УДК 550.310+550.341

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЗЕМЛИ

Л.М. Розенкноп, Э.Н. Бессонова, Е.Л. Резников
Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук

Сделана попытка корректно применить вариационный подход (теорию слабых решений эллиптических уравнений) к задаче о собственных колебаниях Земли. Отдельно рассмотрен важный случай сферически симметричной модели Земли, доказаны известные факты существования крутильных и сферических собственных колебаний. Способ доказательства, возможно, представляет самостоятельный интерес. Численная реализация вариационного подхода (метод Ритца) и возникающие при этом проблемы иллюстрированы на примере однородной сферы. Показана важность адекватного выбора базиса в методе Ритца: только такой базис обеспечивает устойчивость и технологичность вычислительного процесса в данном методе.

VARIATIONAL APPROACH TO THE PROBLEM OF FREE OSCILLATIONS OF THE EARTH

L.M. Rozenknop, E.N. Bessonova, and E.L. Reznikov
International Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences

We aim at a correct use of the variational approach to the problem of free oscillations of the Earth. A spherically symmetric model an important case, is treated separately. We prove well known facts concerning the existence of torsional and spheroidal oscillations. Possibly, the method of proof is interesting in itself. The numerical implementation of the variational approach and problems arising in this procedure are illustrated by the example of a uniform ball. We demonstrate the importance of an adequate choice of a base vectors in the Ritz method; only a base properly chosen can ensure stability and efficiency of calculations.

ВВЕДЕНИЕ

Существующие способы расчета собственных колебаний в произвольной модели Земли – сеточные методы или метод прогонки решения системы дифференциальных уравнений – весьма трудоемки и требуют много машинного времени. Цель данной работы – попытка корректно применить вариационный подход, основанный на теории слабых решений эллиптических уравнений к задаче о спектре Земли. Отдельно рассмотрен важный случай сферически симметричной модели Земли и доказаны известные факты о возникающих крутильных и сфероидальных собственных колебаниях. Возможно, эти доказательства (Приложение 2 и Приложение 3) заинтересуют читателя.

Численная реализация вариационного подхода (метод Ритца) продемонстрирована на модели однородной сферы. Уже в этом случае (где имеется точное решение) возникают характерные проблемы и трудности, связанные с методом Ритца (выбор базиса, скорость и характер сходимости приближений и т.п.). В целом, смысл данной работы – методический, и она является предварительным шагом к рассмотрению задачи о спектре Земли с жидким ядром.

Разделы 1–4 и Приложения 1, 2, 3 написаны Л.М. Розенкнопом, раздел 5 – Э.Н. Бессоновой и Е.Л. Резниковым.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Пусть G – упругий шар радиуса R со свободной поверхностью, $\rho(\mathbf{x})$ – плотность среды, заполняющей шар, $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ – поле смещений; симметричный оператор $\sigma(\tilde{\mathbf{u}})$ – тензор напряжений в G.

В декартовых координатах уравнения движения имеют вид [1]

$$\rho(\mathbf{x})\ddot{\tilde{u}}_i(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Инвариантная запись этих уравнений

$$\rho(\mathbf{x})\ddot{\tilde{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{div} \sigma(\tilde{\mathbf{u}}), \tag{1.1}$$

где вектор $\operatorname{div} \sigma = \nabla \cdot \sigma$ – свертка ковариантной производной тензора $\sigma(\tilde{\mathbf{u}})$. (Здесь ∇ – оператор Гамильтона ковариантного дифференцирования, "$\cdot$" – знак скалярного произведения.)

Будем искать решение уравнения (1.1) в виде

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = e^{i\omega t}\mathbf{u}(\mathbf{x}),$$

(ω – действительное число.) Подставив это произведение в (1.1), получим, что $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ должно удовлетворять уравнению

$$-\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) = \omega^2 \rho(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}). \tag{1.2}$$

1.2. Обозначим символом M множество полей смещений, имеющих непрерывную вторую производную в $\bar{G} = G \cup \partial G$. Оператор

$$A: \ \mathbf{u} \to -\frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}), \tag{1.3}$$

определенный на M, называется оператором теории упругости.

Формула (1.2) означает, что $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ должно быть собственным полем этого оператора, соответствующим собственному числу $\omega^2 \geq 0$.

Пусть $L_2(G)$ – гильбертово пространство векторных полей в шаре G со скалярным произведением

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_G (\mathbf{u}, \mathbf{v}) dG,$$

(интеграл понимается в лебеговом смысле.) Формула (1.2) в сочетании с условием на границе G (свободная поверхность) приводит к спектральной задаче:

найти собственные числа и собственные поля оператора A, определенного формулой (1.3), удовлетворяющие граничному условию

$$\sigma(\mathbf{u})\Big|_{\partial G} = 0. \tag{1.4}$$

Область определения $D(A)$: поля $\mathbf{u} \in M$,удовлетворяющее условию (1.4). Очевидно, $D(A)$ – линейное множество, и оно плотно в $L_2(G)$ (см., например, [2]).

1.3. В линейной теории упругости справедлив закон Гука:

$$\sigma(\mathbf{u}) = C \bullet \varepsilon(\mathbf{u}),$$

где C – модуль упругости (тензор четвертого ранга), $\varepsilon(\mathbf{u})$ – тензор деформации (второго ранга), символ "$\bullet$" означает свертку их тензорного произведения $C \otimes \varepsilon$.

Будем считать, что упругая среда, заполняющая G, изотропна. В этом случае тензор C определяется двумя положительными упругими параметрами – функциями Ламе $\lambda(\mathbf{x})$ и $\mu(\mathbf{x})$, и закон Гука принимает вид

$$\sigma(\mathbf{u}) = \lambda E \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}), \tag{1.5}$$

(E – единичный тензор).

По определению, $\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^*)$, где оператор $\nabla\mathbf{u}$ – тензор ковариантной производной поля $\mathbf{u}$, $((\nabla\mathbf{u})^*)$ – сопряженный с ним. В произвольных координатах оператор $\nabla\mathbf{u} = \operatorname{grad}\mathbf{u}$, записанный как тензор типа $\binom{0}{2}$, имеет компоненты $\{\nabla_k u_i\}$; здесь u_i – ковариантные компоненты поля $\mathbf{u}$, $\nabla_k u_i$ – ковариантная производная этой компоненты по k-й координате. Из формулы (1.5) несложными выкладками с использованием оператора ∇ (см. Приложение 1) получается выражение

$$\operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}) = \operatorname{grad}(\lambda \operatorname{div}\mathbf{u}) + \mu(\Delta\mathbf{u} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}) + 2\varepsilon(\mathbf{u}) \bullet \operatorname{grad}\mu. \tag{1.6}$$

Здесь вектор $\varepsilon(\mathbf{u}) \bullet \nabla\mu$ – свертка произведения $\varepsilon(\mathbf{u}) \otimes \nabla\mu$, т.е. значение оператора $\varepsilon(\mathbf{u})$ на векторе $\nabla\mu$. Свойства среды, т.е. функции ρ, λ и μ, предполагаются известными, и формула (1.6) дает явное выражение $A\mathbf{u}$ как функции от $\mathbf{u}$.

1.4. Для единственности решения задачи (1.3)–(1.4) поля $\mathbf{u}$ из $D(A)$ нужно подчинить еще двум условиям, исключающим движение шара как целого (см. [3]). Будем считать, что выполняются соотношения

$$\int_G \mathbf{u}\,dG = 0 \quad \text{и} \quad \int_G [\mathbf{x}, \mathbf{u}]\,dG = 0. \tag{1.7}$$

Первое условие исключает произвольный перенос тела, второе – произвольный жесткий поворот. В п. 3.4.2. будет показано, что условия (1.7), кроме того, гарантируют V-эллиптичность билинейной формы, входящей в определение *слабого* решения исходной задачи (1.3)–(1.4).

Замечания. 1. Ниже в тексте символы ▲, ▼ отмечают начало и конец доказательства утверждения.

2. Линейные подмножества гильбертовых пространств будем называть *подпространствами* (как в линейной алгебре). Линейные подмножества, замкнутые в соответствующей норме (т.е. сами являющиеся гильбертовыми пространствами), будем называть *замкнутыми* подпространствами.

2. СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ

Прежде чем излагать вариационный подход к решению задачи, описанной в разд. 1., рассмотрим важный частный случай: функции ρ, λ и μ зависят только от расстояния до центра шара G. Покажем, что в этом случае возникают два типа собственных колебаний – крутильные и сфероидальные. Соответствующие этим типам подпространства, инвариантные относительно оператора A, распадаются, в свою очередь, в ортогональную сумму подпространств, в которых A действует как обыкновенный дифференциальный оператор. Такая структура инвариантных подпространств упрощает расчет спектра вариационным методом (и любым другим, конечно).

2.1. Покажем сначала, что пространство гладких полей в шаре G распадается в ортогональную сумму подпространств специального вида.

2.1.1. Справедлива *лемма Вейля*:
гладкое поле в шаре можно разложить в прямую сумму

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nabla\psi + \mathbf{N}, \tag{2.1}$$

где ψ – некоторая скалярная функция, $\operatorname{div}\mathbf{N} = 0$ и $(\mathbf{N},\mathbf{n})\Big|_{\partial G} = 0$.

▲ Условия $\operatorname{div}\mathbf{N} = 0$ и $(\mathbf{N},\mathbf{n})\Big|_{\partial G} = 0$ приводят к задаче Неймана для функции ψ:

$$\begin{cases} \Delta\psi = -\operatorname{div}\mathbf{u} \\ (\nabla\psi,\mathbf{n})\Big|_{\partial G} = (\mathbf{u},\mathbf{n})\Big|_{G}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Известно, что функция ψ определяется из (2.2) с точностью до постоянного слагаемого. Значит, $\nabla\psi$ и $\mathbf{N} = \mathbf{u} - \nabla\psi$ определены однозначно. ▼

2.1.2. *Тороидальным* полем называется поле $\mathbf{u}_{\text{т}} = \operatorname{rot}(T(\mathbf{x})\mathbf{x})$, где $T(\mathbf{x})$ – скалярная функция. Пусть r, θ, φ – сферические координаты в G и

$$< T >_r = \frac{1}{4\pi r^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} T(r,\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

– среднее значение $T(\mathbf{x})$ на сфере S_r. Так как $\operatorname{rot}(T\mathbf{x}) = [\nabla T, \mathbf{x}]$ не изменится, если к $T(\mathbf{x})$ добавить произвольную функцию $f(r)$, то можно считать, что $< T >_r = 0$ на любой сфере радиуса r. Очевидно, что поле $u_{\text{т}} = [\nabla T, \mathbf{x}]$ не имеет радиальной компоненты. Поле вида $\mathbf{u}_{\text{p}} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}(P(\mathbf{x})\mathbf{x})$, где $P(\mathbf{x})$ – скалярная функция, называется *полоидальным*. Очевидно, можно также полагать, что $< P >_r = 0$ на любой сфере S_r.

Нетрудно проверить (в декартовых координатах, например), что

$$\operatorname{rot}\mathbf{u}_{\text{p}} = -\operatorname{rot}(\Delta P(\mathbf{x})\mathbf{x}). \tag{2.3}$$

2.1.3. Известно [4], что бездивергентное поле $\mathbf{N}$ в шаре можно однозначно представить в виде $\mathbf{N} = \mathbf{u}_{\text{т}} + \mathbf{u}_{\text{p}}$. Легко проверить, кроме того, что произвольные поля вида $\nabla\psi$, $\mathbf{u}_{\text{т}}$ и $\mathbf{u}_{\text{p}}$ попарно ортогональны в $L_2(G)$. Из леммы Вейля (см. (2.1)) теперь вытекает, что пространство M гладких полей в $L_2(G)$ распадается в ортогональную сумму подпространств вида

$$\{\mathrm{rot}(T\mathbf{x})\} \oplus \{\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}(P\mathbf{x})\} \oplus \{\nabla\psi\}. \tag{2.4}$$

2.2. Докажем теперь, что если параметры среды в шаре G зависят только от r, то возникают два типа собственных колебаний – крутильные и сфероидальные.

2.2.1. Поле смещений

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = u_r\mathbf{e}_r + u_\theta\mathbf{e}_\theta + u_\varphi\mathbf{e}_\varphi,$$

где $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ – ортонормированный ("физический") базис в точке $\mathbf{x}$ с координатами r, θ, φ. Координаты тензора $\nabla\mathbf{u}$ в базисе $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ вычисляются стандартным образом (см., например, [5], там же приведены формулы для ненулевых символов Кристоффеля второго рода).

Матрица тензора $\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^*)$ в сферических координатах, таким образом, имеет компоненты

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r},\\
\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta r} &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right)\right],\\
\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi r} &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right)\right],\\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + u_r\right],\\
\varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\sin\theta\cdot u_r + \cos\theta\cdot u_\theta + \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right],\\
\varepsilon_{\theta\varphi} = \varepsilon_{\varphi\theta} &= \frac{1}{2r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{u_\varphi}{\sin\theta}\right)\right].
\end{aligned}$$

2.2.2. Прямое вычисление (см. Приложение 2) показывает, что если λ, μ и ρ зависят только от $r = |\mathbf{x}|$, то:

- оператор A переводит тороидальное поле $u_{\mathrm{T}} = \mathrm{rot}(T\mathbf{x})$ в поле того же типа,
- если $\mathbf{u} = \nabla\psi + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}(P\mathbf{x})$, то поле $A\mathbf{u}$ ортогонально любому тороидальному полю.

Это означает (см. (2.4)), что подпространство M полей в шаре G распадается в ортогональную сумму подпространств вида

$$\{\mathrm{rot}(T\mathbf{x})\} \oplus \{\nabla\psi + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}(P\mathbf{x})\}, \tag{2.5}$$

каждое из которых инвариантно относительно оператора упругости A. Собственные поля вида $\nabla\psi + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}(P\mathbf{x})$ называются ***сфероидальными***, а собственные поля тороидального типа – ***крутильными*** колебаниями. Эти поля можно искать независимо друг от друга.

Замечание. В доказательстве, изложенном в Приложении 2, используется матрица $\varepsilon(\mathbf{u})$ (точнее, ее первый столбец !), формула (2.3) и, конечно, содержание разд. 2.1. Существование двух типов собственных колебаний в сферически симметричном шаре – известный факт (см., например, [6,7]). Предложенное доказательство, однако, не связано ни с какими другими и, возможно, представляет самостоятельный интерес.

2.3. Покажем, наконец, что в рассматриваемом случае подпространства, отвечающие крутильным и сфероидальным колебаниям, сами распадаются в ортогональные суммы подпространств, соответствующих нижнему индексу сферической функции Y_n^m, $n = 1, 2, \dots$

2.3.1. На сфере радиуса r функция $T(\mathbf{x}) = T(r, \theta, \varphi)$ зависит только от переменных θ и φ. Известно (см., например, [8]), что функция на сфере S_r может быть представлена в виде ряда

$$T(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} c_{nm}(r) Y_n^m(\theta, \varphi) \tag{2.6}$$

($c_0(r) = < T >_r = 0$, т.к. мы рассматриваем функции с нулевым средним на S_r). Здесь Y_n^m, $m = 0, \pm 1, \dots \pm n$ – сферические функции, соответствующие числу n. Они подробно описаны, например, в [8] (см. также Приложение 3).

Введем угловой градиент

$$\nabla_s = \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi.$$

Очевидно, $\nabla_s Y_n^m = r \nabla Y_n^m$.

Из (2.6) следует, что

$$\mathbf{u}_\text{т} = \operatorname{rot}(T\mathbf{x})) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} a_{nm}(r) [\nabla_s Y_n^m, \mathbf{e}_r], \tag{2.7}$$

где $a_{nm}(r)$ – некоторые функции на $[0, R]$.

Из тех же соображений вытекает, что произвольное сфероидальное поле

$$\mathbf{u} = \nabla \psi + \operatorname{rot}\operatorname{rot}(P(\mathbf{x})\mathbf{x})$$

представляется в виде

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} \{p_{nm}(r) Y_n^m \mathbf{e}_r + q_{nm}(r) \nabla_s Y_n^m\}, \tag{2.8}$$

где $p_{nm}(r)$ и $q_{nm}(r)$ – некоторые функции на $[0, R]$.

2.3.2. Фиксируем число $n \geq 1$ и рассмотрим поля

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{g} &= a_{nm}(r)[\nabla_s Y_n^m, \mathbf{e}_r] \\ \mathbf{h} &= p_{nm}(r) Y_n^m \mathbf{e}_r + q_{nm}(r) \nabla_s Y_n^m \end{aligned}\right\}, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm n,$$

т.е. слагаемые в выражениях (2.7) и (2.8). В Приложении 3 показано, что

$$Ag = \tilde{a}_{nm}(r)[\nabla_s Y_n^m, \mathbf{e}_r]$$

и

$$A\mathbf{h} = \tilde{p}_{nm}(r)Y\mathbf{e}_r + \tilde{q}_{nm}(r)\nabla_s Y_n^m$$

и преобразования $a_{nm}(r) \to \tilde{a}_{nm}(r)$ и $\begin{pmatrix} p_{nm}(r) \\ q_{nm}(r) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \tilde{p}_{nm}(r) \\ \tilde{q}_{nm}(r) \end{pmatrix}$ зависят только от числа n и не зависят от $m = 0, \pm 1, \dots, \pm n$.

Это значит, что поля вида $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$ образуют инвариантные относительно оператора A подпространства тороидального и сфероидального типа, отвечающие числу n – нижнему индексу в Y_n^m. Из свойств ортогональности сферических функций следует, что каждое слагаемое в (2.5) распадается в ортогональную сумму инвариантных подпространств, образованных полями вида $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$, соответственно.

2.3.3. Обозначим $\mathcal{F}_n$ и $\mathcal{M}_n$ – тороидальные и сфероидальные инвариантные подпространства описанного выше вида. Из пп. 2.3.1 и 2.3.2 и Приложения 2 ясно, что сужение оператора A на пространство $\mathcal{F}_n$, например, – это дифференциальный оператор второго порядка в пространстве гладких функций на $[0, R]$, преобразующий $a(r)$ в $\tilde{a}(r)$.

Аналогично, ограничение оператора A на $\mathcal{M}_n$ – матрично-дифференциальный оператор второго порядка на пространстве гладких полей $\begin{pmatrix} p(r) \\ q(r) \end{pmatrix}$, $r \in [0, R]$ в базисе $\{Y_n^m \mathbf{e}_r, \nabla_s Y_n^m\}$, переводящий их в $\begin{pmatrix} \tilde{p}(r) \\ \tilde{q}(r) \end{pmatrix}$ в том же базисе.

Замечание. Доказательство изложенных фактов использует свойства сферических функций и вид матрицы $\varepsilon(\mathbf{u})$ и помещено в Приложение 3 лишь из-за некоторой громоздкости. Конечно, существование подпространств $\mathcal{F}_n$ и $\mathcal{M}_n$ давно известно (см., например, [9]), однако, по мнению авторов, предложенный способ доказательства – вычисление $A\mathbf{u}$ для $\mathbf{u} \in \mathcal{M}_n$ – может представлять интерес.

3. ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ

Постановка задачи о спектре оператора A, изложенная в разд. 1, является классической. Решение должно принадлежать $D(A)$, и функции λ, ρ и μ должны быть достаточно гладкими. Мы хотим воспользоваться теорией слабых решений эллиптических уравнений, подробно изложенной, например, в [10]. Требования к гладкости функций в этой теории существенно слабее, но если "слабое решение" оказывается гладким, то (см. [10]) оно совпадает с классическим. Опишем кратко ситуацию, возникающую в нашем случае.

3.1. Пусть $\mathbf{u}$ – гладкое поле, удовлетворяющее на границе условию (1.4), $\mathbf{v}$ – произвольное гладкое поле в шаре G. Умножая равенство $\rho A\mathbf{u} = -\mathrm{div}\sigma(\mathbf{u})$ скалярно на $\mathbf{v}$ и интегрируя по объему G, получим

$$\int_G (A\mathbf{u}, v)dG = -\int_G (\mathrm{div}\sigma(\mathbf{u}), \mathbf{v})dG. \tag{3.1}$$

Справедливо соотношение

$$\mathrm{div}(\sigma(\mathbf{u}) \bullet \mathbf{v}) = (\mathrm{div}\sigma(\mathbf{u}), \mathbf{v}) + \sigma(\mathbf{u}) \bullet \nabla\mathbf{v}. \tag{3.2}$$

В этой формуле (которую легко проверить в декартовых координатах): вектор $\sigma(\mathbf{u}) \bullet \mathbf{v}$ – значение оператора $\sigma(\mathbf{u})$ на векторе $\mathbf{v}$, число $\sigma(\mathbf{u}) \bullet \nabla\mathbf{v}$ – полная свертка тензорного произведения $\sigma(\mathbf{u}) \otimes \nabla\mathbf{v}$. Интегрируя обе части (3.1) с учетом формулы (3.2), получим

$$\int_G \rho(A\mathbf{u}, \mathbf{v})dG = \int_G \sigma(\mathbf{u}) \bullet \nabla\mathbf{u} dG, \tag{3.3}$$

так как

$$\int_G \mathrm{div}(\sigma(\mathbf{u}) \bullet \mathbf{v})dG = \int_{\partial G} ((\sigma(\mathbf{u}) \bullet \mathbf{v}), \mathbf{n})dS = 0$$

из-за граничного условия (1.4).

3.2. Правой части в (3.3) можно придать симметричный вид. Из симметрии тензора σ (см. (1.5)) следует, что

$$\sigma \bullet \nabla\mathbf{v} = \sigma \bullet (\nabla\mathbf{v})^*.$$

В декартовых координатах это очевидно:

$$\sigma = \{\sigma_{ij}\}, \quad \nabla\mathbf{v} = \{\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\}, \quad (\nabla\mathbf{v})^* = \{\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\}$$

и

$$\sigma \bullet \nabla\mathbf{v} = \sigma_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sigma_{ji}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sigma_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \sigma \bullet (\nabla\mathbf{v})^*.$$

Поэтому

$$\int_G (\sigma(\mathbf{u}) \bullet \nabla\mathbf{v})dG = \frac{1}{2}\int_G \sigma(\mathbf{u}) \bullet (\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^*)dG = \int_G W(\mathbf{u}, \mathbf{v})dG,$$

где $W(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sigma(\mathbf{u}) \bullet \varepsilon(\mathbf{v})$.

В изотропном случае (который мы рассматриваем)

$$W(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\lambda E \mathrm{div}\mathbf{u} + 2\mu\varepsilon(\mathbf{u})) \bullet \varepsilon(\mathbf{v}) = \lambda \mathrm{Sp}\varepsilon(\mathbf{u})\mathrm{Sp}\varepsilon(\mathbf{v}) + 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}) \bullet \varepsilon(\mathbf{v}) =$$
$$= \lambda(\mathrm{div}\mathbf{u})(\mathrm{div}\mathbf{v}) + 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}) \bullet \varepsilon(\mathbf{v}). \tag{3.4}$$

Здесь E – единичная матрица, $\mathrm{Sp}\varepsilon$ – след матрицы ε. Мы воспользовались законом Гука (1.5) и формулой $E \bullet \varepsilon(\mathbf{u}) = \mathrm{Sp}\varepsilon(\mathbf{u}) = \mathrm{div}\,\mathbf{u}$.

Из формулы (3.4) видно, что $W(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ – симметричная билинейная форма от $\varepsilon(\mathbf{u})$ и $\varepsilon(\mathbf{v})$. Соответствующая квадратичная форма

$$W(\mathbf{u}) = \lambda(\mathrm{Sp}\varepsilon(\mathbf{u}))^2 + 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}) \bullet \varepsilon(\mathbf{u}) \tag{3.5}$$

называется плотностью потенциальной энергии упругой деформации. Из теории упругости известно (см., например, [6]), что эта форма – положительно определенная функция элементов матрицы $\varepsilon(\mathbf{u})$, т.е.

$$W(\mathbf{u}) \geq C_0\|\varepsilon(\mathbf{u})\|^2 \qquad (C_0 > 0 \text{ – константа}),$$

где $\|\varepsilon(\mathbf{u})\|$ – обычная матричная норма оператора. Если $\mu > 0$ – непрерывная функция в $\bar{G} = G \cup \partial G$, то это видно непосредственно из формулы (3.5).

Функция $\int\limits_G W(\mathbf{u})dG$ называется энергией деформированного (полем $\mathbf{u}$) тела. Таким образом, для полей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ из $D(A)$ выполняется соотношение

$$\int\limits_G \rho(A\mathbf{u}, \mathbf{v})dG = \int\limits_G W(\mathbf{u}, \mathbf{v})dG.$$

3.3. Пусть $L_{2,\rho}(G)$ – гильбертово пространство полей в G с метрикой

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\rho = \int\limits_G (\mathbf{u}, \mathbf{v})\, \rho dG. \tag{3.6}$$

Несколько обобщая теорию, изложенную в [10] для скалярного случая, рассмотрим соболевское пространство H^1_ρ со скалярным произведением

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H^1_\rho} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_\rho + \int\limits_G \nabla\mathbf{u} \bullet \nabla\mathbf{v} dG \tag{3.7}$$

и нормой

$$\|\mathbf{u}\|^2_{H^1_\rho} = \|\mathbf{u}\|^2_\rho + \int\limits_G \|\nabla\mathbf{u}\|^2 dG. \tag{3.8}$$

Интегралы в (3.6), (3.7) и (3.8) понимаются в лебеговом смысле, производные – в обобщенном (см., например, [10]). Напомним, что $\nabla\mathbf{u} \bullet \nabla\mathbf{v}$ – полная свертка двух тензоров, и, в координатах, $\nabla\mathbf{u} \bullet \nabla\mathbf{u} = \|\nabla\mathbf{u}\|^2$ – сумма квадратов всех членов матрицы $\nabla\mathbf{u}$.

3.4. Будем для удобства писать $\|\mathbf{u}\|_1$ вместо $\|\mathbf{u}\|_{H^1_\rho}$.

Рассмотрим в H^1_ρ билинейную форму

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \int\limits_G W(\mathbf{u}, \mathbf{v})dG. \tag{3.9}$$

Прежде чем формулировать слабую постановку задачи (1.3)–(1.4) при условиях (1.7), установим некоторые свойства формы (3.9), которые нам понадобятся в дальнейшем.

3.4.1. Для любых $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ из H^1_ρ справедливо неравенство

$$|((\mathbf{u},\mathbf{v}))| \le K\|\mathbf{u}\|_1\|\mathbf{v}\|_1, \tag{3.10}$$

где $K > 0$ – константа, не зависящая от элементов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ из H^1_ρ.
▲ 1. Так как λ и μ – ограниченные функции в G, то существует такое $k_0 > 0$, что (см. формулу (3.4)).

$$|((\mathbf{u},\mathbf{v}))| \le k_0\left\{\left|\int\limits_G \mathrm{Sp}\varepsilon(\mathbf{u})\mathrm{Sp}\varepsilon(\mathbf{v})dG\right| + \left|\int\limits_G \varepsilon(\mathbf{u})\bullet\varepsilon(\mathbf{v})dG\right|\right\}.$$

2. $\varepsilon(\mathbf{u})\bullet\varepsilon(\mathbf{v}) = \dfrac{1}{4}(\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})^*)\bullet(\nabla\mathbf{v}+(\nabla\mathbf{v})^*)$

и

$$|\varepsilon(\mathbf{u})\bullet\varepsilon(\mathbf{v})| \le \frac{1}{4}\{|\nabla\mathbf{u}\bullet\nabla\mathbf{v}| + |(\nabla\mathbf{u})^*\bullet\nabla\mathbf{v}| + |\nabla\mathbf{u}\bullet(\nabla\mathbf{v})^*| + |(\nabla\mathbf{u})^*\bullet(\nabla\mathbf{v})^*|\}.$$

В координатах (например, сферических), $\nabla\mathbf{u}$ – это матрица размером 3×3, и полную свертку $\nabla\mathbf{u}\bullet\nabla\mathbf{v}$ можно рассматривать как скалярное произведение 9-мерных векторов. Из неравенства Коши–Буняковского тогда следует, что

$$|\nabla\mathbf{u}\bullet\nabla\mathbf{v}| \le \|\nabla\mathbf{u}\|\|\nabla\mathbf{v}\|,$$

где $\|\nabla\mathbf{u}\|^2$ равна сумме квадратов всех членов матрицы $\nabla\mathbf{u}$. Легко видеть, что остальные члены в фигурных скобках допускают такую же оценку. Поэтому

$$|\varepsilon(\mathbf{u})\bullet\varepsilon(\mathbf{v})| \le \|\nabla\mathbf{u}\|\|\nabla\mathbf{v}\|$$

и

$$\left|\int\limits_G \varepsilon(\mathbf{u})\bullet\varepsilon(\mathbf{v})dG\right| \le \int\limits_G \|\nabla\mathbf{u}\|\|\nabla\mathbf{v}\|dG.$$

Еще раз, пользуясь неравенством Коши, получим:

$$\left|\int\limits_G \varepsilon(\mathbf{u})\bullet\varepsilon(\mathbf{v})dG\right| \le \left[\int\limits_G \|\nabla\mathbf{u}\|^2dG\int\limits_G \|\nabla\mathbf{v}\|^2dG\right]^{1/2} \le$$

$$\le \left[\|u\|^2_\rho + \int\limits_G \|\nabla\mathbf{u}\|^2dG\right]^{1/2}\left[\|(\mathbf{v})\|^2_\rho + \int\limits_G \|\nabla\mathbf{v}\|^2dG\right]^{1/2} = \|\mathbf{u}\|_1\|\mathbf{v}\|_1.$$

3. $\left|\displaystyle\int\limits_G \mathrm{Sp}\varepsilon(\mathbf{u})\mathrm{Sp}\varepsilon(\mathbf{v})dG\right|^2 \le \displaystyle\int\limits_G |\mathrm{Sp}\varepsilon(\mathbf{u})|^2dG\int\limits_G |\mathrm{Sp}\varepsilon(\mathbf{v})|^2dG.$

Далее:

$$|\mathrm{Sp}\varepsilon(\mathbf{u})|^2 = |\varepsilon_{11}(\mathbf{u}) + \varepsilon_{22}(\mathbf{u}) + \varepsilon_{33}(\mathbf{u})|^2 \leq 3\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{ii}^2$$

– это опять следствие неравенства Коши, и

$$\int_G |\mathrm{Sp}\varepsilon(\mathbf{u})|^2 \leq 3\int_G \|\varepsilon(\mathbf{u})\|^2 dG.$$

Так как $\|\varepsilon(\mathbf{u})\| = \frac{1}{2}\|\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^*\| \leq \|\nabla\mathbf{u}\|$, то

$$\left|\int_G \mathrm{Sp}\varepsilon(\mathbf{u})\mathrm{Sp}\varepsilon(\mathbf{v})dG\right| \leq 3\left(\int_G \|\nabla\mathbf{u}\|^2 dG\right)^{1/2}\left(\int_G \|\nabla\mathbf{v}\|^2 dG\right)^{1/2},$$

и очевидно, что существует такое число $K > 0$, что для любых $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ из H_ρ^1 выполняется (3.10). ▼

3.4.2. Пусть V – замкнутое подпространство в H_ρ^1, т.е. само является гильбертовым пространством с метрикой

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_V = (\mathbf{u},\mathbf{v})_1 = (\mathbf{u},\mathbf{v})_\rho + \int_G \nabla\mathbf{u} \bullet \nabla\mathbf{v}dG, \qquad \mathbf{u},\mathbf{v} \in V.$$

Форма $((\mathbf{u},\mathbf{v}))$ называется V-эллиптичной, если существует такое число $\alpha > 0$, что для каждого $\mathbf{u} \in V$

$$((\mathbf{u},\mathbf{u})) \geq \alpha\,\|\mathbf{u}\|_V^2.$$

Обозначим буквой $\tilde{V}$ линейное множество полей в $D(A)$, удовлетворяющих условиям (1.7)

$$\int_G \mathbf{u}\,dG = 0 \quad \text{и} \quad \int_G [\mathbf{x},\mathbf{u}]dG = 0.$$

Для полей из $\tilde{V}$ справедливо неравенство Корна [3], которое в наших обозначениях выглядит так:

$$\int_G W(\mathbf{u})dG \geq C_1\int_G \|\nabla\mathbf{u}\|^2 dG, \tag{3.11}$$

где $\mathbf{u} \in \tilde{V}$, $C_1 > 0$ – не зависит от $\mathbf{u}$.

В той же книге [3], а также в [10] приведено неравенство Пуанкаре

$$\|\mathbf{u}\|_{L_2(G)}^2 = \int_G |\mathbf{u}|^2 dG \leq C_2\left\{\int_G \|\nabla\mathbf{u}\|^2 dG + \left|\int_G \mathbf{u}dG\right|^2\right\}, \tag{3.12}$$

где $C_2 > 0$ не зависит от $\mathbf{u}$.

Очевидно,

$$\|\mathbf{u}\|_\rho^2 = \int\limits_G \rho|\mathbf{u}|^2 dG \le \bar\rho \int\limits_G |\mathbf{u}|^2 dG = \bar\rho \|\mathbf{u}\|_{L_2(G)}^2,$$

где $\sup \rho(x) = \bar\rho > 0$, $x \in G$ (плотность $\rho(\mathbf{x})$, конечно, ограничена в G).

Так как $\int\limits_G \mathbf{u} dG = 0$, если $\mathbf{u} \in \tilde V$, то из (3.12) вытекает, что для $\mathbf{u} \in \tilde V$

$$\|\mathbf{u}\|_\rho^2 \le \bar\rho C_2 \int\limits_G \|\nabla \mathbf{u}\|^2 dG. \tag{3.13}$$

Теперь из неравенства Корна (3.11) и из (3.13) получаем:

$$\int\limits_G W(\mathbf{u}) dG \ge \frac{C_1}{2}\left\{ \int\limits_G \|\nabla \mathbf{u}\|^2 dG + \frac{1}{\bar\rho C_2}\|u\|_\rho^2 \right\},$$

и ясно, что существует такое число $\alpha > 0$, что для $\mathbf{u} \in \tilde V$

$$((\mathbf{u},\mathbf{u})) = \int\limits_G W(\mathbf{u}) dG \ge \alpha \left\{ \int\limits_G \|\nabla \mathbf{u}\|^2 dG + \|\mathbf{u}\|_\rho^2 \right\} = \alpha \|\mathbf{u}\|_1^2. \tag{3.14}$$

Пусть V – пополнение $\tilde V$ в метрике пространства H_ρ^1 [10]. По самой конструкции пополнения V – замкнутое подпространство в H_ρ^1, имеющее вид

$$V = \{\mathbf{u} : \mathbf{u} \in H_\rho^1, \quad \int\limits_G \mathbf{u} dG = 0, \quad \int\limits_G [\mathbf{x}, \mathbf{u}] dG = 0\},$$

в котором $(\cdot,\cdot)_V = (\cdot,\cdot)_{H_\rho^1}$, $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_1$.

(Здесь интегралы – лебеговы, а производные – обобщенные.)

Отметим, что поля $\mathbf{u} \in V$ уже не обязаны удовлетворять условию $\sigma(\mathbf{u})|_{\partial G} = 0$. Это условие содержит производные компонент поля по координатам и, согласно общей теории (см. в [10] теорему о следах и комментарий к ней), является неустойчивым и не накладывает ограничений на $\mathbf{u} \in V$.

Так как $\tilde V$ – плотно в V, то легко показать (доказывая "от противного"), что (3.14) справедливо для любого $\mathbf{u} \in V$ с той же самой константой $\alpha > 0$.

Таким образом,

$$((\mathbf{u},\mathbf{u})) \ge \alpha \|\mathbf{u}\|_V^2, \qquad \mathbf{u} \in V,$$

т.е. форма $((\mathbf{u},\mathbf{v}))$ – V-эллиптична.

3.4.3. Теперь можно сформулировать слабую постановку исходной задачи.

Слабым решением задачи (1.3)–(1.4) при условии (1.7) называется такое число ω и поле $\mathbf{u} \in V$, что

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \omega^2(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\rho \tag{3.15}$$

для любого $\mathbf{v} \in V$.

Граничное условие (1.4) явно не входит в формулировку слабого решения, но оно учтено в выражении для $((\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ – обратился в ноль поверхностный интеграл при интегрировании формулы (3.1).

Из формулы (3.4) для $W(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ следует, что форма

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \int\limits_G W(\mathbf{u}, \mathbf{v}) dG$$

симметрична на V.

Теперь сформулируем основной для нас результат, доказанный, например, в [10]: если симметричная форма $((\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ удовлетворяет условию ограниченности (3.10) и V – эллиптична, то задача на собственные значения в слабой постановке обладает счетным набором собственных частот

$$0 < \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \ldots \leq \omega_n^2 \leq \ldots$$

и системой $\{\mathbf{v}_i\}$ собственных полей, для которых $((\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)) = \delta_{ij}$ и которая полна в V (а также в $L_{2,\rho}(G)$). Собственные частоты $\omega_i^2 = \varepsilon_i > 0$ имеют вид:

$$\varepsilon_1 = \min \frac{((\mathbf{v}, \mathbf{v}))}{(\mathbf{v}, \mathbf{v})_\rho}, \ldots, \quad \mathbf{v} \in V, \quad \mathbf{v} \neq 0,$$

$$\varepsilon_n = \min \frac{((\mathbf{v}, \mathbf{v}))}{(\mathbf{v}, \mathbf{v})_\rho}, \qquad \mathbf{v} \neq 0, \quad (\mathbf{v}, \mathbf{v}_i)_\rho = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

т.е. каждое ε_i есть минимум функционала $\frac{((\mathbf{v}, \mathbf{v}))}{(\mathbf{v}, \mathbf{v})_\rho}$ на соответствующем подпространстве. Симметрия формы $((\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ позволяет применить метод Ритца (см., например, [10]) для расчета спектра задачи (3.15).

Этот метод будет использован в разд. 5 при расчете собственных чисел сфероидальных колебаний в сферически симметричной Земле.

4. РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ СФЕРОИДАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ В СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЙ ЗЕМЛЕ

Изложим применение вариационного метода к расчету собственных частот и колебаний сфероидального типа. Случай крутильных колебаний проще, рассматривается аналогично и затруднений не вызывает.

4.1. Пусть $\mathcal{M}_n$ $(n \geq 1)$ – инвариантное подпространство сфероидального типа (см. п. 2.3.3), содержащее поля вида

$$\mathbf{u} = p(r) Y_n^m \mathbf{e}_r + q(r) \nabla_s Y_n^m, \tag{4.1}$$

где $p(r)$, $q(r)$ – функции на $[0, R]$, имеющие непрерывную вторую производную.

Пространство $\mathcal{M}_n$ есть ортогональная сумма $2n + 1$ подпространств, соответствующих числам $m = 0, \pm 1, \ldots \pm n$. Спектральные свойства оператора A в каждом из этих подпространств (при фиксированном n) одинаковы (см. Приложение 3), мы не станем их различать и будем писать Y_n и $\mathcal{M}_n$; индекс m, который мы не пишем, может быть любым из чисел $0, \pm 1, \ldots, \pm n$, а $\mathcal{M}_n$ теперь означает любое из $2n+1$ подпространств, входящих в ортогональную сумму. Кратность каждого собственного числа оператора A в $\mathcal{M}_n$, таким образом, должна быть умножена на $2n+1$.

Из (4.1) следует, что можно считать $\mathcal{M}_n$ пространством двумерных полей $\begin{pmatrix} p(r) \\ q(r) \end{pmatrix}$ в базисе $\{Y_n \mathbf{e}_r, \nabla_s Y_n\}$, компоненты которого – функции на отрезке $[0, R]$.

Пусть K_n – сужение оператора A на $\mathcal{M}_n$. В Приложении 3 показано, что K_n – дифференциальный оператор второго порядка, определенный на полях вида (4.1).

Подпространство $\tilde{V}_n$ в $\mathcal{M}_n$ (аналог $\tilde{V}$, см. п. 3.4.2) – состоит из полей $\mathbf{u} \in \mathcal{M}_n$, удовлетворяющих граничному условию $\sigma(\mathbf{u})\Big|_{\partial G} = 0$, а также условиям (1.7).

$$\int\limits_G \mathbf{u} dG = 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_G [\mathbf{x}, \mathbf{u}] dG = 0$$

(см. п. 1.4).

К задаче о спектре оператора K_n можно применить вариационный подход, изложенный в разд. 3.

4.2. Опишем подробнее подпространство $\tilde{V}_n$, т.е. проверим, какие поля из $\mathcal{M}_n$ удовлетворяют условиям (1.7).

4.2.1. Проверим сначала выполнение второго из условий (1.7).

Пусть $\mathbf{f}$ – произвольное постоянное поле в G. Для $\mathbf{u} \in \mathcal{M}_n$, $n \geq 1$ получаем

$$\langle \mathbf{f}, \int\limits_G [\mathbf{x}, \mathbf{u}]\, dG \rangle = \int\limits_G (\mathbf{f}, [\mathbf{x}, p(r) Y_n \mathbf{e}_r + q(r) \nabla_s Y_n]) dS =$$

$$= \int\limits_R^0 r^3 p(r) \int\limits_{S_1} (\mathbf{f}, [\mathbf{e}_r, Y_n \mathbf{e}_r]) + \int\limits_R^0 r^3 q(r) \int\limits_{S_1} (f, [e_r, \nabla_s Y_n])\, dS.$$

Первое слагаемое в этой сумме, очевидно, равно нулю. Пусть B_1 – шар, ограниченный сферой S_1. Тогда

$$\int\limits_{S_1} (\mathbf{f}, [\mathbf{e}_r, \nabla_s Y_n])\, dS = \int\limits_{S_1} (\mathbf{e}_r, [\nabla_s Y_n, \mathbf{f}])\, dS = \int\limits_{V_1} \operatorname{div}[\nabla_s Y_n, \mathbf{f}]\, dV = 0,$$

так как

$$\operatorname{div}[\nabla_s Y_n, \mathbf{f}] = (\mathbf{f}, \operatorname{rot}(\nabla_s Y_n)) - (\nabla_s Y_n, \operatorname{rot}\mathbf{f}) = 0.$$

Здесь $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ – внешняя нормаль к единичной сфере S_1. Мы получили, что $\langle \mathbf{f}, \int\limits_G [\mathbf{x}, \mathbf{u}] dG \rangle = 0$ для любого постоянного поля $\mathbf{f}$.

Таким образом

$$\int\limits_G [\mathbf{x}, \mathbf{u}]dG = 0.$$

Второе из условий (1.7), следовательно, выполняется для всех полей $\mathbf{u}$ из $\mathcal{M}_n$, $n \geq 1$.

4.2.2. Проверим теперь выполнение первого из условий (1.7) в $\mathcal{M}_n$. Оно имеет следующий вид:

$$\int\limits_G \mathbf{u}\, dG = \int\limits_G \{p(r)Y_n \mathbf{e}_r + q(r)\nabla_s Y_n\}\, dG = 0. \tag{4.2}$$

Надо выяснить, каким должно быть соотношение между функциями $p(r)$ и $q(r)$, чтобы это равенство выполнялось.

Очевидно, достаточно показать, что

$$\langle \mathbf{f}, \int\limits_G \mathbf{u}\, dG\rangle = \int\limits_G (\mathbf{f}, \mathbf{u})\, dG = 0$$

для любого постоянного поля $\mathbf{f}$ в G. Преобразуем последний интеграл

$$\int\limits_G (\mathbf{f}, \mathbf{u})dG = \int\limits_G (\mathbf{f}, p(r)Y_n \mathbf{e}_r)dG + \int\limits_G (\mathbf{f}, q(r)\nabla_s Y_n)dG =$$

$$= \int\limits_0^R r^2 p(r)dr \int\limits_{S_1} (Y_n \mathbf{f}, \mathbf{e}_r)ds + \int^R r^2 q(r)dr \int\limits_{S_1} (\nabla_s Y_n, \mathbf{f})ds.$$

Пусть B_1 – шар, ограниченный сферой S_1. Тогда

$$\int\limits_{S_1} (Y_n \mathbf{f}, \mathbf{e}_r)ds = \int\limits_{B_1} \operatorname{div}(Y_n \mathbf{f})dv = \int\limits_{B_1} (\nabla_s Y_n, \mathbf{f})dv =$$

$$= \int\limits_0^1 r^2 dr \int\limits_{S_1} (\nabla_s Y_n, \mathbf{f})ds = \frac{1}{3}\int\limits_{S_1} (\nabla_s Y_n, \mathbf{f})ds.$$

Из последнего соотношения следует, что (4.2) выполняется, если равенство

$$\int\limits_0^R r^2(p(r) + 3q(r))dr \int\limits_{S_1} (Y_n \mathbf{e}_r, \mathbf{f})ds = 0 \tag{4.3}$$

справедливо для любого постоянного поля $\mathbf{f} = \alpha \mathbf{1}_x + \beta \mathbf{1}_y + \gamma \mathbf{1}_z$, ($\alpha$, β, γ – любые числа).

Стандартные вычисления (которые мы здесь опускаем) показывают, что при $n > 1$

$$\int\limits_{S_1} Y_n(\mathbf{e}_r, \mathbf{f})ds = \int\limits_{S_1} Y_n(\alpha \sin\theta \cos\varphi + \beta \sin\theta \sin\varphi + \gamma \cos\theta)ds = 0$$

для любого постоянного поля $\mathbf{f}$ (т.е. для произвольного набора α, β, γ). При $n = 1$ это не так: существуют постоянные поля $\mathbf{f}$, для которых

$$\int\limits_{S_1} Y_1(\mathbf{e}_r, \mathbf{f})ds \neq 0$$

и для выполнения условия (4.3) надо потребовать, чтобы

$$\int\limits_0^R r^2(p(r) + 3q(r))dr = 0.$$

4.2.3. Если оба условия (1.7) выполняются, то, очевидно, можно полагать, что $\mathbf{u}|_{r=0} = 0$ (центр шара неподвижен). Таким образом, получаем:

при $n = 1$

$$\tilde{V}_1 = \{\mathbf{u} \in \mathcal{M}_1,\ p(0) = q(0) = 0,\ \int\limits_0^R r^2(p(r) + 3q(r))dr = 0,\ \sigma(\mathbf{u})\Big|_{\partial G} = 0\},$$

при $n > 1$

$$\tilde{V}_n = \{\mathbf{u}\colon \mathbf{u} \in \mathcal{M}_n,\ p(0) = q(0) = 0,\ \sigma(\mathbf{u})\Big|_{\partial G} = 0\}.$$

При фиксированных полях $\{Y_n\mathbf{e}_r, \nabla_s Y_n\}$ условие $\sigma(\mathbf{u})\Big|_{\partial G} = 0$ означает, конечно, соотношение между функциями $p(r)$ и $q(r)$ и их производными при $r = R$, его точный вид сейчас не важен.

4.3. Из формулы (П3.4) следует, что

$$\left\|\nabla_s Y_n\right\|^2_{L_2(G)} = n(n+1)\left\|Y_n\mathbf{e}_r\right\|^2_{L_2(G)}.$$

Положим $\mathbf{k}_1 = Y_n\mathbf{e}_r$, $\mathbf{k}_2 = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\nabla_s Y_n$. Теперь $\|\mathbf{k}_1\| = \|\mathbf{k}_2\|$, и эти поля ортогональны в $L_2(G)$.

Обозначим также

$$u^1(r) = p(r), \quad u^2(r) = \sqrt{n(n+1)}q(r).$$

Очевидно собственные числа и (нормированные!) собственные поля оператора K_n не зависят от величин $\|\mathbf{k}_i\|$, $i = 1, 2$, и мы можем, в дальнейшем, считать эти величины равными единице.

4.4. Теперь, опуская некоторые очевидные детали, можно заключить: в пространстве $\tilde{V}_n$ двумерных полей $\mathbf{u} = u^1(r)\mathbf{k}_1 + u^2(r)\mathbf{k}_2$, $r \in [0, R]$ со скалярным произведением

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle_n = \int\limits_0^R (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) r^2 \, dr$$

действует матрично-дифференциальный оператор второго порядка K_n. Его выражение известно и приведено в [9]. Функции $u^1(r)$ и $u^2(r)$ обращаются в ноль при $r = 0$, а при $r = R$ удовлетворяют соотношению, возникающему из условия $\sigma(\mathbf{u})\Big|_{\partial G} = 0$ для $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u^1(r) \\ u^2(r) \end{pmatrix}$ в базисе $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\}$.

Это соотношение можно получить, пользуясь законом Гука и формулами для $\varepsilon(\mathbf{u})$ (см. п. 2.2.1), оно также приведено в [9]. Его явный вид нам не нужен: мы знаем что оно гарантирует V_n-эллиптичность билинейной формы

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_n = \int\limits_0^R r^2 \rho(r)(K_n \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int\limits_0^R r^2 \rho(r)(\mathbf{u}, K_n \mathbf{v}) = \int\limits_0^R r^2 W(\mathbf{u}, \mathbf{v}) dr, \qquad (4.4)$$

где V_n – пополнение $\tilde{V}_n$ в метрике

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\rho,n} = \int\limits_0^R (\mathbf{u}, \mathbf{v}) r^2 \rho \, dr + \int\limits_0^R \left(\frac{d\mathbf{u}}{dr}, \frac{d\mathbf{v}}{dr} \right) r^2 dr, \qquad \text{(см. п.3.4.3)},$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u^1(r) \\ u^2(r) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} w^1(r) \\ w^2(r) \end{pmatrix}, \quad N = \sqrt{n(n+1}, $$

и

$$\int\limits_0^R r^2 W(\mathbf{u}, \mathbf{v}) dr = \int\limits_0^R r^2 dr \left\{ \lambda(r) \left(\frac{du^1}{dr} + \frac{2}{r} u^1 - \frac{N u^2}{r} \right) \left(\frac{dv^1}{dr} + \frac{2v^1}{r} - \frac{N v^2}{r} \right) + \right.$$

$$+ 2\mu(r) \left[\frac{du^1}{dr} \frac{dv^1}{dr} + \frac{u^1 v^1}{r^2} + \frac{1}{r^2} (u^1 - N u^2)(v^1 - N v^2) \right] +$$

$$\left. + \mu(r) \left(\frac{du^2}{dr} - \frac{u^2}{r} + \frac{N u^1}{r} \right) \left(\frac{dv^2}{dr} - \frac{v^2}{r} + \frac{N v^1}{r} \right) - 2\mu(r) \frac{u^2 v^2}{r^2} \right\}. \qquad (4.5)$$

Формула (4.5) может быть получена интегрированием выражения (3.4) для $W(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, либо вычислением первого или второго интеграла в (4.4) с учетом соотношения между компонентами полей из $\tilde{V}_n$ при $r = R$, которое вытекает из условия $\sigma|_{\partial G} = 0$. Это соотношение обеспечивает положительную определенность оператора K_n в $\tilde{V}_n$ (обращаются в ноль внеинтегральные члены при взятии по частям $\int\limits_0^R r^2 \rho (K_n \mathbf{u}, \mathbf{v}) dr$). Такое соотношение называется естественным (см. [3]).

Таким образом, мы приходим к слабой формулировке задачи о спектре оператора K_n (см. (3.19)):
нужно найти такое поле $\mathbf{u} \in V_n$ и число ω, что

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_n - \omega^2 (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\rho,n} = 0$$

для любого $\mathbf{v} \in V_n$. Здесь $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\rho,n} = \int\limits_0^R (\mathbf{u}, \mathbf{v}) r^2 \rho(r)\, dr$.

5. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА РИТЦА ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ МОДЕЛИ ЗЕМЛИ

5.1. Мы применили метод Ритца для расчета собственных крутильных и сфероидальных колебаний для модели 1066-а Дзевонского сферически симметричной Земли. Для крутильных колебаний совпадение результатов хорошее (в этом случае задача, по-существу, одномерна). Для более сложного случая сфероидальных колебаний задача двумерна, и сходимость приближенных значений собственных частот оказалась медленной. Далее мы будем расссматривать только сфероидальные колебания.

5.2. Для выяснения причины медленной сходимости были рассмотрены простые модели Земли, допускающие точные решения. Для каждой из этих моделей (однородная сферическая Земля, однородный сферический слой, двуслойная Земля) было выписано точное решение, а затем оно было разложено в ряд по стандартным координатным функциям.

Разберем подробно случай, когда в качестве модели берется однородный шар с $R = 1$, $\lambda = \mu$ и $\rho = 1$. Уже в этом простейшем случае выявляются сложности применения метода Ритца к задаче о собственных сфероидальных колебаниях. Оператор K_n для однородного шара имеет вид

$$K_n \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{6}{r}\dfrac{d}{dr} - \dfrac{6+N^2}{r^2} & -\dfrac{2}{r}N\dfrac{d}{dr} + \dfrac{4}{r^2}N \\ 2\dfrac{N}{r}\dfrac{d}{dr} + \dfrac{6}{r^2}N & \dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{d}{dr} - \dfrac{3N^2}{r^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},$$

где $N = \sqrt{n(n+1)}$, и при $n > 1$ (см. п. 4.2.3) его область определения состоит из гладких полей, удовлетворяющих граничным условиям:

$$\left.\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right|_{r=0} = 0; \quad \begin{pmatrix} 3\dfrac{d}{dr} + \dfrac{2}{r} & -\dfrac{N}{r} \\ \dfrac{N}{r} & \dfrac{d}{dr} - \dfrac{1}{r} \end{pmatrix} \left.\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right|_{r=1} = 0. \tag{5.1}$$

Собственные функции оператора K_n (см. также [11]) имеют точное аналитическое выражение

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_n N^2 \dfrac{j_n(k_\beta r)}{k_\beta r} + \left(\dfrac{n}{k_\alpha r} j_n(k_\alpha r) - j_{n+1}(k_\alpha r)\right) \\ C_n N \left(\dfrac{n+1}{k_\beta r} j_n(k_\beta r) - j_{n+1}(k_\beta r)\right) + N\dfrac{j_n(k_\alpha r)}{k_\alpha r} \end{pmatrix},$$

здесь $j_n(x)$ – сферические функции Бесселя.

Частоты собственных колебаний ω связаны с k_α соотношением $k_\alpha^2 = \omega^2/\alpha^2$, а величины k_α находятся из уравнения

$$2(\frac{\beta}{\alpha})\left[\frac{1}{k_\alpha} + \frac{(n-1)(n+2)}{k_\alpha^2}\left\{\frac{j_{n+1}(k_\alpha)}{j_n(k_\alpha)} - \frac{n+1}{k_\alpha}\right\}\right]\frac{j_{n+1}(k_\alpha\frac{\beta}{\alpha})}{j_n(k_\alpha\frac{\beta}{\alpha})} +$$

$$+\left[-0.5 + \frac{(n-1)(2n+1)}{k_\alpha^2} + \frac{1}{k_\alpha}\{1 - \frac{2n(n-1)(n+2)}{k_\alpha^2}\}\frac{j_{n+1}(k_\alpha)}{j_n(k_\alpha)}\right] = 0,$$

где α и β, соответственно, скорости продольных и поперечных волн для нашего шара [11]. В случае $\lambda = \mu$ выполняется соотношение $k_\beta = \dfrac{k_\alpha}{\sqrt{3}}$.

Собственные числа ν оператора K_n с заданными граничными условиями (5.1) связаны с частотой собственных колебаний ω и скоростью поперечных волн β формулой $\nu = \omega^2/\beta^2$.

Коэффициенты C_n задаются соотношением

$$C_n = \frac{-2[\frac{n-1}{k_\alpha}j_n(k_\alpha) - j_{n+1}(k_\alpha)]}{2\frac{j_n(k_\beta)}{k_\beta}(n^2-1) + 2j_{n+1}(k_\beta) - k_\beta j_n(k_\beta)}.$$

5.3. Приведем результаты вычислений собственных чисел и собственных функций для $n = 2$ и 4. В качестве координатной системы выберем двумерные вектора, компонентами которых являются сферические функции Бесселя $j_n(\varkappa_\ell r)$, где $\varkappa_\ell$ находятся из условия $j_n'(\varkappa_\ell) = 0$.

Замечание. В задаче для шара со сферической симметрией такой базис является естественным [12].

В пространстве $\tilde{V}_n$ двумерных полей $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u^1(r) \\ u^2(r) \end{pmatrix}$ со скалярным произведением $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \int\limits_0^1 (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2) r^2\, dr$, поля $\mathbf{e}_\ell^1 = \begin{pmatrix} j_n(\varkappa_\ell r) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_\ell^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ j_n(\varkappa_\ell r) \end{pmatrix}$, $\ell = 1, 2, \dots$ образуют ортогональный базис, т.к. сферические функции Бесселя ортогональны в L_2 с весом r^2. Наши координатные функции удовлетворяют граничному условию (5.1) при $r = 0$ и не удовлетворяют условию (5.1) при $r = 1$ (граничное условие при $r = 0$ является главным и базис должен ему удовлетворять, условие же при $r = 1$ является естественным и базисные вектора в методе Ритца могут ему не удовлетворять(см. п. 3.4.3.)).

Обозначим через $\Gamma_{2\ell}$ подпространство , натянутое на первые 2ℓ векторов $\mathbf{e}_1^1, \mathbf{e}_1^2, \mathbf{e}_2^1, \mathbf{e}_2^2, \dots, \mathbf{e}_\ell^1, \mathbf{e}_\ell^2$. Отнормируем этот базис, сохраняя те же обозначения. Матрица Ритца в этом подпространстве имеет вид

$$\{R_n\}_{2\ell} = \begin{pmatrix} \langle K_n\mathbf{e}_1^1, \mathbf{e}_1^1\rangle & \langle K_n\mathbf{e}_1^1, \mathbf{e}_1^2\rangle & \langle K_n\mathbf{e}_1^1, \mathbf{e}_2^1\rangle \dots \langle K_n\mathbf{e}_1^1, \mathbf{e}_\ell^2\rangle \\ \langle K_n\mathbf{e}_1^2, \mathbf{e}_1^1\rangle & \langle K_n\mathbf{e}_1^2, \mathbf{e}_1^2\rangle & \langle K_n\mathbf{e}_1^2, \mathbf{e}_2^1\rangle \dots \langle K_n\mathbf{e}_1^2, \mathbf{e}_\ell^2\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \langle K_n\mathbf{e}_\ell^2, \mathbf{e}_1^1\rangle & \langle K_n\mathbf{e}_\ell^2, \mathbf{e}_1^2\rangle & \langle K_n\mathbf{e}_\ell^2, \mathbf{e}_2^1\rangle \dots \langle K_n\mathbf{e}_\ell^2, \mathbf{e}_\ell^2\rangle \end{pmatrix}$$

Поскольку оператор K_n положительно определен в $\tilde{V}_n$ (см. п. 4.4), матрица $\{R_n\}_{2\ell}$ симметрична и положительно определена. Мы вычисляли элементы матрицы $\{R_n\}_{2\ell}$, пользуясь рекурентными соотношениями для функций Бесселя и программой численного интегрирования QUANC8 [13]. Некоторые интегралы вычислялись явно. Мы последовательно находили собственные числа матриц для ℓ от 1 до 30.

5.4. Приведем результаты численных экспериментов.

Сходимость приближенных собственных чисел к истинным в зависимости от размерности галеркинского подпространства иллюстрирует табл. 1. Приближения сходятся сверху к истинному значению, как и должно быть в методе Ритца. Из табл. 1 видно, что собственные числа "устанавливаются" довольно быстро, но для выбранных размерностей расхождение с истинным собственным числом, как правило, во втором знаке после запятой. В табл. 2 приведены приближения собственных чисел, полученные из матрицы 60 порядка и их абсолютные и относительные невязки.

Помимо собственных чисел мы изучали поведение приближенных собственных функций. Качество сходимости приближений к истинным собственным функциям проиллюстрировано графиками поведения невязки и интегральной ее оценкой.

На рис. 1, 2 приведены невязки приближений для 1-й ($n = 4$) и 20-й ($n = 2$) собственных функций для галеркинских подпространств некоторых размерностей. Так как собственные функции имеют две составляющие, то каждому приближению соответствуют две кривые: по одной на рис. (*а*) и (*б*).

Коэффициенты Фурье для 4-й собственной функции в зависимости от размерности галеркинских подпространств ($n = 2$) приведены в табл. 3. Видно, что коэффициенты Фурье "устанавливаются" достаточно быстро с ростом размерности, и сами коэффициенты, вообще говоря, убывают с ростом номера. Аналогичное поведение коэффициентов Фурье имеют и другие собственные функции.

В качестве интегральной невязки мы рассматривали угол между вектором точного и вектором приближенного решения. В табл. 4 для $n = 2$ и $n = 4$ приведены косинусы и синусы углов в 2-х метриках: L_2 и энергетической. Из табл. 4 видно, что с увеличением размерности подпространств невязки монотонно уменьшаются, и для удовлетворительного приближения собственных функций размерность галеркинского подпространства должна быть примерно в три раза больше номера представляемой собственной функции.

Из вычислений собственных чисел и собственных функций следует, что для модели однородного упругого шара метод Ритца работает удовлетворительно. Все оценки меняются плавно, улучшаясь с ростом размерности галеркинских подпространств. Из того факта, что интегральная невязка для первой собственной функции, определяемой из матрицы 60 порядка, составляет примерно 10%, следует, что собственные функции приближаются хуже, чем собственные числа, но, в общем, достаточно надежно, чтобы сделать качественные выводы об их поведении. Необходимо просчитать другие точно решаемые модели, чтобы сделать окончательные выводы о применении метода Ритца для расчета собственных сфероидальных колебаний.

ТАБЛИЦА 1.

Порядок матрицы	Номер собственного числа									
	1	2	5	10	15	20	25	30	35	40
					$n = 2$					
2	3.0626	7.0189								
4	2.7465	5.0642								
10	2.6997	4.9589	12.384	29.154						
20	2.6681	4.9084	12.194	21.969	32.392	56.248				
30	2.6600	4.8955	12.172	21.875	32.293	43.221	59.576	83.473		
40	2.6549	4.8878	12.165	21.853	32.277	43.216	53.671	63.451	86.648	110.71
50	2.6522	4.8836	12.162	21.844	32.269	43.215	53.489	63.043	72.688	86.906
60	2.6501	4.8805	12.161	21.840	32.266	43.215	53.415	62.918	72.460	82.018
Истинное собственное число	2.6399	4.8653	12.157	21.834	32.260	43.213	53.304	62.751	72.189	81.640
					$n = 4$					
2	6.0851	10.213								
4	5.3892	8.2491								
10	5.2292	8.1324	15.256	32.359						
20	5.1363	8.0998	15.192	25.949	37.230	60.251				
30	5.0996	8.0882	15.188	25.939	37.040	47.143	–	87.792		
40	5.0794	8.0820	15.187	25.935	37.022	46.893	–	66.376	–	115.19
50	5.0666	8.0782	15.186	25.934	37.016	46.860	–	65.923	–	92.130
60	5.0578	8.0756	15.186	25.933	37.014	46.851	–	65.843	–	86.670
Истинное собственное число	5.0093	8.0615	15.184	25.928	37.009	46.846	–	65.807	–	86.665

ТАБЛИЦА 2

$n=2$					$n=4$				
Номер собственного числа	Приближение, полученное из матрицы 60-го порядка	Истинное собственное число	Абсолютная ошибка приближения	Относительная ошибка приближения, %	Номер собственного числа	Приближение, полученное из матрицы 60-го порядка	Истинное собственное число	Абсолютная ошибка приближения	Относительная ошибка приближения, %
1	2.6501	2.6399	0.01025	0.39	1	5.0578	5.0093	0.0485	0.97
5	12.161	12.157	0.00310	0.03	5	15.186	15.184	0.0022	0.01
10	21.840	21.834	0.00606	0.03	10	25.933	25.928	0.0050	0.02
15	32.266	32.260	0.00634	0.02	15	37.014	37.009	0.0051	0.01
20	43.215	43.213	0.00176	0.00	20	46.851	46.846	0.0049	0.01
25	53.415	53.304	0.11107	0.21	25	56.351	56.337	0.0144	0.03
30	62.918	62.751	0.16682	0.27	30	65.843	65.807	0.0360	0.05
35	72.460	72.189	0.27041	0.37	35	75.768	75.755	0.0124	0.02
40	82.018	81.640	0.37811	0.46	40	86.670	86.665	0.0047	0.01
45	92.405	92.364	0.04131	0.04	45	97.586	97.242	0.3437	0.35
46	94.976	94.196	0.78083	0.83	46	97.949	97.620	0.3291	0.34
47	97.830	97.333	0.49693	0.51	47	103.06	100.41	2.652	2.64
48	103.26	97.817	5.4384	5.56	48	108.51	103.04	5.468	5.31
49	108.69	100.48	8.2045	8.17	49	113.96	103.57	10.39	10.03
50	114.09	103.25	10.839	10.50	50	119.40	106.70	12.70	11.90
55	140.40	113.05	27.353	24.19	55	144.63	116.14	28.49	24.53
60	165.17	122.48	42.687	34.85	60	169.83	125.57	44.26	35.25

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Векторная запись выражения $\mathrm{div}\sigma(\mathbf{u})$ в случае изотропной среды

Здесь приведен, почти без комментариев, формальный вывод формулы (1.6)

$$\mathrm{div}\sigma(\mathbf{u}) = \mathrm{grad}(\lambda \mathrm{div}\,\mathbf{u}) + \mu(\Delta\mathbf{u} + \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{u}) + 2\varepsilon(\mathbf{u}) \bullet \mathrm{grad}\mu.$$

Все сведения из тензорного анализа, которыми мы пользуемся, содержатся в [5].

Пусть x^1, x^2, x^3 – произвольные координаты в G, $\{\mathbf{e}_i\}$ – локальный базис в точке $\mathbf{z} \in G$ с координатами $\{x^i\}$, $\{\mathbf{e}^i\}$ – взаимный базис в точке $\mathbf{z}$, $\{g_{ij}\}$ – компоненты метрического тензора, $\{g^{ij} = (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j)\}$ – компоненты матрицы, обратной к $\{g_{ij}\}$.

В изотропной среде закон Гука выражается формулой (1.5)

$$\sigma(\mathbf{u}) = \lambda \mathrm{div}\mathbf{u} E + 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}),$$

параметры λ и μ – скалярные функции переменных x^1, x^2, x^3. Тензор напряжений $\sigma(\mathbf{u})$ в ковариантной записи имеет вид

$$\sigma = \{\sigma_{ij}\} = (\lambda \mathrm{div}\mathbf{u} g_{ik}\delta_j^k + 2\mu\varepsilon_{ij})\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j, \tag{П1.1}$$

где $\{\varepsilon_{ij}\}$ – ковариантные компоненты тензора деформаций $\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^*)$, оператор $\nabla\mathbf{u}$ – тензор ковариантной производной поля $\mathbf{u}$, $(\nabla\mathbf{u})^*$ – сопряженный с ним.

Введем вектор-оператор Гамильтона $\nabla = \nabla_k \mathbf{e}^k$, компоненты которого – ковариантные производные по k-й координате. На векторных и тензорных полях определены операции:

а) $\nabla\otimes \equiv \mathrm{grad}$,

б) $\nabla\cdot \equiv \mathrm{div}$ – эту операцию будем применять только к симметричным тензорным полям,

в) $\nabla\cdot\nabla\otimes \equiv \mathrm{div}\,\mathrm{grad} \equiv \Delta$ – оператор Лапласа.

Здесь символ "$\cdot$" означает скалярное произведение. Знак $\otimes$ надо понимать так: оператор, стоящий слева от $\otimes$, действует на каждую компоненту тензора, стоящего справа от $\otimes$. Координатный вид этих операторов будет ясен из дальнейших выкладок.

Пусть u_i – ковариантные компоненты поля $\mathbf{u}$. Тогда (см. (П1.1))

$$\mathrm{div}\sigma(\mathbf{u}) = \nabla_k e^k \cdot \{\lambda \mathrm{div}\mathbf{u} g_{ij}\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j + \mu(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j\}. \tag{П1.2}$$

Рассмотрим два случая.

1. Функции λ и μ – постоянны в G. Выполняя скалярное умножение, получим

$$\mathrm{div}\sigma = \lambda\nabla_k(\mathrm{div}\mathbf{u})g_{ij}g^{ik}\mathbf{e}^j + \mu(g^{ik}\nabla_k\nabla_i u_j \mathbf{e}^j + g^{ik}\nabla_k\nabla_j u_i \mathbf{e}^j). \tag{П1.3}$$

Запишем правую часть этого выражения в инвариантной форме
первое слагаемое: $\lambda\nabla_k(\mathrm{div}\mathbf{u})\mathbf{e}^k = \lambda\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}$;
второе слагаемое: $\mu\, g^{ik}\,\nabla_k\,\nabla_i\, u_j\, \mathbf{e}^j = \mu\,\Delta\,\mathbf{u}$, т.к. $\nabla\cdot\nabla\otimes = (\nabla_i\,\mathbf{e}^i)\cdot(\nabla_j\,\mathbf{e}^j)\otimes = g^{ij}\nabla_i\nabla_j\otimes = \Delta$ – по определению;

третье слагаемое: $\mu\nabla_k\nabla_j g^{ik}u_i\mathbf{e}^j = \mu\nabla_j(\nabla_k u^k)\mathbf{e}^j = \mu\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}$, т.к. $g^{ik}u_i = u^k$, и $\nabla_k\nabla_j = \nabla_j\nabla_k$ – порядок ковариантных производных можно менять. Поэтому

$$\mathrm{div}\sigma(\mathbf{u}) = (\lambda+\mu)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u}.$$

2. Пусть λ и μ – произвольные функции от x^1, x^2, x^3. Из формулы (П1.2) после скалярного умножения получаем

$$\mathrm{div}\sigma(\mathbf{u}) = \mathrm{grad}(\lambda\mathrm{div}\mathbf{u}) + 2\nabla\cdot(\mu\varepsilon(\mathbf{u})).$$

Здесь первый член в правой части получается так же, как первое слагаемое в первом случае.

Легко проверить (например, в декартовых координатах), что

$$\nabla\cdot(\mu\varepsilon) = \mu\nabla\cdot\varepsilon + \varepsilon \bullet \nabla\mu$$

("$\bullet$" – свертка тензора ε и вектора $\nabla\mu$).

Векторная форма слагаемого $\mu\nabla\cdot\varepsilon$ – это сумма второго и третьего слагаемых в правой части (П.1.3). Поэтому

$$\mathrm{div}\sigma(\mathbf{u}) = \mathrm{grad}(\lambda\mathrm{div}\mathbf{u}) + \mu(\Delta\mathbf{u} + \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{u}) + 2\varepsilon(\mathbf{u})\bullet\mathrm{grad}\mu.$$

Формула (1.6) доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

О двух типах собственных колебаний в упругом сферически симметричном шаре

Воспользуемся формулой (1.6) и запишем

$$A(\mathbf{u}) = \frac{1}{\rho(r)}\mathrm{div}\sigma(\mathbf{u}) =$$
$$= \frac{1}{\rho(r)}[\nabla(\lambda(r)\mathrm{div}\mathbf{u}) + \mu(r)(\Delta\mathbf{u} + \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{u}) + 2\varepsilon(\mathbf{u})\bullet\nabla\mu(r)] \qquad (\text{П}2.1)$$

(знак "$-$" сейчас не важен).

Вектор $\varepsilon(\mathbf{u})\bullet\nabla\mu(r)$ в базисе $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ имеет вид $\dfrac{\partial\mu}{\partial r}(\varepsilon_{rr}\mathbf{e}_r + \varepsilon_{r\theta}\mathbf{e}_\theta + \varepsilon_{r\varphi}\mathbf{e}_\varphi)$, коэффициенты матрицы $\varepsilon(\mathbf{u})$ в сферическом базисе приведены в п. 2.2.1.

1. Покажем, что оператор A переводит тороидальные поля в поля того же типа.

Пусть $\mathbf{u} = \mathrm{rot}(T(\mathbf{x})\mathbf{x}) = [\nabla T, \mathbf{x}]$ – произвольное тороидальное поле. Очевидно, $\mathbf{u} = \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial T}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\theta - \dfrac{\partial T}{\partial\theta}\mathbf{e}_\varphi$, и мы знаем (см. формулу (2.3)), что если $\mathrm{div}\mathbf{u} = 0$, то

$$\Delta\mathbf{u} = -\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{u} = \mathrm{rot}(\Delta T(\mathbf{x})\mathbf{x}).$$

Снова, учитывая, что $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$, получаем

$$A\mathbf{u} = \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}) =$$
$$= \frac{\mu(r)}{\rho(r)}\operatorname{rot}(\Delta T(\mathbf{x})) + \frac{1}{\rho(r)}\frac{r}{2}\frac{\partial\mu}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_\theta - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_\varphi\right]. \qquad (\text{П}2.2)$$

Последнее слагаемое равно $\frac{1}{\rho(r)}\varepsilon(\mathbf{u}) \bullet \nabla\mu(r)$ для поля $\mathbf{u} = [\nabla T, \mathbf{x}]$. Выражение в квадратных скобках приводится к виду

$$\frac{1}{r}\left[\nabla\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right), \mathbf{r}\right] - \frac{1}{r^2}[\nabla T, \mathbf{r}] \qquad (\text{П}2.3)$$

(нужно выполнить дифференцирование, поменять порядок в смешанных производных и сгруппировать члены).

Легко проверить, что, если $Q(\mathbf{x})$, $\psi(r)$ – произвольные функции, то

$$\operatorname{rot}(\psi(r)Q(\mathbf{x})\mathbf{x}) = [\nabla(\psi Q), \mathbf{x}] = \psi(r)\operatorname{rot}(Q\cdot\mathbf{x}),$$

т.е. $\psi(r)$ можно выносить за знак rot.

Таким образом, из (П2.2) и (П2.3) получаем, что

$$A(\mathbf{u}) = A(\operatorname{rot}(T\mathbf{x})) = \operatorname{rot}(Q(\mathbf{x})\mathbf{x}),$$

где $Q(\mathbf{x}) = \frac{\mu(r)}{\rho(r)}\Delta T + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{r^2}T$, т.е. $A\mathbf{u}$ – тороидальное поле.

2. Рассмотрим поля вида

$$\mathbf{u} = \nabla\psi + \operatorname{rot}\operatorname{rot}(P\mathbf{x}).$$

Эти поля ортогональны любому тороидальному полю. Покажем, что в пространстве гладких полей $A\mathbf{u}$ также ортогонально любому тороидальному полю.

2.1. Пусть $\operatorname{rot}(T\mathbf{x})$ – произвольное тороидальное поле. Нужно вычислить:

$$\langle A\mathbf{u}, \operatorname{rot}(T\mathbf{x})\rangle = \int_G (A\mathbf{u}, \operatorname{rot}(T\mathbf{x}))dG =$$
$$= \int_G \operatorname{div}[T\mathbf{x}, A\mathbf{u}]dG + \int_G (T\mathbf{x}, \operatorname{rot}(A\mathbf{u}))dG \qquad (\text{П}2.4)$$

(мы пользуемся формулой $\operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}$).

Первый член справа в (П2.4) исчезает при переходе к интегралу по ∂G, т.к. $([T\mathbf{x}, A\mathbf{u}], \mathbf{n}) = ([T\mathbf{x}, A\mathbf{u}], \mathbf{e}_r) = 0$ на границе шара G. Поэтому (П2.4) приобретает вид

$$\int_G (A\mathbf{u}, \operatorname{rot}(T\mathbf{x}))dG = \int_G (T\mathbf{x}, \operatorname{rot}(A\mathbf{u}))dG. \qquad (\text{П}2.5)$$

2.2. Из формулы (П2.1) для $A(\mathbf{u})$ получаем

$$\operatorname{rot}(A\mathbf{u}) = \left[\nabla\left(\frac{1}{\rho(r)}\right), \mathbf{Q}\right] + \frac{1}{\rho(r)}\operatorname{rot}\mathbf{Q}, \tag{П2.6}$$

где $\mathbf{Q} = \nabla(\lambda(r)\operatorname{div}\mathbf{u}) + \mu(r)(\Delta\mathbf{u} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}) + 2\varepsilon(\mathbf{u}) \bullet \nabla\mu(r)$.

Первый член в (П2.6) можно не учитывать, т.к. он ортогонален $\mathbf{x}$ в каждой точке и дает ноль при вычислении правой части (П2.5). Далее

$$\operatorname{rot}\mathbf{Q} = \mu(r)\operatorname{rot}(\Delta\mathbf{u}) + 2[\nabla, \varepsilon(\mathbf{u}) \bullet \nabla\mu]$$

(так как $\operatorname{rot}\operatorname{grad} = 0$). Для нашего поля $\mathbf{u}$

$$\Delta\mathbf{u} = \Delta(\nabla\psi + \operatorname{rot}\operatorname{rot}(P\mathbf{x})) = \operatorname{grad}\operatorname{div}(\nabla\psi) + \Delta\operatorname{rot}\operatorname{rot}(P\mathbf{x}),$$

(мы использовали формулу $\Delta = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}$), поэтому

$$\operatorname{rot}(\Delta\mathbf{u}) = \operatorname{rot}\Delta\operatorname{rot}\operatorname{rot}(T\mathbf{x}) = \operatorname{rot}^5(T\mathbf{x}) = \operatorname{rot}(H(\mathbf{x})\mathbf{x})$$

для некоторого $H(\mathbf{x})$, т.е. это поле – тороидальное, оно не имеет радиальной компоненты, и его можно также не учитывать при вычислении (П2.5).

Получаем, что

$$\langle A\mathbf{u}, \operatorname{rot}(T\mathbf{x})\rangle = 2\int\limits_G \frac{T\mathbf{x}}{\rho(r)}(\mathbf{x}, \operatorname{rot}(\varepsilon(\mathbf{u}) \bullet \nabla\mu(r)))dG.$$

2.3. Имеем далее

$$(\mathbf{x}, \operatorname{rot}(\varepsilon(\mathbf{u}) \bullet \nabla\mu(r))) = \operatorname{div}[\varepsilon(\mathbf{u}) \bullet \nabla\mu(r), \mathbf{x}] + (\varepsilon(\mathbf{u}) \bullet \nabla\mu(r), \operatorname{rot}\mathbf{x}).$$

Здесь второй член равен нулю ($\operatorname{rot}\mathbf{x} = 0$), а первый дает ноль при переходе к поверхностному интегралу, т.к. $([\varepsilon \bullet \nabla\mu, \mathbf{x}], \mathbf{n}) = 0$ на ∂G.

Таким образом, мы получили, что

$$\langle A\mathbf{u}, \operatorname{rot}(T\mathbf{x})\rangle = 0.$$

3. Формула (2.4) означает, что пространство гладких полей в $L_2(G)$ можно представить в виде ортогональной суммы

$$\{\operatorname{rot}(T\mathbf{x})\} \oplus \{\nabla\psi + \operatorname{rot}\operatorname{rot}(P\mathbf{x})\}.$$

Из пп. 1 и 2 этого Приложения теперь следует, что слагаемые этой суммы – инвариантные подпространства оператора теории упругости A.

Мы получили такой результат:

В сферически симметричном случае собственные колебания в шаре G делятся на два типа:

крутильные – собственные поля вида $\mathbf{u} = \operatorname{rot}(T\mathbf{x})$, т.е. тороидальные, и

сфероидальные – собственные поля вида $\mathbf{u} = \nabla\psi + \operatorname{rot}\operatorname{rot}(P\mathbf{x})$,

и их можно искать отдельно друг от друга.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Об инвариантных подпространствах тороидального и сфероидального типов, соответствующих нижнему индексу сферической функции Y_n^m, $n = 1, 2, \dots$

1. Напомним некоторые свойства сферических функций, которые нам понадобятся.

Функции $Y_n^m(\theta, \varphi)$ удовлетворяют соотношению

$$\Delta_s Y_n^m = -n(n+1)Y_n^m, \tag{П3.1}$$

т.е. являются собственными для оператора Δ_s – угловой части лапласиана

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \Delta_s\right). \tag{П3.2}$$

Кроме того, если $\nabla_s = \dfrac{\partial}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \dfrac{1}{\sin}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi$ – угловой градиент, S_1 – единичная сфера, то

$$\int\limits_{S_1} Y_n^m Y_{n'}^{m'} ds = \delta_{nn'}\delta_{mm'}\int\limits_{S_1}(Y_n^m)^2 ds$$

и

$$\int\limits_{S_1}(\nabla_s Y_n^m, \nabla_s Y_n^{m'})ds = \delta_{nn'}\delta_{mm'}n(n+1)\int\limits_{S_1}(Y_n^m)^2 ds.$$

2. Покажем, что если функции ρ, λ и μ зависят только от r, то поля вида $a(r)[\nabla_s Y_n^m, \mathbf{e}_r]$ и $p(r)Y_n^m\mathbf{e}_r + q(r)\nabla_s Y_n^m$, $n = 1, 2, \dots, m = 0, \pm 1, \dots, \pm n$ инвариантны относительно оператора теории упругости $A = -\dfrac{1}{\rho}\mathrm{div}\sigma$, где $\mathrm{div}\sigma$ описывается формулой (1.6). Достаточно разобрать сфероидальный случай, для тороидальных полей выкладки аналогичны (и даже проще).

Для удобства будем писать Y вместо Y_n^m и обозначим

$$\mathbf{u} = p(r)Y\mathbf{e}_r + q(r)\nabla_s Y$$

(напомним, что $\nabla_s Y = r\nabla Y = \dfrac{\partial Y}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial Y}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi$).

Пользуясь правилами векторного анализа, вычислим каждое слагаемое в правой части (1.6).

2.1. $\mathrm{div}(p(r)Y\mathbf{e}_r) = p(r)Y\mathrm{div}(\mathbf{e}_r) + (p\nabla Y + Y\nabla p(r), \mathbf{e}_r) =$
$$= \frac{2p(r)Y}{r} + Yp'(r) = \left(\frac{2p(r)}{r} + p'(r)\right), \quad \text{и}$$

$$\operatorname{grad}(\lambda(r)\operatorname{div}(p(r)Y\mathbf{e}_r)) = \operatorname{grad}\left(Y\lambda(r)\left(\frac{2p(r)}{r}+p'(r)\right)\right) =$$
$$= \frac{d}{dr}\left[\lambda(r)\left(\frac{2p(r)}{r}+p'(r)\right)\right]Y\mathbf{e}_r + \frac{\lambda(r)}{r}\left(\frac{2p(r)}{r}+p'(r)\right)\nabla_s Y. \qquad (\text{П3.3})$$

Далее:

$$\operatorname{div}(q(r)\nabla_s Y) = \operatorname{div}(rq(r)\nabla Y) = (\nabla(rq(r)), \nabla Y) + rq(r)\Delta Y =$$
$$= \frac{1}{r}q(r)\Delta_s Y = -\frac{1}{r}q(r)n(n+1)Y$$

(здесь учтены формулы (П3.1) и (П3.2). Таким образом:

$$\operatorname{grad}(\lambda(r)\operatorname{div}(q(r)\nabla_s Y)) = -n(n+1)\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{\lambda(r)q(r)}{r}\right)Y\mathbf{e}_r + \frac{1}{r^2}\lambda(r)q(r)\nabla_s Y\right]. \qquad (\text{П3.4})$$

Теперь из формул (П3.3) и (П3.4) получаем:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} = \operatorname{grad}\operatorname{div}(p(r)Y\mathbf{e}_r + q(r)\nabla_s Y) = \tilde{p}_1(r)Y\mathbf{e}_r + \tilde{q}_1(r)\nabla_s Y. \qquad (\text{П3.5})$$

Точный вид функций $\tilde{p}_1(r)$ и $\tilde{q}_1(r)$ не имеет значения.

2.2. Вычислим $\mu(r)(\Delta\mathbf{u} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}) = \mu(r)(2\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u})$.

Выражение для $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}$ получается из (П3.3) при $\lambda(r)\equiv 1$, поэтому осталось рассмотреть выражение $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}$.

$$\operatorname{rot}\mathbf{u} = \operatorname{rot}(p(r)Y\mathbf{e}_r + rq(r)\nabla Y) = p(r)[\nabla Y, e_r] + \frac{d}{dr}(rq(r))[e_r, \nabla Y] = g(r)[\nabla Y, \mathbf{e}_r],$$

где $g(r) = p(r) - \frac{d}{dr}(rq(r))$.
Далее:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} = g'(r)[\mathbf{e}_r, [\nabla Y, \mathbf{e}_r]] + g[\nabla, [\nabla Y, e_r]].$$

Пользуясь формулой для двойного векторного произведения, формулами (П3.1), (П3.2) и правилами действий с оператором ∇, получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} = g'(r)\nabla Y + g(r)\{\nabla Y\operatorname{div}\mathbf{e}_r + (e_r, \nabla)\nabla Y - \Delta Y\mathbf{e}_r\},$$

откуда

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} = \frac{g'(r)}{r}\nabla_s Y + g(r)\left\{\frac{2}{r^2}\nabla_s Y + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\nabla_s Y + \frac{1}{r^2}n(n+1)Y\mathbf{e}_r\right\} =$$
$$= \tilde{p}_2(r)Y\mathbf{e}_r + \tilde{q}_2(r)\nabla_s Y. \qquad (\text{П3.6})$$

Точный вид функций $\tilde{p}_2(r)$ и $\tilde{q}_2(r)$ сейчас также не имеет значения.

2.3. Последний член формулы (1.6) – $\varepsilon(\mathbf{u}) \bullet \operatorname{grad}\mu(r)$ – это столбец, полученный умножением матрицы $\varepsilon(\mathbf{u})$ (см. п. 2.2.1) на столбец $(\frac{\partial\mu}{\partial r}, 0, 0)^{\mathsf{T}}$, и в базисе $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_g, \mathbf{e}_\varphi$ имеет вид

$$\frac{\partial\mu(r)}{\partial r}\left[\frac{\partial u_r}{\partial r}\mathbf{e}_r+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right)\right)\mathbf{e}_\theta+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_\varphi\right].$$

Подставляя в это выражение $\mathbf{u}=p(r)Y\mathbf{e}_r+q(r)\nabla_s Y$ и группируя члены нужным образом, получим

$$\varepsilon(\mathbf{u})\bullet\mathrm{grad}\mu(r)=\frac{\partial\mu}{\partial r}\left[\frac{\partial p}{\partial r}Y\mathbf{e}_r+\frac{1}{2}\left\{r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{q(r)}{r}\right)+\frac{p(r)}{r}\right\}\nabla_s Y\right]=$$
$$=\tilde{p}_3(r)Y\mathbf{e}_r+\tilde{q}_3(r)\nabla_s Y. \qquad (\text{П}3.7)$$

Из формул (П3.5), (П3.6) и (П3.7) можно заключить, что оператор $-\rho A=\mathrm{div}\sigma$ переводит сфероидальные поля вида

$$\mathbf{u}=p(r)Y_n^m\mathbf{e}_r+q(r)\nabla_s Y_n^m \qquad (\text{П}3.8)$$

в поля того же типа. Так как плотность $\rho(r)\geq\rho_0>0$ в G, то оператор $A=-\dfrac{1}{\rho(r)}\mathrm{div}\sigma$, очевидно, обладает тем же свойством.

Таким образом, числу n соответствует подпространство сфероидальных полей вида (П3.8), инвариантное относительно оператора теории упругости A.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Стиль и язык этой статьи, возможно, несколько отличаются от принятых в работах по геофизике. Авторы надеются, однако, что это не будет серьезным препятствием для заинтересованного читателя.

2. Выбор базисных полей в методе Ритца – нетривиальная задача (см., например, [12]). Результаты разд. 5 подтверждают этот факт. Адекватный же выбор базиса обеспечивает быструю сходимость приближений в методе Ритца и, возможно, некоторые преимущества вариационного подхода по сравнению с методами, упомянутыми во введении. Накопленный опыт позволяет надеяться, что проблема выбора базиса будет нами решена достаточно быстро.

3. Задача о собственных колебаниях Земли с жидким ядром (в шаровом слое модуль сдвига $\mu\to 0$ и оператор теории упругости вырождается в этом слое), возможно, требует применения асимптотических методов. Вариационный подход при этом может использоваться для нахождения коэффициентов асимптотического разложения.

Авторы признательны М.М. Вишику и А.Л. Левшину, которые прочли и сочли полезной статью, не содержащую новых результатов и являющуюся, по-существу, чисто методической работой.

Настоящая работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-05-65312).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.
2. *Михлин С.Г.* Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 576 с.

3. *Михлин С.Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М.-Л: Гостехиздат, 1952. 216 с.
4. *Моффат Г.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980. 339 с.
5. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: МГУ, 1986. 263 с.
6. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. М.: Мир, 1983, 880 с.
7. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.-Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
8. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
9. *Левшин А.Л.* Поверхностные и каналовые сейсмические волны. М.: Наука, 1973. 176 с.
10. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 589 с.
11. *Ben-Menahem A., Singh Sarva J.* Seismic Waves and Sources. N.-Y. 1981. 1108 с.
12. *Михлин С.Г.* Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966. 433 с.
13. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. М.: Наука, 1980. 277 с.