III. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ГЕОФИЗИКИ

УДК 550.330: 517.984

О ВОССТАНОВЛЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ГОРИЗОНТАЛЬНО ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОЙ СРЕДЫ ПО ВОЛНОВЫМ ЧИСЛАМ И АМПЛИТУДАМ ПРОГРЕССИВНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

Н.Н. Новикова
Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук

Г.М. Хенкин
Университет Пьера и Марии Кюри, Париж

В развитие работы авторов [1] в настоящей статье предлагается вычислительный метод, позволяющий с большей точностью восстановить достаточно гладкое распределение плотности и модуля сжатия горизонтально однородной жидкой среды только по волновым числам и амплитудам прогрессивных поверхностных волн, возбуждаемых монохроматическим источником на двух разных и достаточно больших частотах.

ON RECOVERING THE DENSITY DISTRIBUTION OF A HORIZONTALLY HOMOGENEOUS LIQUID MEDIUM FROM WAVE-NUMBERS AND AMPLITUDES OF PROGRESSIVE SURFACE WAVES

N.N. Novikova
International Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences

G.M.Henkin
Université de Pierre et Marie Curie, Paris

Following [1] in the present article a computational method is proposed. This method allows with large precision to reconstruct a sufficiently smooth distribution of density and modulus of compressibility of horisontally homogeneous liquid media, only through wave-numbers and amplitudes of progressive surface waves exited by a monochromatic source with two different and sufficiently large frequencies.

ВВЕДЕНИЕ

Монохроматический источник звука в горизонтально однородном жидком полупространстве $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \geq 0$ вызывает колебания среды, наиболее характерную часть которых составляют поверхностные волны, называемые прогрессивными или бегущими нормальными волнами. В цикле работ [1–6] разработан весьма эффективный метод, позволяющий при фиксированной достаточно большой частоте зондирования по волновым числам и амплитудам прогрессивных волн с хорошей точностью восстановить акустический профиль жидкой среды $\lambda(x)/\rho(x)$, $x \geq 0$, где $\rho(x)$ – плотность, $\lambda(x)$ – модуль сжатия. При этом казалось невозможным [7] по характеристикам прогрессивных волн, без использования дополнительной информации восстановить отдельно распределение плотности $\rho(x)$ и модуля сжатия $\lambda(x)$, $x \geq 0$.

В развитие работы [1] в настоящей статье предлагается метод, позволяющий с любой точностью восстановить достаточно гладкие $\rho(x)$ и $\lambda(x)$ только по волновым числам и амплитудам прогрессивных волн, возбуждаемых монохроматическим источником на двух разных и достаточно больших частотах.

1. ПРОГРЕССИВНЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ

На основе [2, 8] резюмируем в удобном для нас виде теорию прогрессивных поверхностных волн.

Пусть $P(x, y, z, t)$ обозначает гидростатическое давление в жидком полупространстве $x \geq 0$ в момент $t \geq 0$. Пусть источник монохроматических колебаний расположен вблизи поверхности полупространства $x \geq 0$ и имеет вид

$$P(+0, y, z, t) = F(r)e^{i\omega t}, \quad r = \sqrt{y^2 + z^2}.$$

Тогда стационарные колебания гидростатического давления имеют вид $P(x, r, t) = Re\,[P_0(x, r)e^{i\omega t}]$, где функция $P_0(x, r)$ удовлетворяет стационарному акустическому уравнению

$$\Delta P_0 + \frac{\nabla \rho}{\rho} \nabla P_0 + \omega^2 \frac{\rho}{\lambda} P_0 = 0,$$

с граничными условиями $P_0(+0, r) = F(r)$; $P_0(\infty, r) = 0$.

Сделаем подстановку Лиувилля

$$P_0(x, r) = \sqrt{\frac{\rho(x)}{\rho(0)}}\,\psi(x, r).$$

Тогда в циллиндрических координатах функция $\psi(x, r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left(\omega^2 \frac{\rho(x)}{\lambda(x)} - \frac{(1/\sqrt{\rho(x)})''}{1/\sqrt{\rho(x)}}\right)\psi = 0$$

с граничными условиями

$$\psi(+0, r) = F(r), \quad \psi(\infty, r) = 0.$$

Ввиду горизонтальной однородности среды полезно сделать преобразование Фурье–Бесселя функции $\psi(x,r)$ по переменной $r \geq 0$. Получим функцию

$$\varphi(x,\xi) = \int_0^\infty \psi(x,r) r I_0(\xi r) dr,$$

где $I_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z \sin\alpha)d\alpha$ – функция Бесселя нулевого порядка. При этом

$$\varphi'_x(x,\xi) = \int_0^\infty \frac{\partial\psi}{\partial x}(x,r) r I_0(\xi r) dr.$$

В результате функция $\varphi(x,\xi)$ удовлетворяет уравнению Штурма–Лиувилля

$$-\varphi''(x,\xi) + q_\omega(x)\varphi(x,\xi) = -\xi^2\varphi(x,\xi), \tag{1.1}$$

где потенциал имеет вид

$$q_\omega(x) = -\omega^2\frac{\rho(x)}{\lambda(x)} + \frac{(1/\sqrt{\rho(x)})''}{1/\sqrt{\rho(x)}}, \quad x \geq 0. \tag{1.2}$$

Граничные условия имеют следующий вид:

$$\varphi(0,\xi) = \int_0^\infty F(r) r I_0(\xi r) dr \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(\xi), \qquad \varphi(x,\xi) \to 0, \quad x \to \infty. \tag{1.3}$$

Обратное преобразование Фурье–Бесселя реализует фундаментальное представление стационарных колебаний $P(x,r,t)$ в виде суммы колебаний двух видов: бегущих поверхностных волн P_1 и стоячих волн P_2. Интенсивность колебаний $P_1(x,r,t)$ экспоненциально убывает по $x \to \infty$ и медленно, как $O(1/\sqrt{r})$ по $r \to \infty$. Интенсивность колебаний $P_2(x,r,t)$ быстро убывает по $r \to \infty$. При этом

$$P_1(x,r,t) = \sqrt{\frac{\rho(x)}{\rho(0)}}\sum_{k=1}^N \pi A_k\varphi(x,\xi_k)[E_0(\xi_k r)\cos\omega t + J_0(\xi_k r)\sin\omega t], \tag{1.4}$$

$$P_2(x,r,t) = P_2^0(x,r)\cos\omega t,$$

где $\{\xi_j\}$ и $\{A_j\}$ – так называемые волновые числа и амплитуды поверхностных волн.

Имеет место следующая интерпретация этих параметров в терминах спектральных характеристик задачи Дирихле для уравнения Штурма–Лиувилля (1.1). Числа $\{-\xi_j^2\}$ – собственные значения задачи Дирихле для (1.1); функции $\{\varphi(x,\xi_j)\}$ – собственные функции задачи Дирихле для (1.1) с нормировочным условием $\varphi'_x(0,\xi_j) = 1$, $j = 1,2,\ldots,N$. Далее:

$$A_j = -\frac{1}{2}\Phi(\xi_j)\left(\int_0^\infty \varphi^2(x,\xi_j)dx\right)^{-1}, \tag{1.5}$$

$E_0(\xi r)$, $J_0(\xi r)$ – функции Вебера и Бесселя нулевого порядка. Прогрессивные поверхностные волны $P_1(x, r, t)$ в силу (1.4) зависят от отрицательного дискретного спектра задачи Дирихле для (1.1). Стоячие волны $P_2(x, r, t)$ связаны с непрерывным спектром этой задачи. Можно ли восстановить параметры жидкой среды $\rho(x)$ и $\lambda(x)$ по характеристикам $\{\xi_j\}$ и $\{A_j\}$ прогрессивных волн, вызываемых монохроматическим источником?

Эта задача исследовалась в работах [1–6] на основе теории обратных задач Штурма–Лиувилля [9, 10].

2. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ ПО ХАРАКТЕРИСТИКАМ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА

Пусть потенциал $q_\omega(x)$ в уравнении Штурма–Лиувилля (1.1) удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty \sqrt{|q_\omega(x)|}dx < \infty.$$

Для любого $\xi > 0$ пространство функций $\varphi(x, \xi)$, удовлетворяющих (1.1) и условию (1.3), одномерно, и поэтому корректно определена функция $j(\xi) = \varphi'_x(0, \xi)/\varphi(0, \xi)$, называемая импедансом или функцией Вейля задачи Дирихле для (1.1). В силу теоремы Вейля–Титчмарша [9] функция $j(\xi)$ мероморфно продолжается в полуплоскость $\{\xi \in \mathbb{C} : Re\,\xi > 0\}$ с простыми полюсами в точках $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ положительной полуоси. При этом

$$\lim_{\xi \to \xi_j} j(\xi)(\xi_j^2 - \xi^2) = C_j, \tag{2.1}$$

где

$$C_j = \left(\int_0^\infty \varphi^2(x, \xi)dx \right)^{-1},$$

$$\varphi(0, \xi_j) = 0, \ \varphi(\infty, \xi_j) = 0, \ \varphi'_x(0, \xi) = 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, N,$$

$$N \le \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sqrt{|q_\omega(x)|}dx.$$

На действительной оси $\tau \in \mathbb{R}$ определим (положительную) меру вида

$$\sigma(d\tau) = \begin{cases} \sum_{j=1}^N C_j \delta(\tau + \xi_j^2)d\tau = \sigma_-(d\tau), & \tau < 0, \\ \frac{1}{\pi} Im\, j(-i\sqrt{\tau})d\tau = \sigma_+(d\tau), & \tau > 0, \end{cases}$$

где $\delta(\cdot)$ – функция Дирака. Мера $\sigma(d\tau)$ называется спектральной мерой задачи Дирихле для уравнения (1.1).

Введем в рассмотрение также некоторый фиксированный опорный потенциал $q_0(x)$ без отрицательного спектра, т.е. со спектральной мерой вида

$$\sigma^0(d\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0, \\ \sigma_+^0(d\tau), & \tau > 0. \end{cases}$$

Например, для $q_0(x) \equiv 0$ имеем

$$j_0(\xi) = -\xi \quad \text{и} \quad \sigma^0(d\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \leq 0, \\ \frac{1}{\pi}\sqrt{\tau}d\tau, & \tau > 0. \end{cases}$$

Классическая формула Гельфанда–Левитана [9, 10] для восстановления $q(x)$ через $q_0(x)$ и спектральную меру $\sigma(d\tau)$ имеет вид

$$\int_0^x q(y)dy = \int_0^x q_0(y)dy + 2A(x,x). \tag{2.2}$$

При этом $A(x,y)$ есть решение интегрального уравнения

$$\Phi(x,y) + \int_0^x A(x,s)\Phi(s,y)ds + A(x,y) = 0,$$

с ядром вида

$$\Phi(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x,-i\sqrt{\tau})\varphi_0(y,-i\sqrt{\tau})(\sigma(d\tau) - \sigma^0(d\tau)),$$

где $\varphi_0(x,\xi)$ удовлетворяет уравнению (1.1) с потенциалом $q_0(x)$ и краевым условием $y_0(\infty,\xi) = 0$, $y_0'(0,\xi) = 1$.

Из формул (1.4),(1.5) следует, что характеристики прогрессивных волн $\{\xi_j\}$, $\{A_j\}$ дают нам полную информацию о спектральной мере $\sigma_-(d\tau)$ на отрицательной полуоси (при условии, что известен также источник колебаний $\Phi(\xi)$) и не дают никакой информации о спектральной мере $\sigma_+(d\tau)$ на положительной полуоси.

Хотя полное восстановление потенциала $q_\omega(x)$ только по спектральной мере $\sigma_-(d\tau)$ на отрицательной полуоси, вообще говоря, невозможно, представляется перспективным разрабатывать методы приближенного восстановления $q_\omega(x)$ по $\sigma_-(d\tau)$ с точностью, возрастающей с ростом ω.

Действительно, поскольку потенциал q_ω вида (1.2) по крайней мере при больших ω является отрицательным (притягивающим), то по известной асимптотической формуле Вейля число отрицательных собственных значений $N(\omega)$ возрастает с ростом ω асимптотически, как

$$N(\omega) \sim \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \sqrt{|q_\omega(x)|}dx \sim \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{\rho(x)}{\lambda(x)}}dx.$$

Поэтому можно рассчитывать, что с ростом ω вклад в формулу (2.2) для искомого потенциала q_ω от спектральной меры $\sigma_+(d\tau)$ на положительной полуоси уменьшается.

В работах [1–6] детально разработана следующая конструкция.

Пусть q_ω – потенциал вида (1.2). Положим $q_0 \equiv 0$ и в качестве потенциала, аппроксимирующего $q_\omega(x)$, возьмем потенциал $q_\omega^0(x)$, для которого

$$\begin{cases} \sigma_-(d\tau) = \sum_{j=1}^N C_j\delta(\tau+\xi_j^2)d\tau, & \tau<0, \\ \sigma_+(d\tau) = \sigma_+^0(d\tau) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\tau}d\tau, & \tau>0, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $\{-\xi_j^2\}$, $\{C_j\}$ – характеристики дискретного спектра (1.1) с потенциалом (1.2). Далее, на основе формулы Гельфанда–Левитана в [3] найдена явная формула (см. также разд. 3) для $q_\omega^0(x)$, разработан метод вычислений [4] по этой формуле. Многочисленные эксперименты [5] дают хорошую и устойчивую сходимость

$$\frac{1}{\omega^2}q_\omega^0(x) \to \frac{1}{\omega^2}q_\omega(x) \approx -\frac{\rho(x)}{\lambda(x)},\ \omega\to\infty.$$

Наконец, в [1] и [6] доказано следующее утверждение.

Теорема 0. Пусть потенциал $q_\omega(x)$ вида (1.2) таков, что для некоторых постоянных $\omega_0>0$, $x_0>0$ и некоторой положительной функции $b(a)$ имеем

1) $q_\omega(x)<0,\ x\ge 0, \omega\ge\omega_0$,

2) $\frac{d}{dx}q_\omega(x)$ *имеет конечное число интервалов монотонности при* $x\ge 0$, $\omega\ge\omega_0$,

3) $b(a)\le \left|\frac{d^2}{dx^2}q_\omega(x)\right|x^a \le \frac{1}{b(a)}$, при $x\ge x_0$, $a>4$.

Тогда для любого $X>0$ равномерно по $x\in[0,X]$ имеет место оценка

$$\frac{1}{\omega^2}\left|\int\limits_0^x (q_\omega(y)-q_\omega^0(y))dy\right| = O\left(\frac{\ln\omega}{\sqrt{\omega}}\right). \tag{2.4}$$

Описанные результаты полностью обосновывают возможность приближенного восстановления акустического профиля водной среды $\lambda(x)/\rho(x)$ по характеристикам прогрессивных поверхностных волн с точностью, возрастающей с ростом частоты зондирования ω.

Однако оценка (2.4) и многочисленные эксперименты с аппроксимирующим потенциалом $q_\omega^0(x)$ не дают еще никаких оснований на возможность отдельного восстановления параметров жидкой среды $\lambda(x)$ и $\rho(x)$ по характеристикам прогрессивных волн.

Приведенный в [1] более тщательный ВКБ-анализ асимптотики по ω функции Вейля $j(\xi)$ для уравнения (1.1) с потенциалом q_ω вида (1.2) показал, что аппроксимация потенциала q_ω может быть значительно улучшена, если в качестве аппроксимирующего потенциала взять такой потенциал $q_\omega^*(x)$, для которого

$$\begin{cases} \sigma_-(d\tau) = \sum_{j=1}^N C_j\delta(\tau+\xi_j^2)d\tau, & \tau<0, \\ \sigma_+(d\tau) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\tau-q_\omega(0)}d\tau, & \tau>0, \end{cases} \tag{2.5}$$

где по-прежнему $\{-\xi_j^2\}$, $\{C_j\}$ – характеристики дискретного спектра (1.1) с потенциалом (1.2).

В [1] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть потенциал $q_\omega(x)$ вида (1.2) таков, что для некоторых постоянных $\omega_0>0$, $x_0>0$ и положительной функции $b(a)$ имеем

1) $q_\omega(x) < 0,\ x \geq 0,\ \omega \geq \omega_0,$

2) $\frac{d^2}{dx^2} q_\omega(x)$ *имеет конечное число интервалов монотонности при* $x \geq 0,\ \omega \geq \omega_0,$

3) $b(a) \leq \left|\frac{d^3}{dx^3} q_\omega(x)\right| x^a \leq \frac{1}{b(a)}$ *при* $x \geq x_0,\ a > 5.$

Тогда для любого $X > 0$ *равномерно по* $x \in [0, X]$ *имеет место оценка*

$$\frac{1}{\omega^2}\left|\int\limits_0^x (q_\omega(y) - q^*_\omega(y))dy\right| = O\left(\frac{1}{\omega^3}\right). \tag{2.6}$$

Фиксируем далее $0 < \theta < 1$ и используем оценку (2.6) для двух относительно больших частот ω и $\theta\omega$. Учитывая конкретный вид (1.2) потенциала q_ω, получаем следствие.

Следствие. В условиях теоремы *1* имеем

$$\int\limits_0^x \left[\frac{\rho(y)}{\lambda(y)} - \frac{1}{(1-\theta^2)\omega^2}(q^*_\omega(y) - q^*_{\theta\omega}(y))\right] dy = O\left(\frac{1}{\omega^3}\right), \tag{2.7}$$

$$\int\limits_0^x \left[\frac{(1/\sqrt{\rho(y)})''}{(1/\sqrt{\rho(y)})} - \frac{1}{1-\theta^2} q^*_{\theta\omega} + \frac{\theta^2}{1-\theta^2} q^*_\omega\right] dy = O\left(\frac{1}{\omega}\right). \tag{2.8}$$

Оценка (2.8) указывает на теоретическую возможность приближенного восстановления $\rho(x)$ только по характеристикам прогрессивных волн и еще по параметру

$$q_\omega(0) = -\omega^2 \frac{\rho(0)}{\lambda(0)} + \frac{(1/\sqrt{\rho})''(0)}{1/\sqrt{\rho}(0)},$$

участвующему в построении $q^*_\omega(x)$.

Оценка (2.7) показывает, что с помощью аппроксимаций $q^*_\omega(x)$ можно надеяться восстановить акустический профиль $\frac{\lambda(x)}{\rho(x)}$ с заметно бóльшей точностью, чем с помощью аппроксимаций $q^0_\omega(x)$.

3. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Пусть $q_\omega(x)$ – некоторый потенциал вида (1.2), где ω – фиксированный достаточно большой параметр. Следуя алгоритму, разработанному в [2], можно найти собственные значения $\{-\xi_j^2\}$ и собственные функции $y(x, \xi_j)$ задачи Дирихле для уравнения (1.1) с потенциалом (1.2). В результате получаем также константы $\{C_j\}$ вида (2.1), пропорциональные в силу (1.5) амплитудам $\{A_j\}$ бегущих поверхностных волн.

Аппроксимирующий потенциал $q^0_\omega(x)$, найденный в [3], легко и явно строится по формуле Гельфанда–Левитана. Именно, спектральная мера для q^0_ω имеет вид (2.3), поэтому ядро соответствующего интегрального уравнения имеет вид

$$\Phi^0(x, y) = \sum_{j=1}^N C_j \frac{\sin(i\xi_j x)}{i\xi_j} \times \frac{\sin(i\xi_j x)}{i\xi_j}.$$

В результате потенциал $q^0_\omega(x)$ имеет вид:

$$q^0_\omega(x) = 2\frac{d^2}{dx^2}\ln|\det W_{sr}(x)|, \tag{3.1}$$

где

$$W_{sr} = \frac{2\mathrm{sh}(\xi_s+\xi_r)x}{\xi_s+\xi_r} - (1-\delta_{sr})\frac{2\mathrm{sh}(\xi_s-\xi_r)x}{\xi_s-\xi_r} - \delta_{sr}\left[2x - \frac{4\xi_r^2}{C_r}\right], \tag{3.2}$$

$$\delta_{sr} = \begin{cases} 1, & s = r, \\ 0, & s \neq r, \end{cases} \qquad s, r = 1, 2, \ldots, N.$$

Для аппроксимирующего потенциала $q^*_\omega(x)$ спектральная мера имеет вид (2.5). Поэтому, если за опорный принять нулевой потенциал, то ядро интегрального уравнения для нахождения $q^*_\omega(x)$ имеет вид

$$\Phi^*(x,y) = \sum_{j=1}^{N} C_j \frac{\sin(i\xi_j x)}{i\xi_j} \times \frac{\sin(i\xi_j y)}{i\xi_j} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin(\sqrt{\tau}x)}{\sqrt{\tau}} \times \frac{\sin(\sqrt{\tau}y)}{\sqrt{\tau}}(\sqrt{\tau - q_\omega(0)} - \sqrt{\tau})d\tau. \tag{3.3}$$

В отличие от $\Phi^0(x,y)$ ядро $\Phi^*(x,y)$ не является вырожденным. Поэтому потенциал $q^*_\omega(x)$ не находится в явном виде. Для численных расчетов потенциала $q^*_\omega(x)$ наиболее эффективной оказалась следующая процедура. Выберем на полуоси $\tau \geq 0$ конечное число точек $\tau_k = \mu_k^2$, $k = 0, 1, \ldots, M$, так что $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_M$. Положим

$$D_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mu_{k-1}^2}^{\mu_k^2} (\sqrt{\tau - q_\omega(0)} - \sqrt{\tau})d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots, M. \tag{3.4}$$

Ядро $\Phi^*(x,y)$ заменим далее на вырожденное ядро $\tilde{\Phi}^*(x,y)$, в котором вместо интеграла в правой части (3.3) берется интегральная сумма вида

$$\sum_{k=1}^{M} D_k \frac{\sin(\mu_k x)}{\mu_k} \times \frac{\sin(\mu_k y)}{\mu_k},$$

где

$$\begin{gathered} D_k = F(\mu_k) - F(\mu_{k-1}), \\ F(\mu_k) = \frac{-2}{3\pi}q_\omega(0)\left[\frac{3\mu_k^4 - 3\mu_k^2 q_\omega(0) + q_\omega^2(0)}{(\mu_k^2 - q_\omega(0))^{3/2} + \mu_k^3}\right], \quad k = 1, \ldots, M. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Интегральное уравнение Гельфанда–Левитана с вырожденным ядром $\tilde{\Phi}^*(x,y)$ приводит [3] к потенциалу вида

$$\tilde{q}_\omega^*(x) = 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\left|\det\begin{pmatrix} W^{11} & W^{12} \\ W^{21} & W^{22}\end{pmatrix}\right|, \tag{3.6}$$

где $W^{11}(x)$ и $W^{22}(x)$ – квадратные симметричные матрицы, соответственно, порядков N и M, матрицы W^{12} и W^{21} – прямоугольные, причем W^{21} является транспонированной по отношению к W^{12}. Элементы матрицы W^{11} определены, как в (3.2). Далее:

$$\begin{gathered} W_{sr}^{12} = W_{rs}^{21} = -\frac{4}{\xi_s^2+\mu_r^2}(\mu_r\cos(\mu_r x)\mathrm{sh}(\xi_s x) - \xi_s\sin(\mu_r x)ch(\xi_s x)), \\ s=1,2,\ldots,N; \quad r=1,2,\ldots,M. \\ W_{sr}^{22} = -\frac{2\sin((\mu_s+\mu_r)x)}{\mu_s+\mu_r} + (1-\delta_{sr})\frac{2\sin((\mu_s-\mu_r)x)}{\mu_s-\mu_r} + \delta_{sr}\left(2x+\frac{\mu_r^2}{D_r}\right), \\ s=1,2,\ldots,M; \quad r=1,2,\ldots,M. \end{gathered} \tag{3.7}$$

При небольшом $\sup_k|\mu_k-\mu_{k-1}|$ и достаточно большом M потенциал $\tilde{q}_\omega^*$ весьма близок к потенциалу q_ω^* на отрезке достаточно большой длины. Для счета потенциалов q_ω^0 и $\tilde{q}_\omega^*$ по формулам (3.3)–(3.7) можно воспользоваться программой из [4].

4. МОДЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ

Основываясь на алгоритмах разд. 3, приведем результаты численных экспериментов, направленных на сравнение двух методов аппроксимации потенциалов q_ω вида (1.2) (по характеристикам прогрессивных поверхностных волн) потенциалом q_ω^0 вида (3.1) и потенциалом q_ω^* вида (3.6).

Представим потенциал (1.2) в виде

$$q_\omega = -\omega^2 Q_0(x) - Q_1(x), \tag{4.1}$$

где $Q_0(x) = \frac{\rho(x)}{\lambda(x)}$ и $Q_1(x) = -\sqrt{\rho}(1/\sqrt{\rho})''$.

По физическому смыслу потенциал $Q_0(x)$ всегда положителен, потенциал же $Q_1(x)$ может быть любого знака. В связи с этим рассмотрим два примера. В обоих примерах положительный потенциал $Q_0(x)$ имеет вид

$$Q_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x\in[0,3], \\ 0, & \text{если } x>3. \end{cases} \tag{4.2}$$

В первом примере потенциал $Q_1(x)$ положителен и имеет вид

$$Q_1(x) = Q(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} 0, & \text{если } x\in[0;0.2]\cup[2.8;\infty), \\ 0.2, & \text{если } x\in(0.2;0.4)\cup(2.6;2.8), \\ 0.4, & \text{если } x\in[0.4;0.6]\cup[2.4;2.6], \\ 0.6, & \text{если } x\in(0.6;0.8)\cup(2.2;2.4), \\ 0.8, & \text{если } x\in[0.8;1]\cup[2.0;2.2), \\ 1.0, & \text{если } x\in(1;2). \end{cases} \tag{4.3}$$

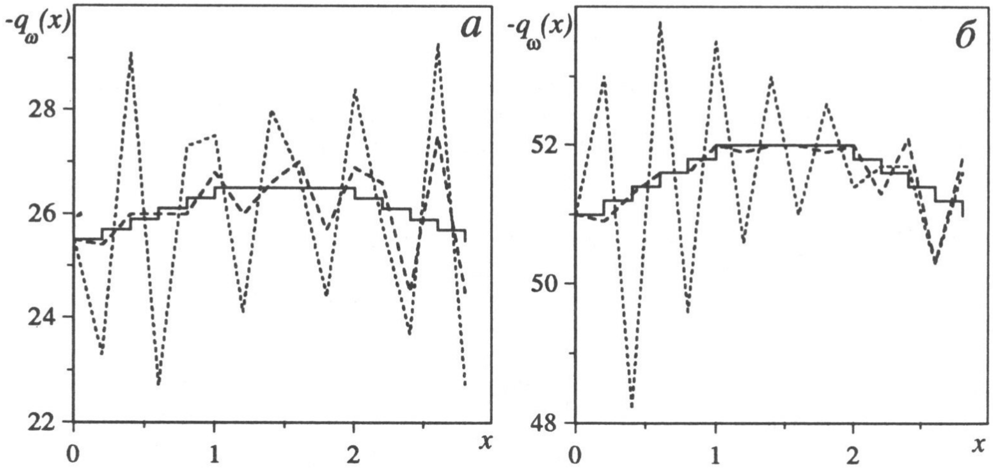

Рис. 1. Аппроксимация потенциала $q_\omega = -\omega^2 Q_0 - Q_1$ с притягивающими слагаемыми $-\omega^2 Q_0$ и $-Q_1$ ($Q_0 > 0$, $Q_1 > 0$), позволяющая восстановить не только Q_0, но и Q_1, при $\omega^2 = 25.5$ (*а*) и $\omega^2 = 51$ (*б*)

Сплошная линия – график потенциала $-q_\omega = \omega^2 Q_0 + Q_1$ вида (4.1)-(4.3), пунктир – аппроксимация $-q_\omega$ функцией $-q^0_\omega$ по формуле (3.1), штриховая линия – аппроксимация $-q_\omega$ функцией $-q^*_\omega$ по формуле (3.6)

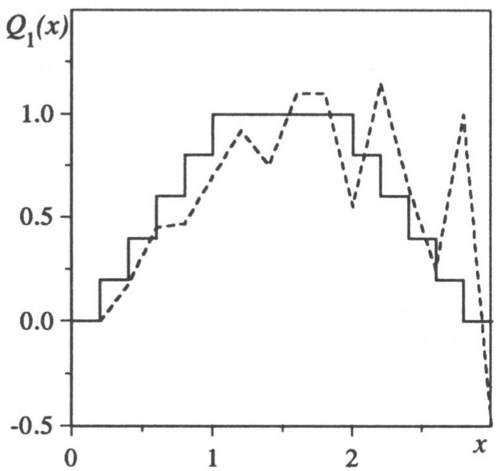

Рис. 2. График потенциала Q_1 вида (4.3) (сплошная линия) и аппроксимация $Q_1 = -2q_{\sqrt{25.5}} + q_{\sqrt{51}}$ функцией вида $Q_1^* = -2q^*_{\sqrt{25.5}} + q^*_{\sqrt{51}}$ (штриховая)

Во втором примере потенциал $Q_1(x)$ отрицательный и имеет вид

$$Q_1(x) = -Q(x). \tag{4.4}$$

В каждом примере выбираются два значения параметра ω: $\omega^2 = 25.5$ и $\omega^2 = 51$.

Графики $(-q_\omega)$ для первого примера в виде ступенчатых функций приведены на рис. 1,*а* для $\omega^2 = 25.5$ и на рис. 1,*б* для $\omega^2 = 51$; график Q_1 вида (4.3) изображен ступенчатой функцией на рис. 2.

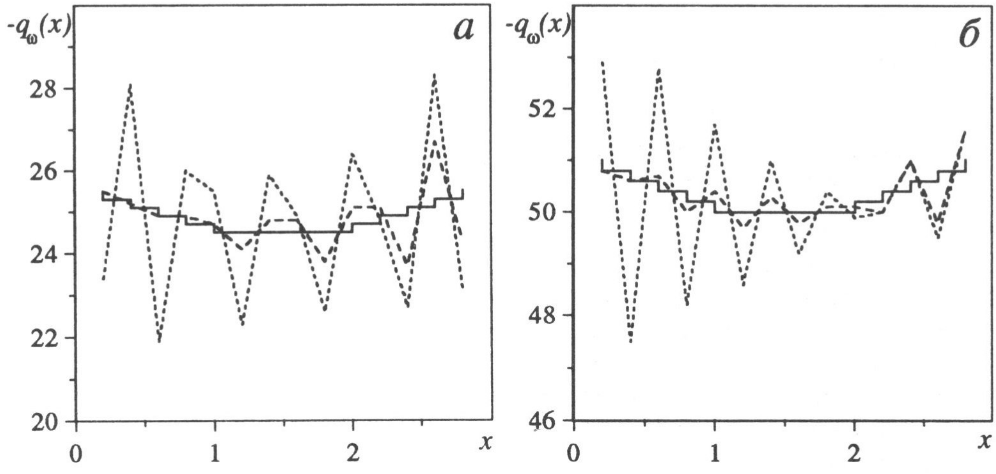

Рис. 3. Аппроксимация потенциала $q_\omega = -\omega^2 Q_0 - Q_1$ с притягивающим слагаемым $-\omega^2 Q_0$ и отталкивающим слагаемым $-Q_1$ ($Q_0 > 0$, $Q_1 < 0$), позволяющая восстановить не только Q_0, но и Q_1, при $\omega^2 = 25.5$ (*а*) и $\omega^2 = 51$ (*б*)

Сплошная линия – график потенциала $-q_\omega = \omega^2 Q_0 + Q_1$ вида (4.1), (4.2), (4.4), пунктир – аппроксимация $-q_\omega$ функцией $-q_\omega^0$ по формуле (3.1), штриховая линия аппроксимация $-q_\omega$ функцией $-q_\omega^*$ по формуле (3.6)

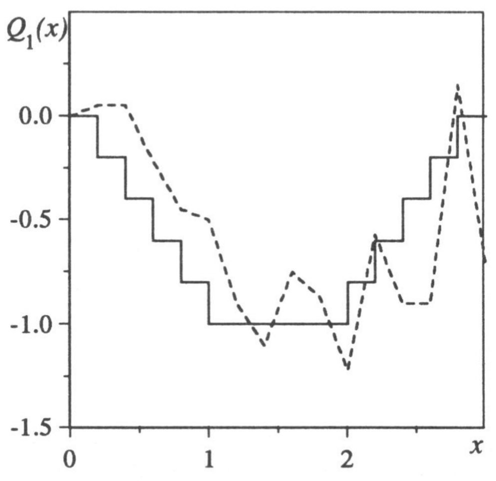

Рис. 4. График потенциала Q_1 вида (4.4) (сплошная линия) и аппроксимация $Q_1 = -2q_{\sqrt{25.5}} + q_{\sqrt{51}}$ функцией вида $Q_1^* = -2q^*_{\sqrt{25.5}} + q^*_{\sqrt{51}}$ (штриховая)

Графики $(-q_\omega)$ для второго примера в виде ступенчатых функций приведены на рис. 3,*а* для $\omega^2 = 25.5$ и на рис. 3,*б* для $\omega^2 = 51$; график Q_1 вида (4.4) изображен ступенчатой функцией на рис. 4.

Подходящим образом модифицированная программа [2] дает в задаче Дирихле для уравнения Штурма–Лиувилля с потенциалом вида (4.1),(4.2),(4.3) следующие значения характеристик дискретного спектра $\{\xi_s\}$, $\{C_s\}$.

В случае $\omega^2 = 25.5$

$$\begin{aligned}
&\xi_1 = 5.03657, \qquad C_1 = 0.53689,\\
&\xi_2 = 4.71650, \qquad C_2 = 2.20271,\\
&\xi_3 = 4.17532, \qquad C_3 = 5.10272,\\
&\xi_4 = 3.29791, \qquad C_4 = 9.02828,\\
&\xi_5 = 1.67692, \qquad C_5 = 12.69540.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

В случае $\omega^2 = 51$

$$\begin{aligned}
&\xi_1 = 7.13016, \qquad C_1 = 0.55947,\\
&\xi_2 = 6.90001, \qquad C_2 = 2.33861,\\
&\xi_3 = 6.52541, \qquad C_3 = 5.47785,\\
&\xi_4 = 5.97057, \qquad C_4 = 9.87618,\\
&\xi_5 = 5.17386, \qquad C_5 = 15.29684,\\
&\xi_6 = 4.01174, \qquad C_6 = 21.62475,\\
&\xi_7 = 1.99351, \qquad C_7 = 26.99551.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Для потенциалов вида (4.1),(4.2),(4.4) получили следующие значения характеристик дискретного спектра $\{\xi_s\}$, $\{C_s\}$.

В случае $\omega^2 = 25.5$

$$\begin{aligned}
&\xi_1 = 4.87054, \qquad C_1 = 0.66568,\\
&\xi_2 = 4.59037, \qquad C_2 = 2.61760,\\
&\xi_3 = 4.04147, \qquad C_3 = 5.51417,\\
&\xi_4 = 3.12669, \qquad C_4 = 9.28785,\\
&\xi_5 = 1.35425, \qquad C_5 = 12.59297.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

В случае $\omega^2 = 51$

$$\begin{aligned}
&\xi_1 = 7.01243, \qquad C_1 = 0.71927,\\
&\xi_2 = 6.81195, \qquad C_2 = 2.77399,\\
&\xi_3 = 6.43792, \qquad C_3 = 5.90775,\\
&\xi_4 = 5.87283, \qquad C_4 = 10.22195,\\
&\xi_5 = 5.06473, \qquad C_5 = 15.73461,\\
&\xi_6 = 3.87188, \qquad C_6 = 21.95879,\\
&\xi_7 = 1.71962, \qquad C_7 = 26.69644.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Подставляя параметры (4.5),(4.6) в формулу (3.1), получаем соответствующие потенциалам q_ω вида (4.1),(4.2),(4.3) аппроксимирующие потенциалы q_ω^0; графики $(-q_\omega^0)$ изображены на рис. 1,*а,б*.

Подставляя параметры (4.7),(4.8) в формулу (3.1), получаем соответствующие потенциалам q_ω вида (4.1),(4.2),(4.4) аппроксимирующие потенциалы q_ω^0; графики $(-q_\omega^0)$ изображены на рис. 3,*а,б*.

Для построения аппроксимирующих потенциалов q_ω^* наряду с параметрами $\{\xi_s\}$ и $\{C_s\}$ используются еще и параметры $\{\mu_k\}$ и $\{D_k\}$. При этом параметры $\{\mu_k\}$ можно свободно варьировать, а параметры $\{D_k\}$ задаются формулой (3.4), т.е. зависят только от $q_\omega(0) = -\omega^2 Q_0(0) - Q_1(0)$ и параметров μ_k, $k = 1, 2, \ldots, M$. В примерах удовлетворительная точность получалась при выборе 20 значений параметра μ_k^2 вида: $\mu_1^2 = 1$, $\mu_2^2 = 7$, $\mu_k^2 = (k-1)7$, $k = 2, 3, \ldots, 20$.

При этом в обоих примерах находим D_k по формулам (3.5), где

$$q_\omega(0) = -25.5 \text{ при } \omega^2 = 25.5, \tag{4.9}$$

$$q_\omega(0) = -51 \quad \text{при } \omega^2 = 51 \text{ (см. (4.1))}. \tag{4.10}$$

Подставляя параметры (4.5),(4.6),(3.5),(4.9) в формулу (3.6), получаем соответствующие потенциалам q_ω вида (4.1),(4.2),(4.3), аппроксимирующие потенциалы q_ω^*; графики $(-q_\omega^*)$ изображены на рис. 1,*а,б*. Подставляя параметры (4.7),(4.8),(3.5),(4.10) в формулу (3.6), получаем соответствующие потенциалам q_ω вида (4.1),(4.2),(4.4), аппроксимирующие потенциалы q_ω^*; графики $(-q_\omega^*)$ изображены на рис. 3,*а,б*.

Из вида (4.1) потенциалов q_ω при $\omega^2 = 25.5$ и $\omega^2 = 51$ вытекает, в частности, равенство

$$Q_1 = -2q_{\sqrt{25.5}} + q_{\sqrt{51}}.$$

Поэтому, в соответствии с (2.8) для аппроксимации потенциала Q_1 естественно использовать функцию вида

$$Q_1^*(x) = -2q^*_{\sqrt{25.5}} + q^*_{\sqrt{51}}.$$

Можно пытаться также использовать для аппроксимации функцию вида

$$Q_1^0(x) = -2q^0_{\sqrt{25.5}} + q^0_{\sqrt{51}}.$$

На рис. 2 и 4 изображены аппроксимации графиков Q_1 вида (4.3) и (4.4) соответствующими функциями $Q_1^*(x)$.

Вычисления по формулам (3.1), (3.6) проводились по программе [4].

На рис. 2 и 4 графики, соответствующие функциям $Q_1^0(x)$, не приводятся, поскольку не наблюдалось даже намека на аппроксимацию этими функциями потенциала $Q_1(x)$.

Приведенные модельные примеры убедительно иллюстрируют теоретические результаты [1] и разд. 2 и 3 данной статьи:

1. Аппроксимация потенциала q_ω как потенциалом q_ω^0, так и потенциалом q_ω^* улучшается с ростом $\omega^2 = 25.5; 51$ в согласии с теоремой *0* и теоремой *1*.

2. Аппроксимация потенциала q_ω потенциалом q_ω^* заметно лучше, чем потенциалом q_ω^0 в согласии с теоремой *1*.

3. Аппроксимирующий потенциал q_ω^0 не позволяет восстановить малое слагаемое $-Q_1$ в потенциале вида (4.1). Это подтверждает недостаточно быструю сходимость q_ω^0 к q_ω при $\omega \to \infty$ (см. оценку (2.4) в теореме *0*).

4. Аппроксимирующий потенциал q_ω^* настолько близок к q_ω, что позволяет восстановить малое слагаемое $-Q_1$ в потенциале (4.1). Это указывает на быструю сходимость потенциала q_ω^* к потенциалу q_ω (см. оценку (2.6) в теореме *1*).

5. Возможность восстановления на основе формулы (3.6) слагаемого $-Q_1$ в (4.1) для потенциала Q_1 вида (4.4) представляется особенно интересной. Действительно, в этом случае потенциал $-Q_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} Q(x)$ является положительным (отталкивающим). Поэтому при $\omega = 0$ задача Дирихле для уравнения Штурма–Лиувилля

с потенциалом вида $q_0(x) = -Q_1(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} Q(x)$ не имеет отрицательного дискретного спектра. Поскольку в данном случае $Q_1(0) = 0$, то оба аппроксимирующих потенциала q_0^0 и q_0^* тождественно равны нулю, т.е. при $\omega = 0$ никакой аппроксимации не наблюдается. Однако рассмотрение малого положительного потенциала $-Q_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} Q$ в сумме с большим отрицательным потенциалом $-\omega^2 Q_0$ приводит в задаче Дирихле для уравнения Штурма–Лиувилля к таким характеристикам дискретного спектра $\{\xi_s\}$ и $\{C_s\}$, которых оказывается достаточно, чтобы по формуле (3.6) восстановить не только отрицательный потенциал $-Q_0$, но и положительный $-Q_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} Q$.

Авторы приносят благодарность за поддержку профессору Ж.П. Монтанье, лаборатория сейсмологии, Институт физики Земли, Университет "Париж-6".

Работа выполнена при поддержке ИНТАС (проект INTAS-RFBR 95-0865).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Henkin G.M., Novikova N.N.* The reconstruction of the attracting potential in the Sturm–Liouville equation through characteristics of negative discrete spectrum // Studies in Appl. Math. 1996. N 97. P.17-52.
2. *Левшенко В.Т., Маркушевич В.М., Резников Е.Л.* О расчете смещений среды при виброзондировании крутильными колебаниями // Математические модели строения Земли и прогноза землетрясений. (Вычисл. сейсмология. Вып. 14). М.: Наука, 1981. С.134-145.
3. *Маркушевич В.М., Новикова Н.Н., Резников Е.Л.* Представление потенциала в явном виде через рациональную функцию Вейля для задачи Штурма-Лиувилля на полуоси // ДАН СССР. 1984 Т.278, N 5. С.1095-1097.
4. *Маркушевич В.М., Новикова Н.Н.* Метод вычисления потенциалов для некоторых рациональных импедансов. М.: 1984. 72 с. Деп. в ВИНИТИ АН СССР. 5.11.1984. N 7583-84.
5. *Маркушевич В.М., Новикова Н.Н., Повзнер Т.А. и др.* Метод определения акустического профиля по нормальным монохроматическим волнам // Математические методы в сейсмологии и геодинамике. (Вычисл. сейсмология. Вып. 19). М.: Наука, 1986. С.135-145.
6. *Новикова Н.Н., Хенкин Г.М.* О восстановлении оператора Штурма–Лиувилля по характеристикам дискретного спектра // Численное моделирование и анализ геофизических процессов. (Вычисл. сейсмология. Вып. 20). М.: Наука, 1987. С.174-185.
7. *Бродов Л.Ю., Локцик В.В., Маркушевич В.М. и др.* Опыт монохроматического зондирования верхней части разреза с помощью горизонтального вибратора // Современные методы интерпретации сейсмологических данных. (Вычисл. сейсмология. Вып. 24). М.: Наука, 1991. С.171-185.
8. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. М.: Мир, 1983. 880 с.
9. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984. 238 с.
10. *Гельфанд И.М., Левитан Б.М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1951. N 15. С.309-360.