УДК 532.5+514.83

О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ВО ВНЕШНЕМ ЯДРЕ ЗЕМЛИ

Л.М. Розенкноп, Е.Л. Резников

Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук

В пространстве бездивергентных полей в шаровом слое построен базис из собственных полей оператора Лапласа, равных нулю на границе слоя, шаровой слой соответствует жидкому ядру в модели Земли. Показано, что если упорядочить собственные поля оператора Лапласа по возрастанию собственных чисел, то полученный базис окажется также упорядоченным по степени осциллируемости базисных полей. Этот базис, кроме того, использован для весьма простого (опирающегося на теорему Карлемана) доказательства полноты системы собственных и присоединенных функций задачи о свободных колебаниях вязкой жидкости в шаровом слое при малых отклонениях от твердотельного вращения.

ON THE FREE OSCILLATIONS OF A ROTATING VISCOUS FLUID IN THE OUTER EARTH CORE

L.M. Rozenknop and E.L. Reznikov

International Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences

The basis of Laplacian eigenfields which vanish at the boundary of a spherical layer has been constructed in the space of solenoidal fields defined in this layer, the layer corresponding to the fluid Earth core. It is shown that the Laplacian eigenfields when arranged in the order of increasing eigenvalues are also arranged in the order of increasing oscillatoriness. This basis is also used for a simple proof (based on the Karleman theorem) demonstrating that eigen and adjoint eigen functions of the operator in the problem of free oscillations of a viscous fluid in the spherical layer under small deviations from solid-body rotation constitute a complete system.

ВВЕДЕНИЕ

Содержание данной работы связано со спектром свободных колебаний вязкой жидкости в шаровом слое при малых отклонениях от твердотельного вращения. Шаровой слой здесь соответствует жидкому ядру в простейшей модели Земли. В работе описан процесс построения собственных полей оператора Лапласа и вычисления соответствующих собственных чисел. Эти поля, расположенные в порядке возрастания собственных чисел, образуют базис, в котором поля упорядочены по степени осциллируемости в пространстве. Такой базис может быть полезен при построении галеркинских приближений к собственным полям данной задачи, а также, по мнению авторов, и в других задачах гидродинамики в шаровом слое. Первое собственное число оператора Лапласа и величина вязкости позволяют (весьма грубо) оценить снизу модуль действительной части ближайшего к нулю собственного значения исходной задачи.

В данной работе также содержится простое доказательство полноты системы собственных и присоединенных функций оператора данной задачи. Этот факт известен и вытекает из общей теории линейной гидродинамической устойчивости (см. [1, 2]). Доказательство, опирающееся на теорему Карлемана, адресовано читателю, не являющемуся профессиональным математиком.

Разделы 1 и 2 написаны авторами совместно, раздел 3 написан Л.М. Розенкнопом.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть H – гильбертово пространство бездивергентных векторных полей в шаровом слое Ω со скалярным произведением

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int\limits_{\Omega} (\mathbf{p}, \mathbf{q}) dv.$$

Рассмотрим в H следующую спектральную задачу:

$$A\mathbf{q} \equiv 2[\mathbf{1}_z, \mathbf{q}] - \nabla\Phi - \varepsilon \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{q} = \lambda\mathbf{q}, \quad \operatorname{div}\mathbf{q} = 0, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{q}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.2}$$

Здесь Ω – шаровой слой с внутренним радиусом r_0 и внешним, равным единице; $\mathbf{1}_z$ – единичный вектор оси вращения; $\varepsilon > 0$ – кинематическая вязкость; Φ – неизвестная скалярная функция (потенциал), возникающая в связи с условием $\operatorname{div}(A\mathbf{q}) = 0$: вычитание $\nabla\Phi$ есть проектирование поля $2[\mathbf{1}_z, \mathbf{q}]$ в пространство H.

Уравнение (1.1) и граничное условие (1.2) – это математическая формулировка задачи о малых собственных колебаниях вязкой жидкости в шаровом слое (см. [3]). В данной работе исследуются некоторые свойства спектра оператора A, заданного формулами (1.1) и (1.2). Для этого используется конструкция базиса в пространстве H, который может быть полезен и при построении галеркинских приближений к собственным полям этой задачи.

Область определения оператора $D(A)$: множество полей в H, имеющих непрерывные вторые производные и удовлетворяющих условию (1.2). Очевидно, $D(A)$ – линейно и плотно в H.

Оператор $P : \mathbf{q} \to 2[\mathbf{1}_z, \mathbf{q}] - \nabla\Phi$ называется оператором Пуанкаре. Известно (см., например, [3]), что оператор P – кососимметричен и норма $|P| = 2$.

С помощью формулы $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}$ легко показать, что оператор $\operatorname{rot}\operatorname{rot}$ симметричен на полях из $D(A)$, т.е.

$$\langle \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{q}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{p} \rangle, \quad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in D(A).$$

На бездивергентных полях справедливо равенство $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{q} = -\Delta\mathbf{q}$, где Δ – оператор Лапласа. Поэтому $A = P - \varepsilon B$, где $B = -\Delta = \operatorname{rot}\operatorname{rot}$ – симметричный оператор на $D(A)$.

2. ПОСТРОЕНИЕ БАЗИСА ИЗ СОБСТВЕННЫХ ПОЛЕЙ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В ШАРОВОМ СЛОЕ

Опишем процесс нахождения собственных полей и собственных чисел оператора B. Эти результаты будут использованы в разд. 3.

2.1. Предварительные сведения

Перечислим несколько используемых здесь известных фактов (они содержатся, например, в [4,5]).

1. Известно, что $2m+1$ сферических функций m-го порядка

$$P_m^n(\theta,\varphi) = e^{in\varphi}P_m^{(n)}(\cos\theta), \qquad n = 0, \pm 1, \ldots, \pm m,$$

удовлетворяют соотношению

$$\Delta_s P_m^n = -m(m+1)P_m^n.$$

Здесь $\Delta_s = \dfrac{1}{\sin\theta}\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right) - \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$ – угловая часть скалярного оператора Лапласа (r, θ, φ – сферические координаты в области Ω), $P_m^{(n)}(\cos\theta) = (1-x^2)^{n/2}d^nP_m(x)/dx^n\big|_{x=\cos\theta}$, (где $P_m(x)$ – полином Лежандра m-й степени). В сферических координатах оператор Лапласа на скалярных функциях имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \Delta_s\right]. \tag{2.1}$$

2. Сферические функции удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\int\limits_{S_1} P_k^l P_m^n \, d\sigma = \delta_{km}\delta_{ln}Z_{kl}, \tag{2.2}$$

$$\int\limits_{S_1} (\nabla_s P_k^l, \nabla_s P_m^n)\, d\sigma = k(k+1)\delta_{km}\delta_{ln}Z_{kl}. \tag{2.3}$$

Здесь S_1 – единичная сфера, $Z_{kl} = \displaystyle\int\limits_{S_1}(P_k^l)^2\,d\sigma$, $\nabla_s = \dfrac{\partial}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi$ – угловой градиент, $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ – орты локального базиса.

3. Векторные поля, удовлетворяющие соотношениям

$$\mathbf{B}_t = \operatorname{rot}(T(\mathbf{r})\mathbf{r}), \qquad \mathbf{B}_p = \operatorname{rot}\operatorname{rot}(P(\mathbf{r})\mathbf{r})$$

($T(\mathbf{r})$ и $P(\mathbf{r})$ – произвольные скалярные функции), называются, соответственно, ***тороидальными и полоидальными*** полями. Известно (например, из [5,6]), что пространство бездивергентных полей разлагается в ортогональную сумму подпространств, состоящих из тороидальных и полоидальных полей; кроме того, $\Delta(P(\mathbf{r})\mathbf{r}) = \Delta P(\mathbf{r})\mathbf{r}$ и

$$\mathrm{rot}\mathbf{B}_p = -\mathrm{rot}(\Delta P(\mathbf{r})\mathbf{r}). \tag{2.4}$$

Из формулы (2.4) следует, что оператор $B = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}$ сохраняет тип поля: полоидальные поля переводит в полоидальные, тороидальные – в тороидальные. Это значит, что пространство H есть ортогональная сумма подпространств, инвариантных для оператора B, и можно искать отдельно собственные поля тороидального и полоидального типов.

2.2. Тороидальные и полоидальные собственные поля

1. Пусть функция $Q(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению

$$-\Delta Q(\mathbf{r}) = \lambda Q(\mathbf{r}), \tag{2.5}$$

где Δ – скалярный оператор Лапласа, λ – некоторое число.

Тогда из (2.4) следует, что тороидальное поле $\mathbf{t} = \mathrm{rot}(Q(\mathbf{r})\mathbf{r})$ будет собственным для оператора B, так как

$$B\mathbf{t} = -\mathrm{rot}(\Delta Q(\mathbf{r})\mathbf{r}) = \lambda \mathrm{rot}(Q(\mathbf{r})\mathbf{r}).$$

И наоборот: если $\mathbf{t} = \mathrm{rot}(Q(\mathbf{r})\mathbf{r})$ – ненулевое собственное поле для оператора B, то

$$-\mathrm{rot}(Q(\mathbf{r})) = \lambda \mathrm{rot}(Q(\mathbf{r})\mathbf{r}),$$

или

$$(\Delta Q(\mathbf{r}) + \lambda Q(\mathbf{r}))\mathbf{r} = \nabla\varphi,$$

где φ – некоторая функция. Если $\nabla\varphi \not\equiv 0$, то, очевидно, $\nabla\varphi = \dfrac{d\varphi}{dr}\mathbf{e}_r$ и Q должна быть функцией только одной радиальной переменной r. Но тогда

$$\mathbf{t} = \mathrm{rot}(Q(r)\mathbf{r}) = [\nabla Q(\mathbf{r}), \mathbf{r}] = 0.$$

Так как поле $\mathbf{t}$ предполагалось ненулевым, то $\nabla\varphi = 0$, и $-\Delta Q(\mathbf{r}) = \lambda Q(\mathbf{r})$.

Точно так же (применяя формулу (2.4) дважды) можно убедиться, что полоидальное поле $\mathbf{p} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}(F(\mathbf{r})\mathbf{r})$ будет собственным для оператора B (с собственным числом $\tilde{\lambda}$) тогда и только тогда, когда

$$\Delta^2 F + \tilde{\lambda}\Delta F = 0. \tag{2.6}$$

2. Собственные поля оператора B должны удовлетворять граничному условию (1.2). Решая уравнение (2.5) методом разделения переменных (и пользуясь формулой (2.1) для оператора Δ), получим, что функции $Q(\mathbf{r})$ имеют вид $Q(\mathbf{r}) = R(r)P_k^l(\theta, \varphi)$, где $R(r)$ – собственная функция оператора

$$T_k = \frac{1}{r^2}(k(k+1) - \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial}{\partial r})). \tag{2.7}$$

Тороидальное поле $\mathbf{t} = \operatorname{rot}(R(r)P_k^l \mathbf{r}) = R(r)[\nabla P_k^l, \mathbf{r}]$ будет удовлетворять условию (1.2), если

$$R(r_0) = R(1) = 0. \tag{2.8}$$

В разд. 2.3 будет показано, как найти собственные числа λ_{ik} и соответствующие собственные функции $R_{ik}(r)$ оператора T_k. Таким образом, тороидальные собственные поля оператора B имеют вид

$$\mathbf{t}_{ik}^l = \operatorname{rot}(R_{ik}(r)P_k^l(\theta, \varphi)), \quad l = 1, 2, \ldots, \quad k = l, l+1, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Решая подобным образом уравнение (2.6), получим:

$$F = \tilde{R}(r)P_m^n(\theta, \varphi),$$

где функция $\tilde{R}(r)$ удовлетворяет уравнению

$$T_m^2 \tilde{R} = \tilde{\lambda} T_m \tilde{R} \tag{2.9}$$

(оператор T_m определен формулой (2.7)).

Из соотношения $\mathbf{p} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\tilde{R}(r)P_m^n \mathbf{r}) = \tilde{R}[\nabla, [\nabla P_m^n, \mathbf{r}]] + [\nabla \tilde{R}, [\nabla P_m^n, \mathbf{r}]]$ следует, что поле $\mathbf{p}$ будет удовлетворять условию (1.2), если

$$\begin{cases} \tilde{R}(r_0) = \tilde{R}(1) = 0 \\ \tilde{R}'(r_0) = \tilde{R}'(1) = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Уравнение (2.9) имеет набор решений $\{\tilde{R}_{jm}(r)\}$, удовлетворяющих условиям (2.10), и соответствующий набор чисел $\{\tilde{\lambda}_{jm}\}$ (как их вычислить – показано в разд. 2.3). Таким образом, полоидальные собственные поля оператора B имеют вид

$$\mathbf{p}_{jm}^n = \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\tilde{R}_{jm}(r)P_m^n(\theta, \varphi)\mathbf{r}) \quad n = 1, 2, \ldots, \quad m = n, n+1, \ldots, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

3. В пространстве бездивергентных полей в ограниченной связной области Ω собственные поля оператора $B = -\Delta$, удовлетворяющие условию (1.2), образуют полную ортогональную систему, а сам оператор B – положительно определен [7, гл. 6]. Следовательно, построенные тороидальные и полоидальные собственные поля (с подходящими коэффициентами) образуют ортонормированный базис в H. Этот базис можно превратить в вещественный, рассматривая линейные комбинации экспонент, входящих в P_k^l. Всюду в дальнейшем будем считать, что набор полей $\{\mathbf{t}_{ik}^l, \mathbf{p}_{jm}^n\}$ – ортонормированный вещественный базис в пространстве H.

4. Более детальное изучение матрицы оператора P в построенном базисе [8] (с учетом формул (2.2) и (2.3) и рекуррентных соотношений для полиномов Лежандра [4]) показывает, что пространство H распадается в прямую сумму инвариантных относительно оператора A подпространств H^l,

$l = 1, 2, \ldots$, соответствующих верхнему индексу в обозначении сферической функции. Базис в каждом H^l образован полями $\{\mathbf{t}^l_{ik}, p^l_{jm}\}$, где l – фиксировано, k и m независимо пробегают значения $l, l+1, l+2, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$. Очевидно, что все дальнейшие рассмотрения можно проводить в произвольном H^l, которое для простоты, будем обозначать прежним символом H.

2.3. Выбор функций, зависящих от радиуса, для собственных полей оператора Лапласа

Покажем, как вычислить наборы $\{\lambda_{ik}, R_{ik}\}$ и $\{\tilde{\lambda}_{jm}, \tilde{R}_{jm}\}$ для завершения построения базиса в H.

1. Рассмотрим уравнение

$$T_k R = \lambda R, \tag{2.11}$$

где T_k определен формулой (2.7), $\lambda = \xi^2 > 0$.

Оно имеет общее решение

$$R = C_1 j_k(\xi r) + C_2 y_k(\xi r),$$

где j_k и y_k – сферические бесселевы функции k-го порядка [9]. Условия (2.8) дают систему уравнений для определения C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 j_k(\xi r_0) + C_2 y_k(\xi r_0) = 0 \\ C_1 j_k(\xi) + C_2 y_k(\xi) = 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Нули функции

$$\det{}_1(\xi) = \begin{vmatrix} j_k(\xi r_0) & y_k(\xi r_0) \\ j_k(\xi) & y_k(\xi) \end{vmatrix}$$

дают набор $\{\xi_{ik}\}$ и соответствующий набор $\{R_{ik}\}$

$$R_{ik}(r) = C_1(\xi_{ik}) j_k(\xi_{ik} r) + C_2(\xi_{ik}) y_k(\xi_{ik} r),$$

где $C_1(\xi_{ik})$, $C_2(\xi_{ik})$ – решения системы (2.12) при $\xi = \xi_{ik}$.

2. Уравнение

$$T_m^2 \tilde{R} = \tilde{\lambda} T_m \tilde{R} \qquad (\tilde{\lambda} = \nu^2 > 0)$$

имеет общее решение

$$\tilde{R} = \tilde{C}_1 j_m(\nu r) + \tilde{C}_2 y_m(\nu r) + \tilde{C}_3 r^m + \tilde{C}_4 r^{-(m+1)},$$

где первые два члена – общее решение уравнения (2.11) при $\lambda = \nu^2$, а последние два принадлежат ядру оператора T_m. Граничные условия (2.10) дают систему уравнений для определения $\tilde{C}_n$, $n = 1, \ldots, 4$. Пользуясь соотношением

$$f_n'(z) = f_{n-1}(z) - \frac{n+1}{z} f_n(z)$$

для сферических бесселевых функций [9], можно записать определитель этой системы

$$\det_2(\nu)=\begin{vmatrix} j_m(\nu r_0) & y_m(\nu r_0) & r_0^m & r_0^{-(m+1)} \\ j_m(\nu) & y_m(\nu) & 1 & 1 \\ \nu j_{m-1}(\nu r_0) & \nu y_{m-1}(\nu r_0) & r_0^{m-1}(m\nu^m+m+1) & (m+1)r_0^{-(m+2)}(1-\nu^{-(m+1)}) \\ \nu j_{m-1}(\nu) & \nu y_{m-1}(\nu) & m\nu^m+m+1 & (m+1)(1-\nu^{-(m+1)}) \end{vmatrix}.$$

Зная нули $\{\nu_{jm}\}$ функции $\det_2(\nu)$, можно найти $\tilde{C}_n(\nu_{jm})$, $n=1,\ldots,4$, и, тем самым, функции $\tilde{R}_{jm}(r)$. Для вычисления нулей можно воспользоваться теоремой Лапласа о разложении определителя и соотношением [9]:

$$\begin{vmatrix} j_m(\nu) & y_m(\nu) \\ j_{m-1}(\nu) & y_{m-1}(\nu) \end{vmatrix} = \frac{1}{\nu^2}.$$

Напомним, что здесь H означает любое H^l, $l=1,2,\ldots$ (см. разд. 2.2, п. 4.). Вычисления, описанные в разд. 2.3, п.п. 1 и 2 одинаковы во всех H^l, меняется только нижняя граница индексов k и m $(m,k\geq l)$.

2.4. Дополнительное свойство построенного базиса

1. В разд. 2.3. получены наборы $\{\lambda_{ik},\mathbf{t}_{ik}\}$ и $\{\tilde{\lambda}_{jm},\mathbf{p}_{jm}\}$. Объединим числа λ_{ik} и $\tilde{\lambda}_{jm}$ в один набор, упорядочим эти числа по возрастанию и занумеруем в этом порядке соответствующие поля. Получим числа $0<\alpha_1<\alpha_2<\ldots$ и последовательность $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots\}$, в которой тороидальное и полоидальные поля перемешаны. Покажем, что полученный базис $\{\mathbf{e}_i\}$ упорядочен еще в одном (может быть, не вполне очевидном) смысле.

2. В работе [8] для построения базиса в пространстве полей в шаровом слое с условием $(\mathbf{q},\mathbf{n})|_{\partial_\Omega}=0$ использовался функционал

$$\mathcal{R}^2(\mathbf{q})=\frac{\int\limits_\Omega \mathcal{B}(\mathbf{q})dv}{\int\limits_\Omega |\mathbf{q}|^2dv},$$

где $\mathcal{B}(\mathbf{q})=\mathrm{Tr}(D^*D)$, $D=G^{1/2}QG^{-1/2}$, G – метрический тензор, Q – тензор ковариантной производной поля $\mathbf{q}$. Величина $\mathcal{R}(\mathbf{q})$ предлагалась авторами в качестве оценки степени осциллируемости поля в пространстве (чем больше $\mathcal{R}(\mathbf{q})$, тем сильнее осциллирует поле). Если $\{\mathbf{q}_n\}$ – базис в H и $\mathbf{q}=\sum c_n\mathbf{q}_n$, $\sum|c_n|^2=1$, то

$$\mathcal{R}^2(\mathbf{q})=\sum_{n,m}c_n^*c_m\mathcal{M}_{nm},$$

где $\mathcal{M}_{nm}=\int_\Omega \mathrm{Tr}(D^*(\mathbf{q}_n)D(\mathbf{q}_m))dv$ – симметричная матрица.

Задача сводилась, таким образом, к построению базиса $\{\mathbf{q}_n\}$, в котором матрица $\{\mathcal{M}_{nm}\}$ имеет диагональный вид. Элементы $\{\mathbf{q}_n\}$ затем упорядочивались в порядке возрастания $\mathcal{R}(\mathbf{q}_n)$.

3. Покажем, что для полей, удовлетворяющих условию (1.2) на границе, справедливо соотношение:

$$\int\limits_\Omega \mathrm{Tr}(D^*(\mathbf{q}_n)D(\mathbf{q}_m))dv = -\int\limits_\Omega(\Delta\mathbf{q}_n, \mathbf{q}_m)dv.$$

Оно имеет инвариантный вид, и его достаточно проверить в декартовых координатах, в которых G – единичная матрица и

$$D(\mathbf{q}) = Q(\mathbf{q}) = \left\{\frac{\partial q^i}{\partial x_j}\right\}, \qquad i,j = 1,2,3.$$

Имеем:

$$\int\limits_\Omega \mathrm{Tr}(D^*(\mathbf{q}_n)D(\mathbf{q}_m))dv = \sum_{i,j=1}^{3}\int\limits_\Omega \frac{\partial q_n^i}{\partial x_j}\frac{\partial q_m^i}{\partial x_j}dv =$$

$$= -\sum_{i,j,=1}^{3}\int\limits_\Omega q_n^i\frac{\partial^2 q_m^i}{\partial x_j^2}dv = -\int\limits_\Omega(\mathbf{q}_n, \Delta\mathbf{q}_m)dv.$$

Мы видим, что в нашем случае собственные поля оператора Лапласа образуют базис, в котором матрица $\{\mathcal{M}_{nm}\}$ – диагональна. Это значит, что построение базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \ldots\}$ из собственных полей оператора Лапласа, соответствующих числам $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \ldots$, эквивалентно процедуре, описанной в разд. 2.4, п. 1. Таким образом, базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$ упорядочен по возрастанию степени осциллируемости полей e_i, а $\alpha_i = \mathcal{R}^2(\mathbf{e}_i)$.

3. ПОЛНОТА СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА РАССМАТРИВАЕМОЙ ЗАДАЧИ

Покажем, что построенный базис (см. разд. 2) может быть использован не только в вычислительных целях, но и для получения некоторых теоретических выводов.

Напомним, что если λ – собственное значение оператора A, то присоединённым собственным вектором порядка m называется такой вектор $\mathbf{v}$, что

$$(A - \lambda I)^m\mathbf{v} = 0, \quad (A - \lambda I)^{m-1}\mathbf{v} \neq 0.$$

Пусть $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ – резольвента оператора A, $\mathcal{S}(A)$ – система собственных и присоединенных функций этого оператора. Покажем, что система $\mathcal{S}(A)$, где A – оператор задачи (1.1)-(1.2), полна в H. Доказательство опирается на теорему Карлемана, упрощенная форма которой приведена в [7].

Теорема (Карлеман). Если A – оператор с резольвентой Гильберта–Шмидта, и вдоль каждого луча $\lambda = re^{i\theta}$ (θ – фиксировано), не совпадающего с вещественной осью, $|R_\lambda(A)| = O(|\lambda|^{-1})$ при больших λ, то система $\mathcal{S}(A)$ полна в H.

Факт, который мы хотим установить, есть следствие более общих результатов (теорема Келдыша, см. [1]), применимых не только к данному оператору. Однако сама формулировка теоремы Келдыша требует дополнительных определений и пояснений. Предлагаемый подход элементарен и дает, как нам кажется, некоторое представление о тех свойствах операторов P и B, из которых следует полнота системы $\mathcal{S}(A)$.

Все определения и свойства операторов, которые используются в этом разделе без доказательств, содержатся в [7]. В разд. 3.1. имеются ссылки на теоремы Фредгольма. Они изложены во многих книгах (см., например, [10]).

3.1. Дискретность спектра рассматриваемой задачи

1. Опишем подробнее ситуацию, с которой мы имеем дело. В гильбертовом пространстве H с ортонормированным вещественным базисом $\{\mathbf{e}_n\}$ (см. разд. 2.4., п. 1) рассматривается спектральная задача

$$A\mathbf{q} \equiv P\mathbf{q} - \varepsilon B\mathbf{q} = \lambda\mathbf{q}, \qquad \varepsilon > 0, \tag{3.1}$$

где P – кососимметричный оператор, $|P| = 2$. Оператор B – положительно определен, в базисе $\{\mathbf{e}_n\}$ его матрица диагональна с числами $0 < \alpha_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots$ на диагонали. Область определения оператора B

$$D(B) = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in H, \sum |x_i\alpha_i|^2 < \infty\},$$

очевидно, плотна в H и $D(A) = D(B)$.

Оператор B имеет обратный B^{-1} : $B^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, где $y_i = x_i/\alpha_i$ (x_i, y_i – компоненты $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в базисе $\{e_n\}$), $D(B^{-1}) = H$. В базисе $\{e_n\}$ оператор B^{-1} имеет диагональную матрицу с числами $\alpha_1^{-1} > \alpha_2^{-1} > \dots$ на диагонали, положительно определен и компактен.

2. Пусть $(\lambda, \mathbf{q})$ – собственная пара для (3.1). Тогда $\mathbf{q} = B^{-1}\mathbf{p}$ для некоторого $\mathbf{p} \in H$, и пара $(\lambda, \mathbf{p})$ удовлетворяет уравнению

$$T(\lambda)\mathbf{p} = \varepsilon\mathbf{p}, \tag{3.2}$$

где $T(\lambda) = (P - \lambda I)B^{-1}$ – компактный оператор при любом λ (здесь λ играет роль параметра, ε – спектральной переменной). И наоборот: если пара $(\lambda, \mathbf{p})$ удовлетворяет (3.2), то $(\lambda, B^{-1}\mathbf{p})$ – собственная пара для (3.1).

3. Перепишем уравнение (3.2) в виде

$$(T(\lambda) - \varepsilon I)\mathbf{p} = 0.$$

Теперь из компактности оператора $T(\lambda)$ получаем:

если $(\lambda, \mathbf{q})$ – собственная пара для уравнения (3.1), то уравнение $(T(\lambda) - \varepsilon I)\mathbf{p} = 0$ при этом λ имеет конечномерное пространство решений. Его размерность – геометрическая кратность λ как собственного числа оператора A;

если при каком-то λ уравнение (3.1) имеет только нулевое решение, то $\operatorname{Ker}(T(\lambda) - \varepsilon I) = \{0\}$, и по второй теореме Фредгольма $(T(\lambda) - \varepsilon I)^{-1}$ – определен и ограничен на всем H. Уравнение

$$(T(\lambda) - \varepsilon I)\mathbf{y} = \mathbf{z} \tag{3.3}$$

имеет единственное решение $\forall \mathbf{z} \in H$.

4. Пусть λ не является собственным значением оператора A. Тогда для любого $\mathbf{z} \in H$ уравнение $(\lambda I - P - \varepsilon B)\mathbf{x} = \mathbf{z}$ имеет решение $\mathbf{x} = B^{-1}\mathbf{y}$, где $\mathbf{y} = (T(\lambda) - \varepsilon I)^{-1}\mathbf{z}$ – решение уравнения (3.3). Это означает, что оператор

$(\lambda I - P - \varepsilon B)^{-1}$ – ограничен и определен на всем H, λ – регулярная точка для оператора A, спектр которого, таким образом, не имеет непрерывной части.

Отметим, что дискретность спектра оператора A доказана без использования косой симметрии P и обратимости A.

5. Если $(\lambda, \mathbf{q})$ – собственная пара для оператора A, $|\mathbf{q}| = 1$, то

$$\lambda = (P\mathbf{q}, \mathbf{q}) - \varepsilon(B\mathbf{q}, \mathbf{q}).$$

Из свойств операторов P и B следует, что $(B\mathbf{q}, \mathbf{q}) \geq \alpha_1$, а $(P\mathbf{q}, \mathbf{q})$ – чисто мнимое число. Весь спектр, таким образом, расположен в полуполосе $\Pi = \{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda \leq -\varepsilon\alpha_1,\ |\mathrm{Im}\lambda| \leq |P|\}$. Величина $\varepsilon\alpha_1$ – грубая оценка снизу модуля действительной части ближайшего к нулю собственного числа оператора A.

3.2. Проверка условий теоремы Карлемана

Покажем, что резольвента $R_\lambda(A)$ является оператором Гильберта–Шмидта.

1. Представим оператор A в следующем (эквивалентном) виде

$$A = (PB^{-1} - \varepsilon I)B.$$

Оператор PB^{-1} – компактен, его ненулевой спектр состоит из собственных чисел. Если $PB^{-1}\mathbf{y} = t\mathbf{y}$, то $(PB^{-1}\mathbf{y}, B^{-1}\mathbf{y}) = t(\mathbf{y}, B^{-1}\mathbf{y})$. Оператор P – кососимметричен, а B^{-1} – положительно определен. Отсюда следует, что все собственные числа $t \neq 0$ – чисто мнимые. Значит, $\varepsilon > 0$ – регулярная точка для оператора PB^{-1}, $(PB^{-1} - \varepsilon I)^{-1}$ – определен и ограничен на всем H. Так как B^{-1} – компактен, то $A^{-1} = B^{-1}(PB^{-1} - \varepsilon I)^{-1}$ – также компактен.

2. Компактный оператор T представим в виде

$$T\mathbf{x} = \sum \gamma_n \psi_n(\varphi_n, \mathbf{x}),$$

где γ_n – положительные собственные значения оператора $(T^*T)^{1/2}$, φ_n – соответствующие собственные векторы, $\psi_n = T\varphi_n/\gamma_n$. Обе системы $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ – ортонормированы. Если $\sum(\gamma_n)^2 < \infty$, то оператор T называется оператором Гильберта–Шмидта. Если T – самосопряжен, то, очевидно, γ_n – его собственные значения, $\varphi_n = \psi_n$ – соответствующие собственные векторы.

Обозначим, для удобства, буквой Γ класс операторов Гильберта–Шмидта.

3. Оператор A^{-1} замкнут, следовательно, обратный к нему оператор A также замкнут. Для таких операторов справедливо "резольвентное уравнение"

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\lambda(A)R_\mu(A) \tag{3.4}$$

для всех λ, μ из резольвентного множества $\rho(A)$. Из этого соотношения следует, что если $R_\mu(A) \in \Gamma$ при $\mu = 0$, то $R_\lambda(A) \in \Gamma$ при всех $\lambda \in \rho(A)$ (справа в (3.4) стоит произведение $R_0(A) \in \Gamma$ на ограниченный оператор, а такое произведение также входит в Γ).

Оператор $R_0(A) = A^{-1} = B^{-1}(PB^{-1} - \varepsilon I)^{-1}$ принадлежит Γ, если $B^{-1} \in \Gamma$. Оператор B^{-1} симметричен, и из разд. 3.2, п. 2 следует,что $B^{-1} \in \Gamma$, если

$\sum(1/\alpha_n)^2 < \infty$. Но собственные числа оператора B – это числа $\{\lambda_{ik}\}$ и $\{\tilde{\lambda}_{jm}\}$, соответствующие тороидальным и полоидальным собственным полям (см. разд. 2.2, пп. 1 и 2), поэтому $B^{-1} \in \Gamma$, если сходятся ряды $\sum_{i,k}(1/\lambda_{ik})^2$ и $\sum_{j,m}(1/\tilde{\lambda}_{jm})^2$.

4. Известно (см. [7], гл. 11), что в ограниченной области (в трехмерном пространстве) оператор Лапласа на скалярных функциях, равных нулю на границе, имеет обратный, являющийся оператором Гильберта–Шмидта (интегральный оператор со слабой особенностью). Отсюда (см. разд. 2.2 п. 2) следует, что $\sum_{i,k}(1/\lambda_{ik})^2 < \infty$.

Сходимость ряда $\sum_{j,m}(1/\tilde{\lambda}_{jm})^2$ вытекает из следующих соображений. Оператор $B^{-1} = (\mathrm{rot}\,\mathrm{rot})^{-1} = (\mathrm{rot})^{-1}(\mathrm{rot})^{-1}$. Оператор $(\mathrm{rot})^{-1}$ переводит тороидальные поля в полоидальные, полоидальные в тороидальные (это следует из формулы (2.4) для оператора rot). В базисе из собственных полей тороидального и полоидального типов (в таком порядке!) матрица оператора $(\mathrm{rot})^{-1}$ имеет вид $\begin{pmatrix} O & U \\ W & O \end{pmatrix}$, а B^{-1} имеет матрицу $\begin{pmatrix} UW & O \\ O & WU \end{pmatrix}$.

Матрицы UW и WU диагональные, UW имеет на диагонали числа $\{\lambda_{ik}^{-1}\}$, WU – числа $\{\tilde{\lambda}_{jm}^{-1}\}$. Из диагональности этих матриц и свойств операции Trace получаем:

$$\sum_{i,k}(1/\lambda_{ik})^2 = \mathrm{Tr}(UWUW) = \mathrm{Tr}(WUWU) = \sum_{j,m}(1/\tilde{\lambda}_{jm})^2.$$

Ряд $\sum_{j,m}(1/\tilde{\lambda}_{jm})^2$, таким образом, сходится, $B^{-1} \in \Gamma$. Отсюда следует (см. разд. 3.2, п. 3), что $R_\lambda(A)$ – оператор Гильберта–Шмидта $\forall \lambda \in \rho(A)$.

5. Проверим второе условие теоремы Карлемана.

Пусть $\lambda \in \rho(A)$ и $|Im\lambda| > |P|$. Для любого $\mathbf{y} \in H$ уравнение

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = (P - \varepsilon B - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

имеет решение $\mathbf{x} = R_\lambda(A)\mathbf{y}$. Беря мнимую часть уравнения

$$(P\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \varepsilon(B\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}),$$

получим:

$$(P\mathbf{x}, \mathbf{x}) - Im\,\lambda|\mathbf{x}^2| = Im\,(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \quad |Im\,\lambda|\,|\mathbf{x}|^2 \le |P|\,|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|,$$

т.е. $|\mathbf{x}| = |R_\lambda(A)\mathbf{y}| \le |\mathbf{y}|\dfrac{1}{(|Im\,\lambda| - |P|)}$.

Это означает, что при $|Im\,\lambda| > |P|$

$$|R_\lambda(A)| \le \frac{1}{|Im\,\lambda| - |P|}.$$

Мы знаем (см. разд. 3.1, п. 5), что весь спектр оператора A заключен в полуполосе П шириной $2|P|$. Поэтому любой луч $\lambda = re^{i\theta}$, не совпадающий с вещественной осью (θ – фиксировано), либо целиком лежит в резольвентном множестве, либо выходит в него при $|Im\lambda| = r|\sin\theta| > |P|$ и

$$|R_\lambda(A)| \leq \frac{1}{r|\sin\theta| - |P|} = O(\frac{1}{|\lambda|})$$

при $\lambda \to \infty$ вдоль луча.

Проверка выполнения условий теоремы Карлемана закончена. Система функций $\mathcal{S}(A)$, таким образом, полна в пространстве H.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, мы имеем в пространстве бездивергентных полей в шаровом слое два базиса, упорядоченных по степени осциллируемости: один, состоящий из полей с условием $(\mathbf{q}, \mathbf{n}) = 0$ на границе, построен в работе [8]; второй – из полей, обращающихся в ноль на границе – в данной работе. Мы считаем, что обе конструкции могут быть использованы для приближенных решений задач гидродинамики в шаровом слое (не обязательно связанных с вращающейся жидкостью). Авторы надеются, что доказательство полноты системы функций $S(A)$ может также представлять интерес для читателей.

Авторы крайне признательны М.М. Вишику, проявившему интерес к данной работе и обратившему наше внимание на более общие и глубокие подходы к вопросам, затронутым в разд. 3, чем те, которыми мы пользовались в этой работе.

Данная работа финансировалась Международным центром науки и технологии (грант 008-94).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. М.: Наука, 1989. 416 с.
2. *Юдович В.И.* Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1984. 192 с.
3. *Гринспен Х.П.* Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеоиздат, 1975. 303 с.
4. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
5. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford University press, 1961. 654 p.
6. *Моффат Г.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980. 339 с.
7. *Рихтмайер Р..* Принципы современной математической физики. Т.1. М.: Мир, 1982. 486 с.
8. *Резников Е.Л., Розенкноп Л.М.* О гладких приближенных собственных мод оператора Пуанкаре в шаровом слое // Теоретические проблемы геодинамики и сейсмологии. (Вычисл. сейсмология. Вып. 27). М.: Наука, 1994. С.70-85.
9. Справочник по специальным функциям / Под ред. М.Абрамовица и И.Стигана. М.: Наука, 1979. 830 с.
10. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 542 с.