов.

Оператор (32) не триангулируется в общем случае, так как согласно [9] для этого требуется выполнение соотношения

$$2\alpha\beta v_1 - \beta^2 v_2 + \alpha^2 v_2^2 = \gamma$$

с постоянными α, β, γ. Для оператора *одномерной стационарной системы Дирака* [15] с потенциалом

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & m + v(x) \\ m - v(x) & 0 \end{pmatrix},$$

т.е. оператора $\partial + \mathbf{W} + i\xi\mathbf{I}$, каноническая форма имеет вид

$$\mathbf{V} = m \begin{pmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad \varphi' = v. \tag{33}$$

Здесь m – масса частицы, а уравнение описывает движение ее по прямой в поле с потенциалом v. Приведение к этой форме осуществляется матричным преобразованием.

Оператор (32) с потенциалом (33) также не триангулируется при непостоянной φ. Из результатов, полученных в работе [16], следует, что при некоторых условиях на $\mathbf{V}$ оператор (32) локально эквивалентен оператору упругости в слоистой среде. Поскольку потенциал (33) является всего лишь упрощенной моделью, не ясно, следует ли эти условия изучать.

В реальном уравнении Дирака, т.е. в системе для радиальных компонент волновой функции электрона, движущегося в центральном поле, потенциал имеет вид [16]

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} -kx^{-1} & m + v \\ m - v & kx^{-1} \end{pmatrix}, \tag{34}$$

где k – квантовый параметр.

Наличие этого параметра резко изменяет характер оператора. Он плохо приводится к симметрическому виду – в матрице $\mathbf{V}$ возникают элементы вида $x^{-1}\sin(\ln x)$ (в случае, когда $v = -Ze^2x^{-1}$ – поле Кулона). Оказалось, что, не ухудшая особенности в точке $x = 0$, потенциал (34) можно привести к кососимметрической форме, которую, видимо, и следует считать канонической. В связи с этим, не ясно, в какой мере результаты работы [15] можно распространить на оператор с потенциалом (34). Исследование упругой среды, интерпретирующей оператор Дирака, и в первую очередь, ее асимптотики при $x \to 0$ выходит за рамки настоящей работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Не задерживаясь на общих соображениях о полезности рассмотрения специальных случаев для решения любой общей задачи, обсудим возможности приложения результатов, которые опираются на их конкретику.

Довольно обширная область приложений охватывается словом "аппроксимация". Во-первых, простые среды (назовем так для краткости среды, для которых в уравнения Рэлея (1) можно понизить порядок одним из двух рассмотренных способов) можно использовать для послойной аппроксимации заданной среды в алгоритмах счета теоретических сейсмограмм. Сейчас для этого используются только однородные среды. Простую среду, согласно предложениям *1* и *3*, можно регулировать сколь угодно большим количеством параметров, добиваясь все большего приближения к данной среде и за счет этого сокращая число слоев. Процедура аналогична использованию схем высокого порядка в численных методах решения дифференциальных уравнений, и, вероятно, она наследует недостатки этих методов, из-за которых их используют крайне редко.

Более перспективным представляется другой путь – это метод последовательных приближений, основанный на аппроксимации оператора (1) простым оператором. Не очень рискуя ошибиться, можно утверждать, что без этого метода не обходится решение ни одной сколько-нибудь сложной задачи. Метод состоит в следующем. Согласно предложению *1* или *3* в операторе (1) можно выделить ведущее слагаемое, которое будет простым оператором, так что добавка к нему будет обращаться в нуль на решениях системы (8) или (23). При выделении надо стремиться к тому, чтобы добавочный оператор был мал по сравнению с ведущим. Процедура не однозначна, малость добавки определяется условиями конкретной задачи, хотя ряд приемов является общим для многих случаев. Этим приемам, равно как и искусству их применения, посвящена книга [17].

В нашем случае добавочный оператор имеет второй порядок, в то время как ведущий – четвертый, и, кроме того, при высоких частотах он также оказывается подчинен ведущему. Таким же образом рассуждает Янг [4]. Его метод, по-видимому, в точности эквивалентен представлению оператора (5) в виде треугольного по модулю системы (8). При высоких частотах в качестве ведущего члена в (5) можно взять либо треугольную часть оператора, и это должно совпадать с процедурой Янга, либо просто трансформанту волнового оператора, отправив в добавочный оператор величину $-2\widetilde{\mathbf{L}}\partial+\widetilde{\mathbf{M}}$. По сравнению с [4] у нас есть возможность выбрать в качестве ведущего оператор, разложимый на множители, так, чтобы добавленный оператор обращался в нуль на решениях (23).

Опираясь на предложения *1* и *3* можно выписать сколько угодно простых сред, параметры которых выражаются в элементарных функциях. Но задача сложнее – надо найти среды с вычислимыми дисперсионными кривыми. Чтобы ее решить, необходимо совместить процедуру получения этих кривых с упрощением уравнений. При этом для записи полевых уравнений нужно испытать переменные, введенные в предложениях *1* и *3*. Мы ограничились поверхностным поиском таких примеров и привели из них те, для которых полевые уравнения либо являются специальными, либо решаются.

Пример, связанный с оператором Дирака, имеет не только теоретическое значение как неожиданная параллель между двумя теориями. Его можно попробовать использовать для построения примера краевой задачи с комплексными точками спектра. Надежда связана с тем, что волновой функции уравнения Дирака с обязательно вещественным значением энергии соответствует некоторое поле смещений (рэлеевское?) с чисто мнимым волновым числом.

Не исключается возможность понижения порядка в системе (1) общего вида с помощью дифференциально матричных преобразований, специальные виды которых нами уже использовались. Очевидно, теория не может считаться завершенной без проведения этого исследования, а к нему вряд ли можно подступиться, не исследовав чисто матричный случай.

Авторы благодарны Б.Г. Букчину, С.Г. Киселеву и Г.М. Молчану за полезные обсуждения, которые способствовали улучшению статьи. С.Г. Киселев указал случай 5 среды со степенной зависимостью параметров.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 96-05-65878 и грант 97-05-65629) и РФФИ-ИНТАС (грант INTAS 95-0865).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
2. *Зильберштейн А.С., Копилевич Ю.И.* Спектральная теория регулярных волноводов. Л.: Физ.-техн. институт им. Йоффе АН СССР, 1983. 301 с.
3. *Tolstoy I., Usdiu E.* Wave propagation in elastic plates: low and high mode dispersion // J. Acoust. Soc. Amer. 1957. Vol.29, N 1. P.37-42.
4. *Young R.M.* P-SV interaction in layered media // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1983. Vol.74. P.613-620.
5. *Pekeris C.L.* The propagation of Rayleigh waves in heterogeneous media // Physics. Vol.6. 1935. P.133-136.
6. *Зволинский Н.В.* Волны Рэлея в неоднородном упругом полупространстве частного типа // Изв. АН СССР. 1945. Т.IX, N 3. С.261-278.
7. *Hook J.F.* Contributions to a theory of separability of the vector wave equation of elasticity for inhomogeneous media // J. Acoust. Soc. Amer. 1962. Vol.34. P.149-177.
8. *Gupta R.N.* Reflection of elastic waves from a linear transition layer // Bull. Seismol. Soc. Amer. 1966. Vol.56. P.511-526.
9. *Кузнецов А.Н.* Об условиях понижения порядка системы Рэлея. I. Общая теория. Наст.сб.
10. *Киселев С.Г., Кузнецов А.Н., Маркушевич В.М., Цемахман А.С.* Разложение на множители и форма Штурма–Лиувилля уравнений для P–SV-колебаний слоистых сред // Теоретические проблемы в геофизике. (Вычисл. сейсмология. Вып. 29). М.: Наука, 1997. С.44-69.
11. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. Т.1. М.: Мир, 1983. 520 с.
12. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
13. *Маркушевич В.М., Цемахман А.С.* Дисперсия волн Рэлея в средах Зволинского при произвольном коэффициенте Пуассона // Геодинамика и прогноз землетрясений. (Вычисл. сейсмология. Вып. 26). М.: Наука, 1994. С.226-238.
14. *Завадский В.В., Киселев С.Г., Макеев О.А., Маркушевич В.М.* Рэлеевские волны в средах Пикериса. II. Дисперсионные свойства // Теоретические проблемы геодинамики и сейсмологии. (Вычисл. сейсмология. Вып. 27). М.: Наука, 1994. С.158-170.
15. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1979. 584 с.
16. *Мессиа А.* Квантовая механика. Т.2. М.: Наука, 1979. 584 с.
17. *Богаевский В.Н., Повзнер А.Я.* Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. М.: Наука, 1987. 256 с.