

УДК 517+550.34

НОВОЕ В КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ОБРАЩЕНИЯ ГОДОГРАФА

М.Л. Гервер

*Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук*

Цель статьи – рассказать о новейших результатах в классической задаче обращения годографа, познакомить читателей с новыми ключевыми понятиями (универсальная последовательность, мажоранта и особые точки), появившимися в последние годы в исследованиях, посвященных этой задаче, и объяснить – с использованием принципа двойственности –, почему дискретные меры (или – физически – волноводы с конечным числом слоев) играют такую важную роль при описании неединственности в задаче обращения годографа.

ADVANCES IN THE CLASSICAL TRAVEL TIME INVERSION PROBLEM

M.L. Gerver

*International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences*

The aim of the paper is to relate the most recent results in the classical travel time inversion problem, to represent new key notions (universal sequence, majorant and singular points) which emerged in last years research on the problem and to explain – using duality principle – why discrete measures (or, geophysically, waveguides with a finite number of layers) are so significant for describing ambiguity in travel time inversion.

ВВЕДЕНИЕ

Обращение годографа – фундаментальная задача математической геофизики: на (и вблизи) поверхности Земли происходят взрывы и землетрясения, приборы регистрируют сигналы от них, и по временам пробега сигналов от источников до приемников (по годографу) нужно найти скорость упругих волн внутри Земли.

После пионерских работ начала века и детальных исследований 60-х годов трудно было ожидать появления принципиально новых результатов в этой задаче в ее классической постановке – когда скорость волн предполагается зависящей только от глубины. Оказалось, однако, что считать эту постановку исчерпанной преждевременно.

В последние годы были установлены связи между задачей обращения годографа и, казалось бы, далекими от нее областями: геометрией устойчивых многочленов, рациональными аппроксимациями, чебышевскими системами и вполне положительными ядрами. Обнаружение и изучение этих связей – и особенно работы [1–3] – привели к существенному продвижению в задаче обращения годографа [4–6].

В статье после обзора установленных ранее фактов формулируются и обсуждаются теоремы об универсальной последовательности и экстремальных свойствах дискретных мер, анонсированные в [4, 5, 7] и доказанные в [6, 8]. Эти теоремы дают конструктивное описание неединственности в задаче обращения годографа. В статье прослеживается, как указанные теоремы сводятся к трем главным (доказанным в [8] и сформулированным в разд. 5): основному утверждению об особых точках, принципу двойственности и теореме о строгом максимуме.

Все детали, которые нужны для более глубокого понимания результатов, но могут быть пропущены при первом чтении, отнесены в заключительный раздел, где сообщаются как комментарии к основному тексту (ссылка вида ^{<k>} отсылает к комментарию с номером *k*).

1. КЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ОБРАЩЕНИЯ ГОДОГРАФА. КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Начнем с краткой исторической справки и объяснения ключевых слов *годограф* и *волновод* ^{<1>}.

В начале века задача обращения годографа была решена Герглотцем [9] и Бейтменом [10] в предположении, что Земля – шар (радиуса R), скорость волн зависит *только от глубины*: $v = v(r)$, $r \in [0, R]$, причем ^{<2>}

$$\frac{v(r)}{r} \text{ не возрастает на } [0, R] \text{ и } \frac{v(r)}{r} \rightarrow \infty \text{ при } r \rightarrow 0. \quad (1)$$

Задача была сделана в лучевом приближении. При $v = v(r)$ распространяющиеся по принципу Ферма сейсмические лучи (геодезические) – *плоские* кривые, так что задачу можно рассматривать не в шаре, а в круге. С помощью конформного отображения $w = \ln \frac{R}{z}$ ^{<3>} перейдем к более простой задаче в полуплоскости ^{<4>}.

Теперь лучи распространяются в полуплоскости x, y ($y \geq 0$) со скоростью $u(y)$, равной $v(r)/r$, и условие (1) означает, что

$$u(y) \text{ не убывает при } y \geq 0 \text{ и } u(y) \rightarrow \infty \text{ при } y \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Точно сформулируем задачу обращения годографа в полуплоскости и приведем сводку полученных в ней ранее результатов.

Нормировка. Выберем масштаб на оси u так, чтобы

$$u(0) = 1. \quad (3)$$

Годограф. Из точки 0 плоскости x, y в (нижнюю) полуплоскость $y \geq 0$ выходят сейсмические лучи, по которым импульс, возникший в момент $t = 0$, распространяется со скоростью $u(y)$, зависящей *только от y* . Пусть L (рис. 1) – луч, образующий в точке 0 угол α с осью y , $0 < \alpha < \pi/2$. Число $p = \sin \alpha$ называется *лучевым*

параметром. Пусть $X(p), Y(p)$ – координаты самой глубокой точки луча L , а $T(p)$ – время распространения импульса до нее вдоль L . Пусть $X(p)$ конечно (это верно для почти всех $p \in (0, 1)$), тогда луч L состоит из двух дуг (нисходящей и восходящей), симметричных относительно прямой $x = X(p)$, луч L возвращается на прямую $y = 0$ в точке $x = 2X(p)$ и время движения импульса по L равно $2T(p)$.

Определение. Кривую

$$x = 2X(p), \quad t = 2T(p), \quad p \in (0, 1), \tag{4}$$

на плоскости x, t обозначим Γ и назовем *годографом*.

Годограф Γ считается известным, а скорость $u(y)$ нужно найти.

Формула Бендорфа. Уравнение Абеля. По закону Снеллиуса в любой своей точке (x, y) нисходящая дуга L образует с осью y угол $\alpha(y)$, такой, что

$$\sin \alpha(y) = pu(y). \tag{5}$$

Вследствие (5) в самой нижней точке $(X(p), Y(p))$ луча L , где $\sin \alpha(y) = 1$, выполняется равенство $u(Y(p)) = 1/p$, т.е. $u(y)$ и $Y(1/u)$ – взаимно обратные функции (участкам постоянства одной соответствуют разрывы другой).

Поскольку (рис. 2) в точке (x, y) нисходящей дуги луча L

$$dx/dy = tg \alpha(y), \quad dy/ds = \cos \alpha(y), \quad dy/dt = u(y) \cos \alpha(y),$$

то $X(p)$ и $T(p)$ равны интегралам от 0 до $Y(p)$ от

$$tg \alpha(y) dy \quad \text{и} \quad \frac{dy}{u(y) \cos \alpha(y)}$$

соответственно, т.е. ввиду (5)

$$X(p) = \int_0^{Y(p)} \frac{pu(y)dy}{\sqrt{1-p^2u^2(y)}}, \quad T(p) = \int_0^{Y(p)} \frac{dy}{u(y)\sqrt{1-p^2u^2(y)}}, \quad p \in (0, 1). \tag{6}$$

Так как в точках дифференцируемости

$$dT(p) = p dX(p) \tag{7}$$

(формула Бендорфа), то задающие кривую (4) функции $X(p)$ и $T(p)$, как правило, определяются по годографу^{<5>}, и обращение годографа сводится тогда к решению уравнений (6).

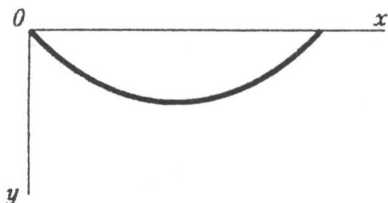


Рис. 1

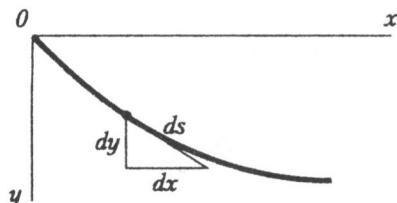


Рис. 2

Первое из них – это интегральное уравнение Абеля. При выполнении условия (2) оно однозначно разрешимо:

$$Y(p) = \frac{2}{\pi} \int_p^1 \frac{X(q) dq}{\sqrt{q^2 - p^2}}, \quad p \in (0, 1). \quad (8)$$

Это и есть результат Герглотца–Бейтмена: $Y(p)$, а значит, и обратная к $Y(1/u)$ функция $u(y)$ однозначно определяются по $X(p)$ с помощью явной формулы (8).

Волноводы. Существенна ли *монотонность* $u(y)$ для однозначной разрешимости задачи обращения годографа? Пусть, например, график $u(y)$ имеет такой вид, как на рис. 3. Можно ли определить тогда $u(y)$ по годографу?

Интервал i оси y на рис. 3 (так же, как и полоса $y \in i$ на плоскости x, y) называется *волноводом*^{<6>}. Если заменить $u(y)$ функцией, равной $u(y)$ вне i и *равноизмеримой* с ней^{<7>} внутри i , то лучи *вне волновода* i и время движения импульса по каждому из них, а значит, и годограф *не изменятся* [11]^{<8>}.

До середины 60-х годов среди геофизиков было распространено убеждение: *неоднозначность в определении скорости $u(y)$ по годографу этим и исчерпывается*. Оказалось, однако, что это *не так* [12, 13]. В [14] подробно исследована неединственность в задаче обращения годографа при наличии n волноводов. Кратко опишем результаты этого исследования для $n = 1$.

2. НЕОДНОЗНАЧНОСТЬ В ОПРЕДЕЛЕНИИ СКОРОСТИ ПО ГОДОГРАФУ

Относительно любой из рассматриваемых скоростей $u(y)$, $y \geq 0$, предположим следующее.

Предположения об $u(y)$. Будем считать $u(y)$ *кусочно дважды гладкой* на каждом конечном отрезке полуоси $y \geq 0$ (иными словами, сама $u(y)$ имеет конечное число разрывов 1-го рода на каждом таком отрезке и первые две производные $u(y)$ могут не существовать или быть разрывными в конечном числе точек такого отрезка); в точках разрыва пусть для определенности $u(y) = \max\{u(y-0), u(y+0)\}$. Каждая скорость $u(y)$ имеет *один волновод* $(0, Y)$; по определению это означает (рис. 4), что

$$\begin{aligned} u(y) &\leq u(0) = 1 \text{ и } u(y) \neq 1 \text{ при } 0 < y < Y; \\ u(y) &> 1 \text{ при } y > Y, \text{ } u(y) \text{ не убывает при } y \geq Y; \\ u(y) &\rightarrow \infty \text{ при } y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

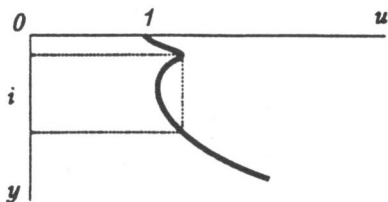


Рис. 3

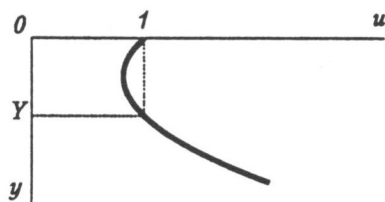


Рис. 4

Замечание. Тем самым предполагается, что волновод начинается сразу у поверхности (при $y = 0$); случай, когда он начинается глубже (при $y > 0$), легко сводится к рассматриваемому. *Ширина волновода* Y может быть *разной* для разных $u(y)$, в то время, как мера $m = \text{mes} \{y \in (0, Y), u(y) = 1\}$ — одна и та же для всех $u(y)$ с одним и тем же годографом Γ . Эта мера равна пределу $\Phi(1 - 0)$ при $p \rightarrow 1$ определяемой ниже (см. (12)) функции $\Phi(p)$, $p \in (0, 1)$.

Преобразование Лежандра годографа Γ . Вместо пары функций $X(p)$ и $T(p)$, (см. (4), (6)), удобно рассматривать функцию

$$\tau(p) = \int_0^{Y(p)} \sqrt{u^{-2}(y) - p^2} dy, \quad p \in (0, 1). \tag{9}$$

Это — непрерывная в интервале $(0, 1)$ убывающая функция, ввиду (6), (7) она связана с $X(p)$ и $T(p)$ следующими формулами^{<9>}:

$$\tau(p) = T(p) - pX(p), \quad \tau'(p) = -X(p). \tag{10}$$

Согласно (7) и (10), если в точке $(x = 2X(p), t = 2T(p)) \in \Gamma$ кривая Γ имеет касательную $k(p)$, то, во-первых, $k(p)$ образует с осью x угол, тангенс которого равен p , и, во-вторых, $k(p)$ пересекает ось t в точке $2\tau(p)$. Таким образом $2\tau(p)$ является преобразованием Лежандра годографа Γ . Функцию $\tau(p)$ будем считать известной (сравним с^{<5>}).

Допустимые функции. Полоса G . Масштаб на оси y выберем так (сравним с (3)), чтобы выполнялось нормировочное условие

$$\tau(1 - 0) = \int_0^1 \sqrt{u^{-2}(y) - 1} dy = 1. \tag{11}$$

Функции $u(y)$, удовлетворяющие перечисленным в начале разд. 2 предположениям и условию (11), будем называть *допустимыми*.

Система уравнений (6) эквивалентна интегральному уравнению (9), так что задача обращения годографа сводится в основном к нахождению всех допустимых функций $u(y)$, удовлетворяющих этому уравнению. Согласно [12–14] графики всех таких функций замечают полосу G на плоскости y, u (рис. 5).

Формула-фильтр. Множество \mathcal{U} . Расстояние от оси u до верхней границы полосы G вдоль прямой $u = 1/p, p \in (0, 1)$, обозначим $\Phi(p)$ (рис. 6).

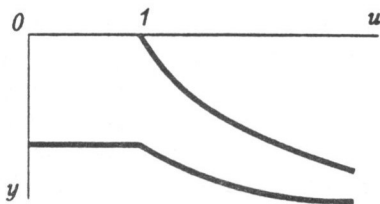


Рис. 5

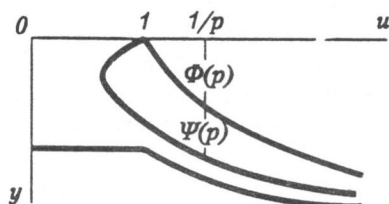


Рис. 6

Согласно [12–14] $\Phi(p)$ однозначно определяется по $\tau(p)$ ^{<10>}

$$\Phi(p) = -\frac{2}{\pi} \int_p^1 \frac{d\tau(q)}{\sqrt{q^2 - p^2}}, \quad p \in (0, 1), \quad (12)$$

и для любого допустимого решения $u(y)$ уравнения (9)

$$Y(p) = \Phi(p) + \Psi(p), \quad (13)$$

где $\Psi(p)$ выражается через $u(y)$ в волноводе $(0, Y)$

$$\Psi(p) = \Psi(p, u(y)) = \frac{2}{\pi} \int_0^Y \arctg \sqrt{(u^{-2}(y) - 1)/(1 - p^2)} dy, \quad p \in (0, 1). \quad (14)$$

В формуле $Y(p) = \Phi(p) + \Psi(p)$ заключен следующий способ построения всех допустимых решений уравнения (9).

Возьмем произвольное $Y > 0$ и зададим любую допустимую функцию $u(y)$ в волноводе $0 < y < Y$. Применив к ней (13), (14), определим $Y(p)$. Если $Y(p)$ не возрастает, получаем $u(y)$ вне волновода (при $y \geq Y$) как функцию, обратную к $Y(1/u)$; согласно [12–14] полученная $u(y)$, $y \geq 0$, удовлетворяет уравнению (9). Если $Y(p)$ не является невозрастающей функцией, то $u(y)$ нельзя продолжить на полуось $y \geq Y$ до решения уравнения (9).

Таким образом формула $Y(p) = \Phi(p) + \Psi(p)$ действует как *фильтр*: некоторые допустимые $u(y)$ однозначно продолжаютя из волновода $0 < y < Y$ на полуось (множество таких функций $u(y)$ обозначим \mathcal{U}), другие $u(y)$ не допускают такого продолжения.

3. ЗАДАЧА О НИЖНЕЙ ГРАНИЦЕ ПОЛОСЫ G И УНИВЕРСАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

Изучение неоднозначности в классической задаче обращения годографа, начатое в [12–14] и продолженное в последующих работах, казалось завершенным к середине 70-х годов и интересы исследователей постепенно сместились в сторону многомерных и даже анизотропных задач ^{<11>}.

Один вопрос в одномерной задаче оставался, впрочем, нерешенным:

Широкой или узкой является полоса G , заметаемая графиками всех скоростных функций, которые имеют один и тот же годограф?

Так как *верхняя* граница полосы G определяется формулой (12), то решение этого вопроса сводится к конструктивному описанию и построению *нижней* границы G в случае, когда волновод один, и к аналогичному более общему построению в случае двух или нескольких волноводов. Причем, поскольку в реальной Земле скорость распространения волн зависит не только от глубины (так что реальные времена пробега нельзя использовать непосредственно как исходные данные при обращении годографа), наиболее естественной представляется следующая постановка одномерной задачи.

Пусть дана скоростная функция $u_0(y)$ (на первых порах – с одним волноводом), построить полосу G , заметаемую графиками всех скоростных функций $u(y)$, которые имеют тот же годограф, что и $u_0(y)$.

Если сформулированную задачу удастся решить для произвольно заданной функции $u_0(y)$, то затем разумно принять за $u_0(y)$ какое-нибудь общепризнанное распределение скоростей (скажем, *скоростной разрез Гутенберга* или *модель PREM*). Если соответствующая полоса G окажется узкой, то открытая теоретиками более 30 лет назад неоднозначность в классической задаче обращения годографа не должна особенно волновать практиков; если же полоса G окажется широкой, то практикам придется с этим считаться ^{<12>}.

Недавние результаты [4–6] (и особенно [7, 8]) делают построение полосы G для скоростной функции $u_0(y)$ с одним волноводом делом реального будущего. Перейдем к формулировке и обсуждению этих результатов.

Универсальная последовательность U . Согласно (13), (14) ширина полосы G (расстояние между ее границами вдоль прямой $u = 1/p$, $0 < p < 1$) равна

$$H(p) = \sup \Psi(p, u(y)) \text{ по всем } u(y) \in \mathcal{U},$$

где \mathcal{U} – множество, определенное в конце разд. 2.

Обозначение. Рассмотрим ступенчатые функции $u(y)$, $0 \leq y \leq Y$, принимающие значения $u \in (0, 1]$, удовлетворяющие условиям (3), (11) и такие (сравним с замечанием в начале разд. 2), что $\text{mes} \{y \in [0, Y], u(y) = 1\} = \Phi(1 - 0)$. Отнесем такую функцию к \mathcal{U}_k , если она принадлежит множеству \mathcal{U} и принимает на отрезке $[0, Y]$ не более k значений, не равных 1.

Сформулируем несколько теорем, раскрывающих роль функций из \mathcal{U}_k в описании нижней границы полосы G . Их доказательства даны в [6].

Первые две теоремы содержат определение и алгоритм построения универсальной последовательности U .

Теорема 1. Существует последовательность $U = \{U_k\}$,

$$U_0 = +\infty > U_1 > U_2 > \dots > U_k > \dots, \quad U_k \rightarrow 1,$$

обладающая следующим свойством: при $u = 1/p \in [U_k, U_{k-1})$, $k \geq 1$,

$$H(p) = \sup \Psi(p, u(y)) \text{ по } u(y) \in \mathcal{U}_k.$$

Теорема 2. Последовательность U универсальна, т.е. не зависит от $\tau(p)$, и вычисляется по следующему алгоритму, связанному с полиномами Лежандра

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x, \quad L_n(x) = \left(2 - \frac{1}{n}\right) x L_{n-1}(x) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) L_{n-2}(x).$$

Пусть X_k – квадрат наименьшего положительного корня полинома $L_{2k+1}(x)$ ^{<13>}. Тогда

$$U_k = 1/\sqrt{1 - X_k}, \quad k \geq 1. \tag{15}$$

Ввиду (15) числа U_k больше 1 и убывают ^{<14>}. Легко доказать ^{<15>}, что $U_k \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$, причем

$$U_k - 1 = O(1/k^2).$$

Чтобы представить себе, насколько быстро убывают разности $U_k - 1$, умножим их на 10^4 и с помощью таблиц А.С. Кронрода [15] вычислим (по алгоритму теоремы 2) ближайшие к $(U_k - 1)10^4$ целые числа, $1 \leq k \leq 19$:

$$\begin{aligned} &5811, 1867, 942, 571, 384, 277, 209, 163, 131, 108, \\ &90, 76, 66, 57, 50, 44, 39, 35, 32. \end{aligned} \quad (16)$$

В соответствии с (16) числа U_k выписываются в дальнейшем с точностью до $5 \cdot 10^{-5}$:

$$1.5811, 1.1867, 1.0942, 1.0571, 1.0384, 1.0277, \text{ и т. д.}$$

Однопараметрическое семейство $u_P(y)$. В следующих теоремах, доказанных в [6], вводится семейство функций $u_P(y)$, для графиков которых нижняя граница полосы G является огибающей.

Теорема 3. Для любой точки $P = (y, u)$, $u > 1$, нижней границы полосы G существует скоростная функция $u_P(y)$ с годографом Γ , график которой содержит P .

Теорема 4. Вне волновода функция $u_P(y)$ определена однозначно, а в волноводе – с точностью до равноизмеримости.

Теорема 5. Если координата u точки $P = (y, u)$ принадлежит $[U_k, U_{k-1})$, то в волноводе $u_P(y) \in \mathcal{U}_k$.

Обозначение. При нормировке (3) значения функции $u_P(y)$ в волноводе не превосходят 1; число ее значений, меньших 1, обозначим через n_P .

Теорему 5 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 5'. $n_P \leq k$, где $k = k(u)$ убывает при возрастании координаты u точки $P = (y, u)$:

$$\begin{aligned} k = 10 & \text{ при } 1.0108 \leq u < 1.0131, & k = 9 & \text{ при } 1.0131 \leq u < 1.0163, \\ k = 8 & \text{ при } 1.0163 \leq u < 1.0209, & k = 7 & \text{ при } 1.0209 \leq u < 1.0277, \\ k = 6 & \text{ при } 1.0277 \leq u < 1.0384, & k = 5 & \text{ при } 1.0384 \leq u < 1.0571, \\ k = 4 & \text{ при } 1.0571 \leq u < 1.0942, & k = 3 & \text{ при } 1.0942 \leq u < 1.1867, \\ k = 2 & \text{ при } 1.1867 \leq u < 1.5811, & k = 1 & \text{ при } 1.5811 \leq u < +\infty. \end{aligned} \quad (17)$$

Пояснение. Функция $u_P(y)$ в теоремах 3 – 5 определена в волноводе с точностью до равноизмеримости: скоростные функции с одним и тем же годографом, равноизмеримые в волноводе $(0, Y)$, совпадают при $y > Y$. Поэтому можно считать, что модель Земли, соответствующая $u_P(y)$, имеет в волноводе ровно n_P слоев, в которых скорость постоянна и – при нормировке (3) – меньше 1. Согласно (17), если пренебречь участком $1 \leq u < 1.0108$, то для описания нижней границы полосы G достаточно рассматривать модели, имеющие в волноводе не более десяти таких слоев. При этом для $u \geq 1.5811$ нижняя граница полосы G совпадает с графиком скоростной функции $u_P(y)$, принимающей в волноводе лишь

одно значение, меньшее 1 и имеющей среди всех таких функций самый широкий волновод; участком $1.1867 \leq u < 1.5811$ нижней границы G “заведуют” модели с $n_P \leq 2$ (т.е. модели с волноводами, содержащими не более двух слоев, в которых скорость меньше 1); участком $1.0942 \leq u < 1.1867$ – модели с $n_P \leq 3$ и т. д.

4. МАЖОРАНТА. КРИТЕРИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ К МНОЖЕСТВУ \mathcal{U}

Преобразование функций $Y(p)$, $\Phi(p)$ и $\Psi(p)$. Мера da . Цель последующих преобразований – дать определение мажоранты $M(t)$, получить критерий принадлежности допустимой скорости $u(y)$ к множеству \mathcal{U} (введенному в конце разд. 2), а затем (в разд. 5) переформулировать задачу о нижней границе полосы G и теоремы 1–5 в более простых терминах. Положим

$$q = \sqrt{1 - p^2}, \quad p \in [0, 1], \quad f(y) = \sqrt{u^{-2}(y) - 1}, \quad y \in (0, Y),$$

делаем замены $Y(p) = y(q)$, $\Phi(p) = \phi(q)$ и $\Psi(p) = \psi(q)$ в (12)–(14) и перепишем (13) в виде

$$y(q) = \phi(q) + \psi(q), \quad q \in (0, 1), \tag{18}$$

при этом громоздкая формула (14) принимает вид

$$\psi(q) = \frac{2}{\pi} \int_0^Y \arctg \frac{f(y)}{q} dy, \quad q \in (0, 1). \tag{19}$$

Функцию, стоящую под знаком интеграла в (19), продифференцируем по q :

$$\left(\arctg \frac{f(y)}{q} \right)' = \frac{-f(y)}{f^2(y) + q^2}.$$

Для $f^2(y)$ и q^2 введем специальные обозначения: $f^2(y) = s(y)$, $y \in (0, Y)$; $q^2 = t$ (или $q^2 = x$), так что впредь t и x уже не будут обозначать время и эпицентрального расстояние. Ввиду нормировочного условия (11)

$$\int_0^Y f(y) dy = \int_0^Y \sqrt{s(y)} dy = 1.$$

Положим $\mu(s) = \text{mes} \{ y \in (0, Y) \mid s(y) \leq s \iff u(y) \geq 1/\sqrt{s+1} \}$,

$$da = da(s) = \sqrt{s} d\mu(s). \tag{20}$$

Тем самым $a(s)$, $s \geq 0$, – неубывающая функция, равная интегралу от $f(y) dy$ по множеству тех $y \in (0, Y)$, где $s(y) \leq s$, причем $\int_0^\infty da(s) = 1$.

Введя функции

$$I(s, x) = \frac{2}{\pi} \int_x^{\infty} \frac{d\sqrt{t}}{s+t}, \quad s \geq 0, \quad x \in [0, 1]$$

$$\left(I(s, x) = \frac{2 \operatorname{arctg} \sqrt{s/x}}{\pi \sqrt{s}} \text{ при } s > 0, x > 0 \right);$$

$$g(da, t) = \int_0^{\infty} \frac{da(s)}{s+t}, \quad t \geq 0;$$

$$h(da, x) = \int_0^{\infty} I(s, x) da(s) = \frac{2}{\pi} \int_x^{\infty} g(da, t) d\sqrt{t}, \quad x \in [0, 1],$$

получаем:

$$\psi(\sqrt{x}) = h(da, x), \quad -\frac{2}{\pi} \psi'(\sqrt{t}) = g(da, t). \quad (21)$$

Мажоранта. Положим

$$m(q) = \phi'(q) \quad (22)$$

в точках q множества C непрерывности производной $\phi'(q)$ и

$$m(q) = \underline{\lim} \phi'(s) \text{ при } s \rightarrow q, \quad s \in C, \quad (23)$$

в остальных $q \in [0, 1]$ (согласно разд. 2 их конечное число вне любой окрестности точки $q = 1$). Ввиду (22) и (23) функция $m(q)$ *полу непрерывна снизу в каждой точке отрезка* $0 \leq q \leq 1$ ^{<16>}. Согласно (18)

$$y'(q) = \phi'(q) + \psi'(q), \quad q \in C \subseteq [0, 1],$$

а так как $y(q)$ – *неубывающая* функция, то

$$-\psi'(q) \leq m(q), \quad q \in [0, 1]. \quad (24)$$

Определение. Назовем *мажорантой* функцию

$$M(t) = \frac{2}{\pi} m(\sqrt{t}), \quad t \in [0, 1]. \quad (25)$$

Мажоранту $M(t)$ считаем *известной*, поскольку она однозначно определяется по функции $\Phi(p)$. Ввиду (21), (24) и (25) получаем

Критерий принадлежности к \mathcal{U} . Допустимая функция $u(y)$, $y \in (0, Y)$, тогда и только тогда принадлежит множеству \mathcal{U} (см. конец разд. 2), когда соответствующая ей мера $da = da(s)$ из (20) удовлетворяет неравенству

$$g(da, t) = \int_0^{\infty} \frac{da(s)}{s+t} \leq M(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (26)$$

5. ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ. ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Задачи о верхней грани функционала $h(da, x)$. В соответствии с разд. 4 задачу о нижней границе (или о ширине) полосы G можно переформулировать следующим образом.

На полуоси $s \geq 0$ рассмотрим неотрицательные меры Стильтеса $da = da(s)$ с интегралом, равным 1. Каждой такой мере сопоставим функцию

$$g(da, t) = \int_0^{\infty} \frac{da(s)}{s+t}, \quad t \geq 0.$$

Фиксируем неотрицательную меру Стильтеса $d\theta(t) = \frac{2}{\pi} d\sqrt{t}$, $t \geq 0$, и положим

$$h(da, x) = \int_x^{\infty} g(da, t) d\theta(t), \quad x \in [0, 1].$$

Фиксируем положительную функцию (*мажоранту*) $M(t)$, $t \in [0, 1]$. Пусть $M(t)$ *полу непрерывна снизу* в каждой точке $t \in [0, 1]$.

Меру da отнесем к множеству \mathcal{A} , если $g(da, t) \leq M(t)$ при всех $t \in [0, 1]$.

На \mathcal{A} рассмотрим 1-параметрическое (зависящее от параметра $x \in [0, 1]$) семейство экстремальных задач:

$$\boxed{\text{найти } \sup h(da, x) \text{ по всем } da \in \mathcal{A}.} \quad (\text{A})$$

Ввиду (20) и (26) имеется взаимно однозначное соответствие между классами равноизмеримых на $[0, Y]$ функций $u(y) \in \mathcal{U}$ и мерами $da \in \mathcal{A}$, а ввиду (21) $\sup h(da, x)$ по всем $da \in \mathcal{A}$ — это ширина полосы G вдоль прямой $u = 1/p = 1/\sqrt{1-x}$, так что теоремы 1–5 будут доказаны, если проверить, что верны следующие две теоремы.

Теорема 6 (существования и единственности). Для каждого $x \in (0, 1)$ существуют и однозначно определяются такое $n = n(x)$ и такой набор чисел

$$\{a_1, \dots, a_n, s_1, \dots, s_n\},$$

$$a_j = a_j(x) > 0, \quad 1 \leq j \leq n, \quad \sum_{j=1}^n a_j = 1, \quad s_1 = s_1(x) > \dots > s_n = s_n(x) > 0,$$

что строгий максимум $h(da, x)$ на множестве \mathcal{A} достигается на дискретной мере

$$da = da(s) = \sum_{j=1}^n a_j \delta(s - s_j) ds.$$

Теорема 7 (об универсальной последовательности $<17>$). Пусть X_k — квадрат наименьшего положительного корня полинома Лежандра $L_{2k+1}(x)$, $k \geq 1$, т.е. с точностью до $5 \cdot 10^{-6}$

$$\begin{aligned} X_1 &= 0.60000, & X_2 &= 0.28995, & X_3 &= 0.16471, & X_4 &= 0.10514, \\ X_5 &= 0.07265, & X_6 &= 0.05311, & X_7 &= 0.04048, & X_8 &= 0.03186, \\ X_9 &= 0.02572, & X_{10} &= 0.02119, & X_{11} &= 0.01776, & X_{12} &= 0.01510, \dots \end{aligned} \quad (27)$$

Тогда

$$n(x) \leq k \text{ при } x \in [X_k, 1]. \quad (28)$$

Теоремы 6 и 7 доказаны в [6] при дополнительном условии

$$\lim_{t \rightarrow 0} tM(t) = 0. \quad (29)$$

Двойственные экстремальные задачи. В [8] дано новое по сравнению с [6], опирающееся на принцип двойственности, доказательство теорем 6, 7.

Рассмотрим пары $(b_0, db = db(t))$, где b_0 – неотрицательные числа, а $db(t)$ – неотрицательные меры Стильтьеса на отрезке $[0, 1]$.

Множество всех таких пар обозначим через \mathcal{P} .

Каждой паре из \mathcal{P} сопоставим функцию $r(b_0, db, s)$, $s \geq 0$, и число $H(b_0, db)$:

$$r(b_0, db, s) = b_0 + \int_0^1 \frac{db(t)}{s+t}, \quad H(b_0, db) = b_0 + \int_0^1 M(t)db(t).$$

На полуоси $s \geq 0$ фиксируем 1-параметрическое (зависящее от параметра $x \in [0, 1]$) семейство минорант

$$I(s, x) = \frac{2}{\pi} \int_x^\infty \frac{d\sqrt{t}}{s+t}.$$

Тем самым $I(s, x) = \frac{2 \arctg \sqrt{s/x}}{\pi \sqrt{s}}$, $s > 0$, $x > 0$; $I(0, x) = \frac{2}{\pi \sqrt{x}}$; $I(s, 0) = \frac{1}{\sqrt{s}}$.

Фиксируем $x \in [0, 1]$, положим $I(s) = I(s, x)$, $s \geq 0$,

$$h(da) = h(da, x) = \frac{2}{\pi} \int_x^\infty g(da, t) d\sqrt{t} = \int_0^\infty I(s) da(s)$$

и отнесем к множеству $\mathcal{B} = \mathcal{B}(x)$ пары $(b_0, db) \in \mathcal{P}$, для которых $r(b_0, db, s) \geq I(s)$ при всех $s \geq 0$. Задача, двойственная к (A), формулируется так:

$$\boxed{\text{найти } \inf H(b_0, db) \text{ по всем } (b_0, db) \in \mathcal{B}(x)}. \quad (B)$$

Теорема 8 (принцип двойственности). В задачах (A) и (B) верхняя и нижняя грани достигаются и равны друг другу при любом $x \in (0, 1]$:

$$\max_A h(da, x) = \min_B H(b_0, db), \quad x \in (0, 1]. \quad (19)$$

Особые точки. Ключевым при проверке неравенств (28) является

Определение. Особыми точками меры $da \in \mathcal{A}$ назовем точки $t \in [0, 1]$, в которых $g(da, t) = M(t)$, а особыми точками пары $(b_0, db) \in \mathcal{B}$ – точки $s \geq 0$, в которых $r(b_0, db, s) = I(s)$. (20)

В [8] доказаны следующие два утверждения.

Критерий совпадения $h(da)$ и $H(b_0, db)$. Для любой меры $da \in \mathcal{A}$ и любой пары $(b_0, db) \in \mathcal{B}$ выполняется неравенство $h(da) \leq H(b_0, db)$. Для совпадения $h(da)$ и $H(b_0, db)$ необходимо и достаточно, чтобы мера da была сосредоточена в особых точках (b_0, db) , а мера db – в особых точках da .

Основное утверждение об особых точках. Пусть $x \geq X_k$ из (27) и

$$s_j, \quad 1 \leq j \leq m, \quad s_1 > \dots > s_m \geq 0,$$

являются особыми точками пары $(b_0, db) \in \mathcal{B} = \mathcal{B}(x)$. Тогда $m \leq k$. <21>

Из последнего неравенства, принципа двойственности и критерия совпадения $h(da)$ и $H(b_0, db)$ следует, что мера da° , на которой достигается $\max_A h(da, x)$, дискретна при любом $x \in (0, 1]$ и сосредоточена максимум в k точках при $x \geq X_k$:

Теорема 9 (о дискретности da°). Пусть $x \geq X_k$ из (27) и $\max_A h(da, x)$ достигается на мере da° . Тогда da° сосредоточена в конечном числе точек $s_1^\circ > \dots > s_n^\circ \geq 0$ и $n = n(x) \leq k$.

Следующая теорема была доказана в [6]. С помощью основного утверждения об особых точках ее доказательство удалось упростить (см. [8]).

Теорема 10 (о строгом максимуме). Для любой меры $da \in \mathcal{A}$, не равной da° , выполняется строгое неравенство $h(da) < h(da^\circ)$.

Нетрудно проверить, что при условии (29) s_n° в теореме 4 положительно: $s_n^\circ > 0$. Тем самым теоремы 6 и 7 (а значит, и 1–5) являются следствиями теорем 8–10.

6. КОММЕНТАРИИ

1. Цель разделов 1 и 2 – не претендуя на полноту изложения подготовительного материала, но и не предполагая предварительных специальных знаний у читателей, быстро подвести их к последним исследованиям в задаче обращения годографа.

2. Фактически задача была сделана при более сильных ограничениях.

3. Заменим круг римановой поверхностью Z , склеенной из счетного множества кругов с разрезом вдоль радиуса: совершив оборот вокруг центра круга, луч переходит на следующий лист. Конформное отображение $w = \ln \frac{R}{z}$ поверхности Z на полуплоскость упрощает задачу <4>.

4. Упрощение состоит в том, что сейсмические лучи с общим началом A и общим концом B (A и B – точки на окружности), совершившие разное число оборотов вокруг центра круга, при переходе к задаче в полуплоскости, отображаются в лучи с разными концами.

5. Если в точке (x, t) годограф Γ имеет касательную с тангенсом угла наклона p , то $2X(p) = x$, $2T(p) = t$. Однако кривая Γ необязательно является дифференцируемой. Например, в [14, с.44] приводится пример *двухточечного* годографа Γ . Функции $X(p)$ и $T(p)$ определяются по нему *неоднозначно*.

6. Лучи, начинающиеся в точке $A \in i$ и выходящие из A под малым углом к оси x , не выходят из полосы i . Механический аналог – траектория шарика в желобе.

7. Функции $u_1(y)$ и $u_2(y)$, $y \in i$, *равноизмеримы*, если

$$\text{mes } \{y \in i, u_1(y) < t\} = \text{mes } \{y \in i, u_2(y) < t\} \text{ при всех } t.$$

8. В [11] дается образное описание *не изменяющего* Γ преобразования $u(y)$: говорится, что *слои в волноводе можно тасовать*.

9. Монотонная функция $\tau(p)$ дифференцируема *почти всюду* и на множестве *полной меры* $\tau'(p) = -X(p)$. Можно доказать, что $\tau(p)$ абсолютно непрерывна при $p \in (0, 1)$ и имеет скачок при $p = 1$, так что

$$\tau(p) = \tau(1 - 0) + \int_p^1 X(q) dq.$$

10. Формула (12) – это иначе записанная формула (8).

11. Здесь уже во второй половине 70-х годов был получен ряд интересных результатов (см., например, [16–20]).

12. Не представляет труда построить такие скоростные функции $u_0(y)$, что соответствующие им полосы G окажутся как угодно широкими или как угодно узкими. Речь идет о том, чтобы выяснить, какой – *узкой или широкой* – окажется полоса G для скоростных функций, достаточно хорошо описывающих реальную Землю.

13. Первые члены последовательности X_k выписаны в теореме 7 (см. (27)).

14. Это сразу следует из чередования положительных корней полиномов Лежандра $L_{2k-1}(x)$ и $L_{2k+1}(x)$.

15. Известно, что при $k \rightarrow \infty$ наименьший положительный корень λ_k многочлена Лежандра $L_{2k+1}(x)$ убывает как $O(1/k)$:

$$\lambda_k = O(1/k). \quad (30)$$

Поэтому для универсальной последовательности

$$U_k = (1 - \lambda_k^2)^{-1/2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

выполняется оценка $U_k - 1 = O(1/k^2)$. Приведем простое доказательство (30).

Согласно [21, отдел VI, задача 93, с.104, 311] $L_{2k+1}(\cos x)$ является тригонометрическим многочленом вида

$$c_0 \cos x + c_1 \cos 3x + \dots + c_k \cos(2k+1)x$$

с *положительными и возрастающими* коэффициентами:

$$0 < c_0 < c_1 < \dots < c_k.$$

Отсюда следует (см. [22]), что расстояния между соседними корнями $L_{2k+1}(\cos x)$ убывают с ростом k как $O(1/k)$, т.е. следует оценка (30).

С помощью приема, предложенного в [22], можно оценить λ_k и более точно:

$$\sin \alpha_k < \lambda_k < \sin \beta_k, \quad \text{где } \alpha_k = \frac{\pi}{4k}, \quad \beta_k = \frac{3\pi}{4(k+1)}, \quad k \geq 1;$$

для U_k отсюда следует, что $1/(\cos \alpha_k) < U_k < 1/(\cos \beta_k)$, $k \geq 1$, а значит

$$1 + \frac{0.3}{k^2} < U_k < 1 + \frac{2.8}{k^2}, \quad k \geq 1.$$

16. Напомним: $m(q)$ полунепрерывна снизу в точке q_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при всех q из δ -окрестности q_0 выполняется неравенство $m(q) > m(q_0) - \varepsilon$. Полунепрерывность $m(q)$ влечет за собой полунепрерывность мажоранты $M(t)$ (см. (25)). Это свойство $M(t)$ используется в [8] при применении теорем Хелли [23, с.376–378] в доказательстве принципа двойственности.

17. Термин *универсальная* применительно к последовательности X_k означает, что она не зависит от выбора мажоранты $M(t)$.

18. В геофизической задаче оно, разумеется, выполняется.

19. Доказательство теоремы 8 (см. [8]) базируется на следующей – совершенно прозрачной – геометрической конструкции.

Пусть V – выпуклое множество в \mathbb{R}^n , расположенное над некоторой гиперплоскостью. Пусть ориентированная (направленная *вверх*) прямая L пересекает V . Обозначим через H нижнюю грань точек V на L и через h – верхнюю грань точек L , принадлежащих всевозможным гиперплоскостям, трансверсальным к L и лежащим под V . Пусть *гиперплоскость, опорная к V в точке H , трансверсальна к L* (если таких гиперплоскостей более одной, пусть указанным свойством обладает хоть одна из них). Тогда, очевидно, $h = H$.

20. С учетом (22)–(25) геофизический смысл данного определения таков: для особых точек $q \in \mathcal{C}$ из интервала $(0, 1)$ касательная к графику соответствующей мере da функции $u(y)$ в точке $(y, u = 1/\sqrt{1 - q^2})$ параллельна оси u .

Наряду с теоремами 3–5' (см. разд. 3) в [6] доказано следующее свойство функций $u_P(y)$: каждая из них имеет минимум n_P особых точек (т.е. число особых точек не меньше числа не равных 1 значений $u_P(y)$ в волноводе).

21. В доказательстве основного утверждения об особых точках наряду с оригинальными соображениями используются методы и результаты ряда математических исследований. Прежде всего, это – работы [24, 25].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-01852).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гервер М.Л. Рациональные аппроксимации, устойчивые многочлены и расслоения в задаче поиска самого широкого волновода // Геодинамика и прогноз землетрясений. (Вычисл. сейсмология. Вып.26). М.: Наука, 1994. С.176–201.
2. Гервер М.Л. Существование и единственность максимума и теоремы о конусах, 1-аппроксимациях и расслоениях для одного класса экстремальных задач / МИТП РАН. Препр. М., 1994. 80 с.
3. Гервер М.Л., Кудрявцева Е.А. Теорема об отношениях предшествования, генерируемых вполне положительными ядрами // Мат. сб. 1995. Т.186, N 9. С.19–44.
4. Гервер М.Л., Кудрявцева Е.А. О границе множества решений в задаче обращения годографа // ДАН. 1996. Т.346, N 5. С.672–674.
5. Гервер М.Л., Кудрявцева Е.А. Об экстремальных свойствах волноводов с конечным числом слоев в задаче обращения годографа // ДАН. 1997. Т.356. N 1. С.25–28.
6. Гервер М.Л., Кудрявцева Е.А. Универсальная последовательность в классической задаче обращения годографа // Мат. сб. 1997. Т.188, N 4. С.3–56.

7. Гервер М.Л., Кудрявцева Е.А. Новое доказательство теорем об универсальной последовательности и экстремальных свойствах дискретных мер // УМН. 1997. Т.52, Вып.6. С.153-154.
8. Гервер М.Л., Кудрявцева Е.А. Экстремальные свойства дискретных мер, универсальная последовательность и принцип двойственности / МИТП РАН. Препр. М., 1997. 21 с.
9. Herglotz G. Über das Benndorfsche Problem der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erdbodenstrahlen // Phys. Zeitschrift. 1907. Jahrgang 8. N 5. S.145-147.
10. Bateman H. The solution of the integral equation which connects the velocity of propagation of an earthquake wave in the interior of the Earth with the times which the disturbance takes to travel to different stations on the Earth's surface // Phil. Mag. 1910. Ser. 6. Vol.19. P.576-587.
11. Slichter L.B. The theory of interpretation of seismic travel-time curves in horizontal structures // Physics. 1932. Vol.3, N 6. P.273-295.
12. Гервер М.Л., Маркушевич В.М. Исследование неоднозначности при определении по годографу скорости распространения сейсмической волны // ДАН СССР. 1965. Т.163, N 6. С.1377-1380.
13. Gerver M.L., Markushevich V.M. Determination of seismic wave velocity from the travel-time curve // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. Amer. 1966. Vol.11. P.165-173.
14. Гервер М.Л., Маркушевич В.М. Определение по годографу скорости распространения сейсмической волны // Методы и программы для анализа сейсмических наблюдений. (Вычисл. сейсмология. Вып.3). М.: Наука, 1967. С.3-51.
15. Кропфрод А.С. Узлы и веса квадратурных формул. М.: Наука, 1964. 144 с.
16. Мухометов Р.Г. Обратная кинематическая задача сейсмологии на плоскости. // Математические проблемы геофизики. Новосибирск: ВЦ СОАН СССР, 1975. Вып.6, Ч. 2. С.243-254.
17. Бернштейн И.Н., Гервер М.Л. О задаче интегральной геометрии для семейства геодезических и об обратной кинематической задаче сейсмологии // ДАН СССР. 1978. Т.243, N 2. С.302-305. (Препр./ ИФЗ АН СССР; N 1. 1978).
18. Романов В.Г. Интегральная геометрия на геодезических изотропной римановой метрики // ДАН СССР. 1978. Т.241, N 2. С.290-293.
19. Мухометов Р.Г., Романов В.Г. К задаче отыскания изотропной римановой метрики в n -мерном пространстве // ДАН СССР. 1978. Т.243, N 1. С.41-44.
20. Бернштейн И.Н., Гервер М.Л. Условие различимости метрик по годографам // Методы и алгоритмы интерпретации сейсмологических данных. (Вычисл. сейсмология. Вып.13). М.: Наука, 1980. С.50-73.
21. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч.2. М.: Наука, 1978. 432 с.
22. Гервер М.Л. Несколько простых теорем о расположении корней // УМН. 1996. Т.51, N 3. С.191-192.
23. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 544 с.
24. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973. 552 с.
25. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976. 568 с.