УДК 532

СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ–СТОКСА

О.М. Подвигина

Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук,
Школа математики и статистики,
Сиднейский Университет, Австралия

Приведены результаты численных расчетов стационарных решений трехмерного уравнения Навье–Стокса с периодическими граничными условиями и силой, пропорциональной ABC-потоку. Для силы, обратно пропорциональной числу Рейнольдса R, ABC-поток является стационарным решением при любом R. Расчеты показали, что в случае $A{=}B{=}C{=}1$, рассматриваемом в статье, существуют еще шесть семейств стационарных решений. Три взаимно симметричные семейства появляются при $R \approx 7.9$ и три другие, также взаимно симметричные, при $R \approx 149$. Эти решения, численно прослеженные до $R{=}1000$–2000, по-видимому, существуют при любых бо́льших значениях R.

STEADY–STATE SOLUTIONS TO THE NAVIER–STOKES EQUATION

O.M. Podvigina

International Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences,
School of Mathematics and Statistics,
University of Sydney, Australia

The paper presents results of computation of steady solutions to the three-dimensional Navier–Stokes equation with periodic boundary conditions and with the force proportional to the ABC-flow. For the force inversely propotional to the Reynolds number R the ABC-flow is a steady solution for any R. In the considered case $A{=}B{=}C{=}1$ we found six other families of steady solutions. Three of the mutually symmetric families emerge at $R \approx 7.9$; the other three, also mutually symmetric, emerge at $R \approx 149$. The families were traced numerically up to $R{=}1000$–2000; presumably they persist at any arbitrary larger R.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим стационарное уравнение Навье–Стокса

$$\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v})-\nabla p+R^{-1}\Delta\mathbf{v}+\mathbf{f}=\mathbf{0} \tag{1а}$$

с силой

$$\mathbf{f}=R^{-1}\mathbf{u}_{ABC} \tag{1б}$$

при условии несжимаемости

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=0 \tag{1в}$$

и 2π-периодических граничных условиях по каждой из трех пространственных переменных. Здесь R – число Рейнольдса, а ABC-поток $\mathbf{u}_{ABC}$ определен, как обычно [1–3]

$$\mathbf{u}_{ABC}=(A\sin x_3+C\cos x_2,\ B\sin x_1+A\cos x_3,\ C\sin x_2+B\cos x_1). \tag{2}$$

В статье рассмотрен случай

$$A=B=C=1. \tag{3}$$

При этом выборе коэффициентов ABC-поток и уравнение (1) имеют группу симметрий, состоящую из 24 элементов, изоморфную группе вращений куба $\mathbf{O}$ [2,4].

ABC-поток является стационарным решением (1) при всех числах Рейнольдса. В случае (3) он теряет линейную устойчивость при $R\approx 13.04$ [5,6]. Численное моделирование эволюционных решений (1)–(3) показало [4,6], что в интервале $7.9\le R\le 30$ существуют еще три стационарные решения, связанные между собой симметриями ABC-потока (3). Они устойчивы при $R\le 13.9$; при $14\le R\le 30$ эволюционные решения проводят значительную часть времени в окрестности этих стационарных решений.

Предлагаемая статья посвящена численному исследованию зависимости указанных стационарных потоков от числа Рейнольдса. Особое внимание обращено на поведение решений в окрестности точек бифуркаций и при $R\to\infty$.

Расчеты показали, что ветвь стационарных решений, описанная в [4,6] (и соответствующие ветви симметричных семейств), появляется при $R\approx 7.9$ в результате седловой (saddlenode) бифуркации. Она существует при $7.9\le R\le 2000$ и, вероятно, при любых сколь угодно больших значениях R. Присоединеная ветвь была численно продолжена до R=1000. Было найдено другое семейство стационарных решений, которое появляется при $R\approx 149$ также в результате седловой бифуркации. Стационарные потоки из этого семейства прослежены до R=1000.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Для решения (1)–(3) использован стандартный псевдоспектральный метод. Решение было представлено в виде ряда Фурье

$$\mathbf{v} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{v}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kx}},$$

где $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ и $\mathbf{v}_{\mathbf{k}} = (v^1_{k_1,k_2,k_3}, v^2_{k_1,k_2,k_3}, v^3_{k_1,k_2,k_3})$. Подставляя это разложение в (1), получаем систему уравнений для коэффициентов $\mathbf{v}_{\mathbf{k}}$

$$\mathbf{P}^{\mathbf{k}}(\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}))_{\mathbf{k}} - \frac{\mathbf{k}^2}{R}\mathbf{v}_{\mathbf{k}} + \mathbf{f}_{\mathbf{k}} = 0,$$

где $\mathbf{P}$ – оператор проектирования в пространство соленоидальных полей

$$\mathbf{P}^{\mathbf{k}}_{ij} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2},$$

δ_{ij} – символ Кронекера. Для ее решения применялся метод численного решения больших систем уравнений, использующий свойства корней полиномов Чебышева [4, 7].

В вычислениях было использовано от 3×32^3 до 3×128^3 коэффициентов Фурье. Энергетический спектр найденных решений и сравнение решений, рассчитанных с разным разрешением, показывают, что это число гармоник было достаточно [4].

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для построения бифуркационной диаграммы было естественно использовать коэффициенты Фурье. На рис. 1 изображена зависимость $\mathrm{Re}(v^2_{0,0,1})$ от числа Рейнольдса для трех семейств: по одному представителю обеих троек семейств взаимно симметричных решений и ABC-поток, представленный прямой линией $\mathrm{Re}(v^2_{0,0,1})$=0.5; такое поведение коэффициентов в зависимости от R типично.

Первая тройка возникает при $R \approx 7.9$ в результате седловой бифуркации. Ветвь, расположенная на графике ближе к ABC-потоку, неустойчива при всех числах Рейнольдса и не проявляется в поведении эволюционных решений. Она была рассчитана для $R \leq 1000$. Три взаимно симметричные ветви дважды, при $R \approx 193$ и $R \approx 312$, пересекаются с ABC-потоком (3). Такая бифуркация пересечения тривиального стационарного решения является бифуркацией общего положения для систем с группой симметрий $\mathbf{O}$ [4], и, следовательно, можно было ожидать, что она произойдет в исследуемой системе.

Первая ветвь этого семейства, обнаруженная в расчетах [4, 6], была продолжена до R=2000. Поведение отдельных коэффициентов Фурье при больших R, например, $\mathrm{Re}(v^3_{1,0,0})$ (см. рис. 2) указывает на то, что эти коэффициенты стремятся при $R \to \infty$ к некоторому пределу. В предположении, что пределы коэффициентов Фурье существуют, можно определить гипотетическое предельное течение $\mathbf{V}(\infty)$, являющееся слабым решением уравнения Эйлера (с силой, равной нулю).

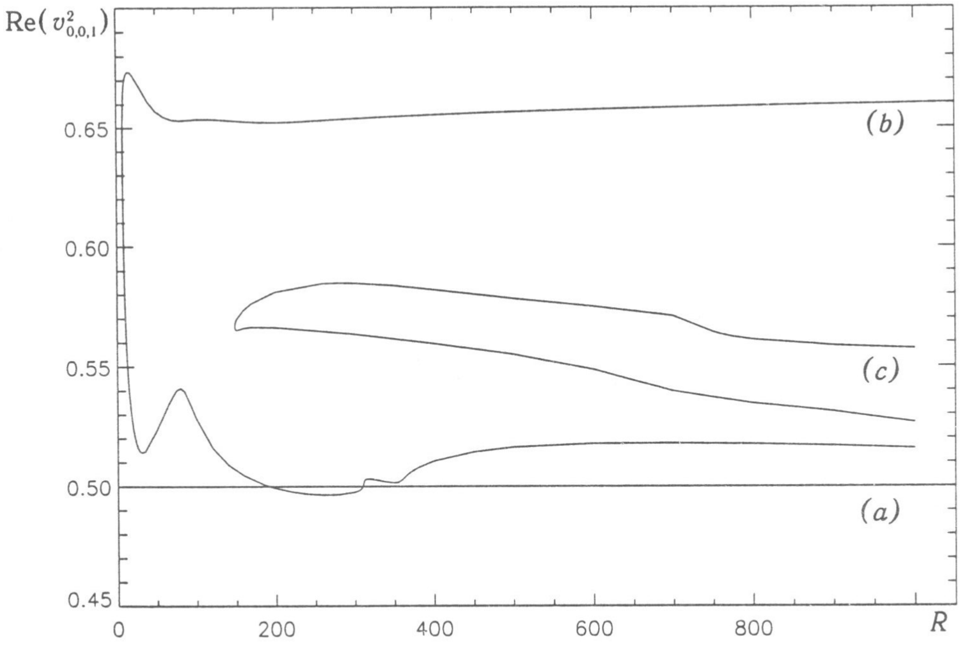

Рис. 1. Зависимость $\mathrm{Re}(v^2_{0,0,1})$ от числа Рейнольдса для трех семейств решений

(a) – линия $\mathrm{Re}(v^2_{0,0,1})$=0.5 соответствует ABC-потоку (3), (b) – ветвь, появляющаяся при $R \approx 7.9$, (c) – ветвь, появляющаяся при $R \approx 149$

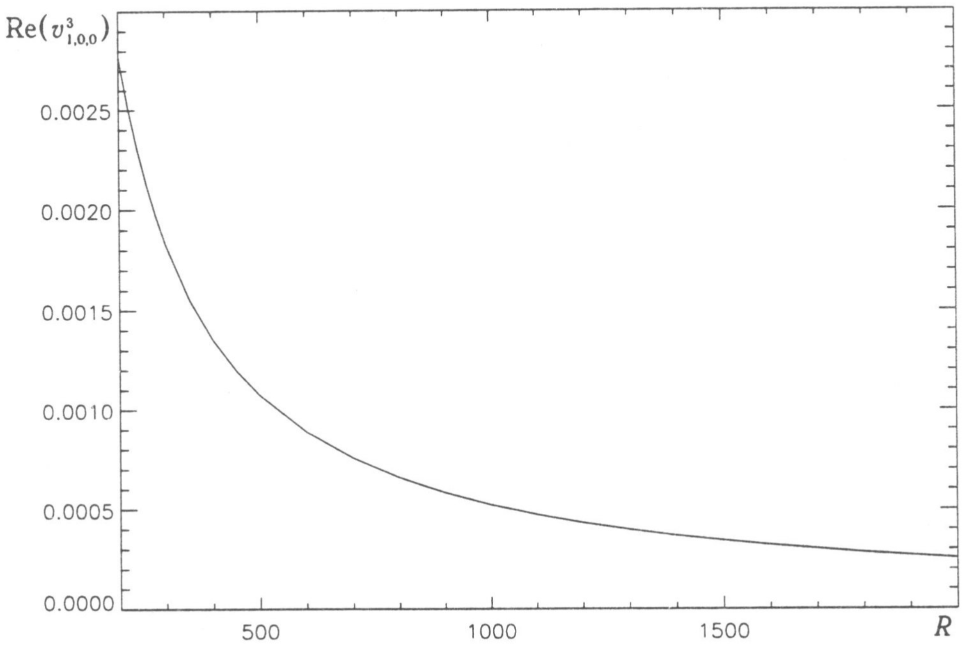

Рис. 2. Зависимость $\mathrm{Re}(v^3_{1,0,0})$ от числа Рейнольдса для одной из ветвей решений

Предположим, что при больших значениях R коэффициенты имеют степенну́ю асимптотику

$$v^m_{k_1,k_2,k_3} = a^m_{k_1,k_2,k_3} + b^m_{k_1,k_2,k_3} R^\alpha. \tag{4}$$

Коэффициенты в (4) были определены методом наименьших квадратов на интервале $1100 \le R \le 2000$ для индивидуальных $\alpha = -\frac{n}{6}$, $n = 1, 2, .., 12$ для каждого коэффициента Фурье с $|k_1| + |k_2| + |k_3| \le 5$. Для $|k_1| + |k_2| + |k_3| = 1$ асимптотики с минимальной среднеквадратичной невязкой ϵ были получены при α, близких к $-\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(v^1_{0,0,1}) &= -0.176 + 0.704R^{-\frac{1}{2}}, &\quad \epsilon = 1.6 \times 10^{-5},\\
\mathrm{Re}(v^2_{0,0,1}) &= \ \ 0.185 - 0.695R^{-\frac{1}{2}}, &\quad \epsilon = 1.6 \times 10^{-5},\\
\mathrm{Im}(v^2_{1,0,0}) &= \ \ 0.668 + 0.783R^{-\frac{2}{3}}, &\quad \epsilon = 9.4 \times 10^{-6}
\end{aligned}$$

(другие ненулевые коэффициенты могут быть определены из указанных по симметриям). Для $|k_1| + |k_2| + |k_3| = 2$ наилучшие приближения получены при $\alpha = -1$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(v^1_{1,0,1}) &= 0.62 \times 10^{-5} - 0.267R^{-1}, &\quad \epsilon = 1.5 \times 10^{-7},\\
\mathrm{Im}(v^2_{1,0,1}) &= 0.12 \times 10^{-4} - 0.534R^{-1}, &\quad \epsilon = 3.0 \times 10^{-7}
\end{aligned}$$

(остальные коэффициенты либо малы, либо получаются из указанных по симметриям с учетом условия бездивергентности (1в)). Для $|k_1| + |k_2| + |k_3| > 2$ невязка даже наилучшего приближения по порядку близка к величине самого коэффициента: по-видимому, при рассматриваемых R асимптотический режим для этих коэффициентов еще не достигнут.

Обозначим через $\mathcal{E}_l(R)$ энергию, содержащуюся в гармониках Фурье с $|k_1| + |k_2| + |k_3| = l$:

$$\mathcal{E}_l(R) = \sum_{|k_1|+|k_2|+|k_3|=l} |\mathbf{v}_{k_1,k_2,k_3}|^2.$$

При четных $l \le 12$ $\mathcal{E}_l(R)$ значительно меньше при больших числах Рейнольдса, чем соседние $\mathcal{E}_{l\pm1}(R)$ (например, $\mathcal{E}_1(1000) = 1.2$, $\mathcal{E}_2(1000) = 3 \times 10^{-6}$, $\mathcal{E}_3(1000) = 1 \times 10^{-3}$, $\mathcal{E}_4(1000) = 2 \times 10^{-6}$). Энергии $\mathcal{E}_l(R)$ при четных l с увеличением R сильно уменьшаются и имеют тенденцию стремиться к нулю при $R \to \infty$. Обращение в ноль коэффициентов $\mathbf{v}_{k_1,k_2,k_3}$ с четными $|k_1|+|k_2|+|k_3|$ соответствует наличию у $\mathbf{V}(\infty)$ дополнительных симметрий [4].

Энергетический спектр определяется, как обычно

$$E_K = \frac{1}{2} \sum_{K \le |k_1^2+k_2^2+k_3^2| < K+1} |\mathbf{v}_{k_1,k_2,k_3}|^2.$$

При R=2000 в области промежуточных K (рис. 3) $E_K \approx 0.25 \times K^{-4.65}$. Поскольку область такого поведения растет с R (см. [4]), можно предположить, что при $R \to \infty$ она становится бесконечно большой. Соответственно, $\mathbf{V}(\infty)$ является непрерывной по Гельдеру функцией класса $H^{1.82}(T^3) \subset C^{0.32}(T^3)$ [8].

Сечения Пуанкаре для стационарных течений при R=500, 1000 и 2000 показаны на рис. 4. Значительная часть объема занята четырьмя взаимно симметричными системами Колмогоровских торов. Траектории, лежащие на этих четырех торах,

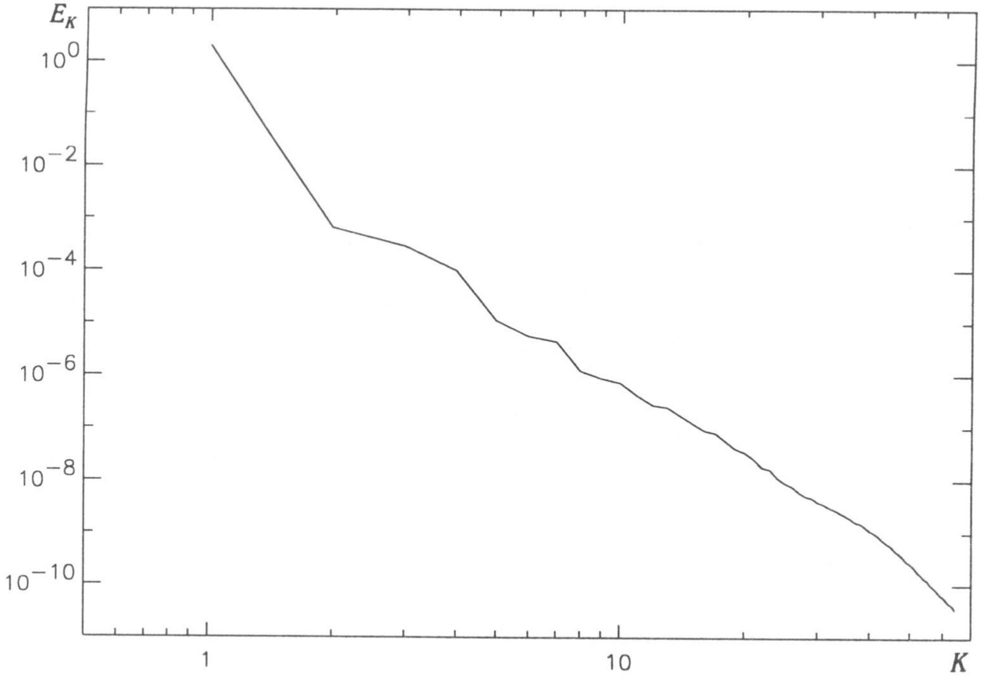

Рис. 3. Энергетический спектр решения для R=2000

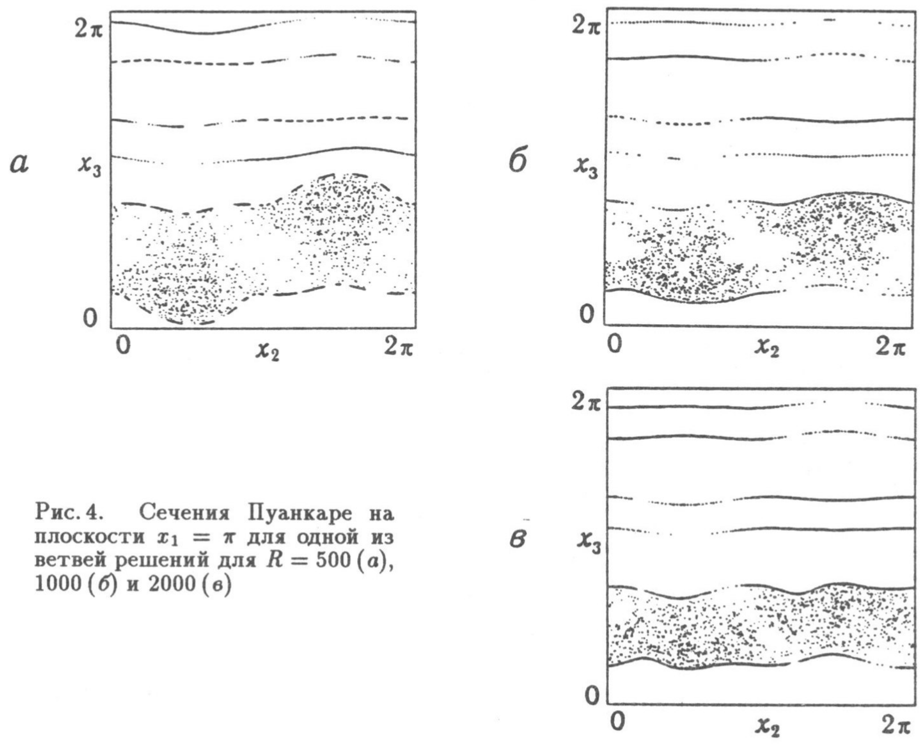

Рис. 4. Сечения Пуанкаре на плоскости $x_1 = \pi$ для одной из ветвей решений для $R = 500$ (*а*), 1000 (*б*) и 2000 (*в*)

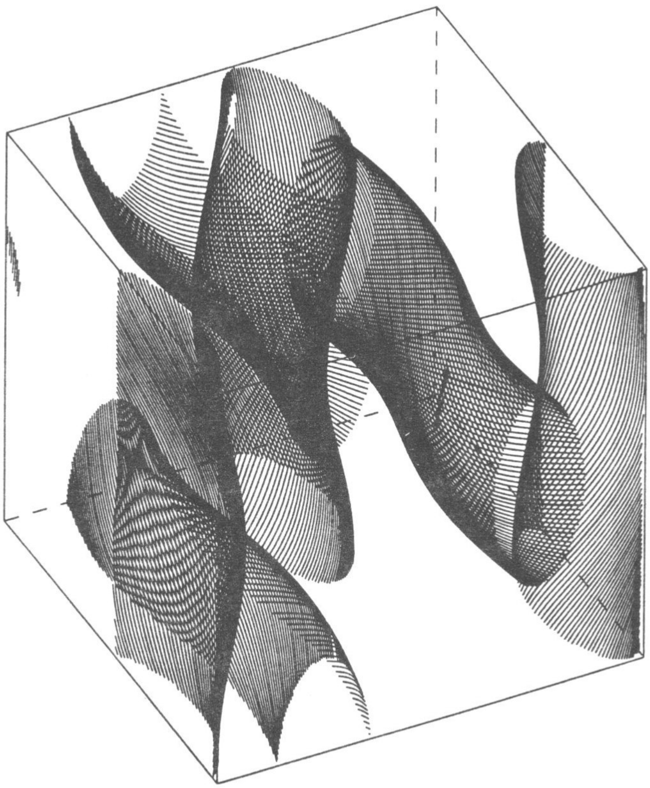

Рис. 5. Четыре взаимно симметричные траектории частиц в стационарном потоке для R=1000 (в одном кубе периодичности)
Ось x_1 – вертикальна

показаны на рис. 5. Сравнение трех сечений (рис. 4) показывает, что область хаотического поведения траекторий в потоках с увеличением R значительно убывает. Показатели Ляпунова хаотических траекторий, вычисленные для R=500, 1000 и 2000, равны, соответственно, 0.09, 0.06 и 0.05. Эти наблюдения указывают на возможную интегрируемость течения $\mathbf{V}(\infty)$.

Другая тройка взаимно симметричных семейств стационарных решений появляется при $R \approx 149$ также в результате седловой бифуркации. Течения из этих семейств неустойчивы при всех значениях числа Рейнольдса. Обе ветви одного из этих семейств были рассчитаны для $R \leq 1000$. С увеличением R они медленно приближаются к ABC-потоку (3).

ABC-поток имеет шесть ненулевых коэффициентов Фурье, все эти коэффициенты отвечают гармоникам с волновым числом один. У всех найденных стационарных решений основная часть энергии также сосредоточена в этих гармониках (что может быть связано с тем, что энергия поступает в систему через эти гармоники). Более того, при больших числах Рейнольдса вычисленные решения близки к некоторым ABC-потокам. В силу симметрий стационарных решений у этих ABC-потоков $B = C$. На рис. 6 показаны коэффициенты A и B ABC-потоков, наиболее близких к стационарным решениям. На рис. 7 показан квадрат L_2-нормы невязки;

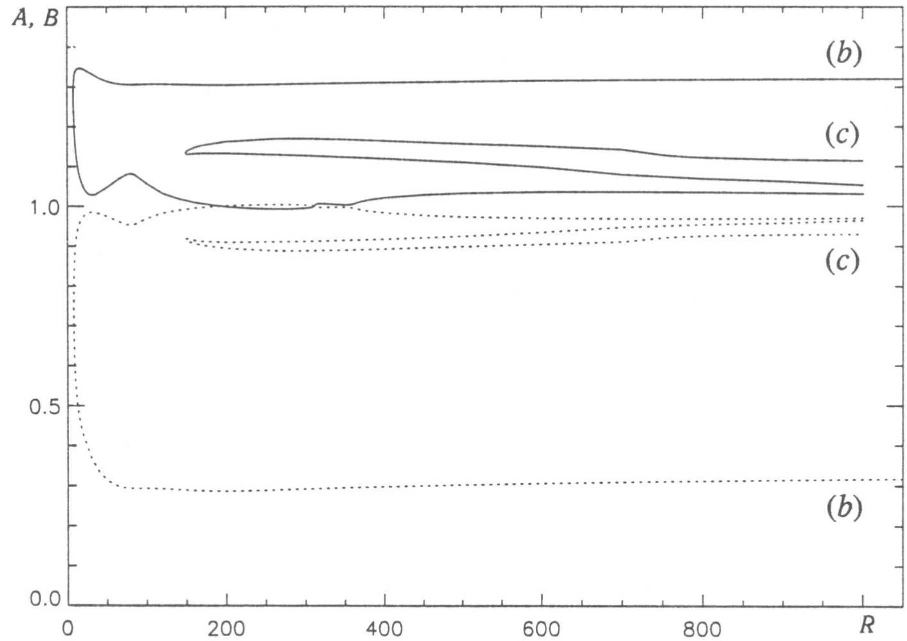

Рис. 6. Коэффициенты A (пунктир) и B (сплошная линия) ABC-потоков, наиболее близких к стационарным решениям
(b) – ветвь, появляющаяся при $R \approx 7.9$; (c) – ветвь, появляющаяся при $R \approx 149$

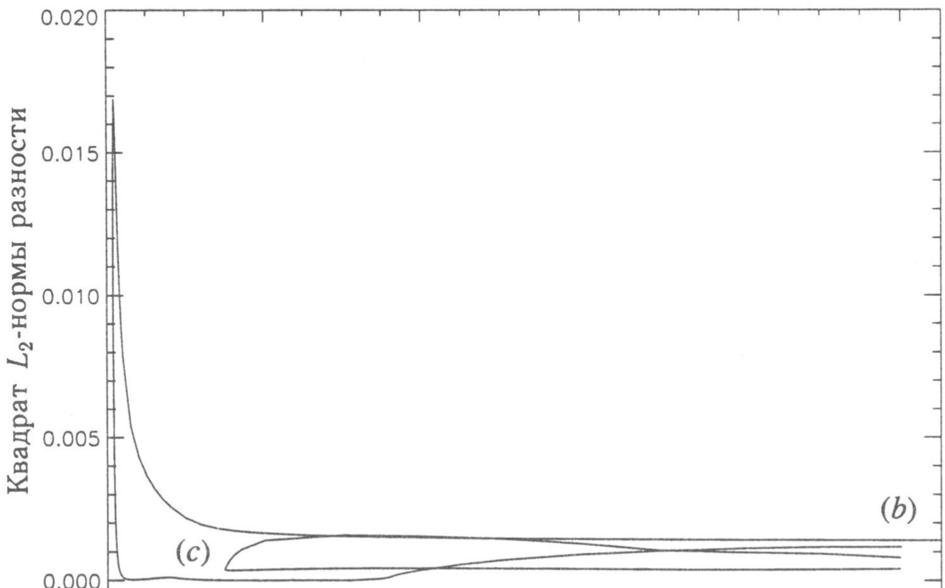

Рис. 7. Квадрат L_2-нормы разности между стационарными решениями и наиболее близкими к ним ABC-потоками
(b) – ветвь, появляющаяся при $R \approx 7.9$; (c) – ветвь, появляющаяся при $R \approx 149$

для первого семейства эта норма максимальна вблизи R=7.9 и убывает с ростом R, не стремясь, однако, к нулю. Для другого семейства она медленно уменьшается, что соответствует приближению решений к ABC-потоку (3).

Благодарю В.А. Желиговского за плодотворные обсуждения. Работа была выполнена в период обучения автора в аспирантуре Сиднейского Университета, Австралия. Расчеты проведены на параллельном суперкомпьютере CM-5 в центрах Sydney Regional Centre for Parallel Computing (Университет Нового Южного Уэльса, Сидней) и South Australian Centre for Parallel Computing (Аделаида).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Arnold V.I.* Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. 1965. Vol. 261. P. 17–20.
2. *Арнольд В.И.* Об эволюции магнитного поля под действием переноса и диффузии // Некоторые вопросы современного анализа. М.: Изд-во МГУ, 1984. С.8–21.
3. *Dombre T., Frisch U., Greene J.M. et al.* Chaotic streamlines in the ABC flows // J. Fluid Mech. 1986. Vol. 167. P. 353–391.
4. *Podvigina O.M.* Spatially-periodic steady and evolutionary solutions to the three-dimensional Navier–Stokes equation with ABC forcing. Дис. ... докт. философии: Сиднейский Университет, 1997. 123 с.
5. *Galloway D.J., Frisch U.* A note on the stability of a family of space-periodic Beltrami flows // J. Fluid Mech. 1987. Vol. 180. P. 557–564.
6. *Podvigina O., Pouquet A.* On the non-linear stability of the 1:1:1 ABC flow // Physica D. 1994. Vol. 75. P. 471–508.
7. *Podvigina O.M., Zheligovsky V.A.* An optimized iterative method for numerical solution of large systems of equations based on the extremal property of zeroes of Chebyshev polynomials // J. Sci. Computing. 1997. Vol. 12, N4. P. 433–464.
8. *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1985. 472 с.