

УДК 550.347

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ЛУЧЕВОЙ СЕЙСМИКИ

Б.В. Дигас, В.И. Максимов

*Институт математики и механики
Уральского отделения Российской академии наук*

А.В. Ландер, Б.Г. Букчин

*Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук*

Обсуждается вопрос восстановления скоростных характеристик среды по результатам измерений времен пробега поверхностных волн. Рассматриваемая задача сводится к задаче нахождения минимального решения системы линейных неравенств в бесконечномерном пространстве. Для решения последней указывается итерационный алгоритм, который иллюстрируется на просчитанных на персональном компьютере тестовых примерах. Этот алгоритм является достаточно быстрым. При его реализации не требуется решение каких-либо систем линейных уравнений.

ON AN ALGORITHM FOR SOLVING THE INVERSE PROBLEM OF RAY SEISMICS

B. V. Digas, V. I. Maksimov

*Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Division, Russian Academy of Sciences*

A. V. Lander, and B. G. Bukchin

*International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences*

The reconstruction of velocity structure from measurements of travel times of seismic surface waves is discussed. The problem under consideration is reduced to that of finding the minimal solution of a system of linear inequalities in infinite-dimensional space. An iterative algorithm for solving this problem is suggested. The algorithm is illustrated with test examples processed on personal computer. This algorithm is fast enough and its realization does not require solving any system of linear equations. The latter problem is known to be a time-consuming one when the dimension of the system is large.

ВВЕДЕНИЕ (ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ)

Задача восстановления скоростных характеристик среды формулируется следующим образом. Имеется некоторая область Ω , в которой расположены источники сейсмических сигналов и их приемники. Количество как источников, так и приемников достаточно велико. В процессе эксперимента измеряются времена пробега сейсмических сигналов t_1, \dots, t_n , соответствующие различным парам "источник-приемник". Предполагается, что процесс распространения сигналов описывается законами геометрической оптики. Поэтому каждое значение времени пробега связывается со скоростными характеристиками среды интегральным соотношением

$$t_i = \int_{l_i} \frac{dl}{v(r)} \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

где $v(r)$ – скорость распространения сейсмических волн, l_i – контур интегрирования, соответствующий i -му сейсмическому лучу. Требуется определить значение функции $v(r)$ в каждой точке исследуемой области. Такова содержательная постановка обратной задачи лучевой сейсмологии.

Как известно, эта задача является нелинейной, поскольку от распределения скорости зависят не только времена пробега, но и траектории сейсмических лучей. Однако она может быть линеаризована, если отличие начального приближения от истинных характеристик среды предполагается малым. В качестве искомой функции выбирается безразмерная величина

$$m(r) = \frac{v^{-1}(r) - v_0^{-1}(r)}{v_0^{-1}(r)},$$

относительная поправка к обратной скорости распространения сейсмических волн $v_0(r)$ в начальном приближении. Зная начальное скоростное распределение, можно для каждой рассмотренной в эксперименте пары "источник-приемник" рассчитать теоретическое время пробега t_{0i} :

$$t_{0i} = \int_{l_{0i}} \frac{dl}{v_0(r)}.$$

Когда функция $v_0(r)$ постоянна, такой расчет не составляет труда, в противном случае необходимо использовать один из вариантов лучевого трассирования.

Если функция $v_0(r)$ близка к истинной скоростной зависимости в среде, то замена контура интегрирования l_i , соответствующего функции $v(r)$, на контур l_{0i} , соответствующий функции $v_0(r)$, приведет к малому изменению времени пробега t_i . Таким образом, можно записать, что функция $m(r)$ удовлетворяет следующим линейным соотношениям:

$$\int_{l_{0i}} \frac{m(r)}{v_0(r)} dl = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

где $y_i = t_i - t_{0i}$. Этот набор соотношений и служит для расчета неизвестной функции $m(r)$, зная которую легко перейти к скоростным характеристикам среды.

Изложенные аргументы приводят к следующей математической задаче. (Ниже мы будем говорить об одномерном случае: $\Omega = [0, R]$ и известной методике Бэйкуса–Гильберта.) Имеются наблюдаемые величины γ_i ($i = 1, 2, \dots, N$), представимые в виде линейных функционалов от искомой функции $m(r)$

$$\gamma_i = \int_0^R G_i(r)m(r) dr, \quad (2)$$

где $G_i(r)$ – ядра функционалов, вид которых определяется исходными данными, а $m(r)$, как правило, представляет собой поправку к начальному приближению изучаемой физической величины. Начальное приближение $v_0(r)$ считается достаточно близким к истинному распределению $v(r)$, так что естественное требование к искомой поправке $m(r)$ – это ее малость. Поэтому обычно [1–5] из всех решений, удовлетворяющих (2), выбирается такое, которое минимизирует функционал

$$\int_0^R m^2(r) dr. \quad (3)$$

Таким образом, возникает задача о нахождении функции $\hat{m}(r)$, удовлетворяющей (2) и минимизирующей функционал (3). Эта задача обсуждалась в работах [1, 2], где рассматривалась также задача о нахождении оценки $\hat{m}(r)$ в виде взвешенного среднего от “истинной” модели $m(r)$:

$$\hat{m}_N(r) = \int_0^R A_N(r, r')m(r') dr' \quad (4)$$

при условии, что ядро

$$A_N(r, r') = \sum_{i=1}^N a_i(r) G_i(r') \quad (5)$$

обладает свойством “близости” к δ -функции, т. е. $A_N(r, r')$ находится из условия минимизации функционала [см. 2, с. 662]

$$s(r) = \int_0^R [A_N(r, r') - \delta(r' - r)]^2 dr'. \quad (6)$$

Как было отмечено в указанных работах, решения обеих задач совпадают и имеют вид:

$$\hat{m}(r) = \sum_{i=1}^N a_i(r)\gamma_i.$$

Заметим, что первая задача в случае, когда $\hat{m}(r)$ ищется в виде

$$\hat{m}(r) = \sum_{i=1}^N G_i(r)\nu_i, \quad \text{т. е.} \quad \sum_{j=i}^N \nu_j \int G_i(r)G_j(r) dr = \gamma_i,$$

решалась в работе [3]. При этом предполагалось, что входные данные отягощены ошибками: γ_i известно с ошибкой σ_i . Решение сводилось к задаче квадратичного программирования

$$\min_{\nu} \int_0^R \left| \sum_i G_i(r) \nu_i \right|^2 dr \quad (7)$$

при условиях (см. [2], с. 660)

$$\gamma_i - \sigma_i \leq \sum_{j=1}^N \nu_j \int G_i(r) G_j(r) dr \leq \gamma_i + \sigma_i. \quad (8)$$

Очевидно, что решение (4) будет тем лучше отражать характер искомой функции $m(r)$, чем более сосредоточено ядро в окрестности точки r . Однако решение, найденное из условия минимизации функционала (6), этому условию не отвечает – значение s не зависит от того, при каких r' , отличных от r , ядро $A(r, r')$ оказывается отличным от нуля (т. е. от значения δ -функции в этих точках) – вблизи или вдали от точки r . Поэтому вместо условия минимизации (3), накладываемого на искомую функцию и эквивалентного условию минимизации функционала (6), определяющему сглаживающее ядро, Бэйкус и Гильберт [1] предложили искать сглаженное решение (4), т. е. строить сглаживающее ядро, а при построении ядра исходить из другого (отличного от (6)) критерия близости его к δ -функции. Критерий так называемой δ -образности сглаживающего ядра был предложен ими в следующей форме:

$$Q(r) = \int_0^R A^2(r, r') (r' - r)^2 dr' \rightarrow \min, \quad (9)$$

$$\int_0^R A(r, r') dr' = 1. \quad (10)$$

Как установлено в работах [1] и [2, с. 664, формула (12.154)] решение задачи (9), (10) также имеет вид (5).

Таким образом, в рамках метода Бэйкуса–Гильберта имеют место два подхода к построению решения: один исходит из условия, накладываемого на саму искомую функцию, другой – из условия, накладываемого на сглаживающее ядро. В указанной выше форме (минимизация функционала (3) или (9)) метод применим только к таким задачам, для которых ядра $G_i(r)$ интегрируемы в квадрате.

В случае, когда речь идет о двумерной кинематической задаче сейсмоки (т. е. $r = (x, y) \in R^2$) ядра $G_i(r) = G_i(x, y)$ имеют вид (см. [5], с. 201)

$$G_i(x, y) = [\cos \alpha \delta(y - y_\lambda(x)) + \sin \alpha \delta(x - x_\lambda(y))] v_0^{-1}, \quad (11)$$

где $v_0 - \text{const}$ (или $v_0 = v_0(y)$, см. [3]), α – угол, который составляет рассматриваемая трасса с осью x , $x_\lambda(y)$ и $y_\lambda(x)$ определяют координаты точки на луче, $\delta(\cdot)$ – дельта-функция. Таким образом, ядра $G_i(r)$ сосредоточены вдоль луча.

Ядра (11) не интегрируемы в квадрате, поэтому для решения обратной задачи нельзя исходить ни из критерия минимизации (3), ни из критерия δ -образности ядра (9), (10). Чтобы свести задачу к постановке, соответствующей первому подходу, в [5, 6] предложено проинтегрировать (2) по частям

$$\gamma_i = H_i(R)m(R) - H_i(0)m(0) - \int_0^R m'(z)H_i(z) dz,$$

где $H_i'(z) = G_i(z)$ (штрих означает операцию дифференцирования), и искать решение из условия минимизации функционала

$$\int_0^R [m'(z)]^2 dz + \alpha[m^2(R) + m^2(0)]$$

при условиях (2). Здесь α – некоторый коэффициент (регуляризатор), определяющий, в каком соотношении должны находиться гладкость искомой функции и ее значения на концах интервала. Для построения сглаженного решения вместо критерия (9) предложен также другой критерий δ -образности сглаживающего ядра [7]

$$s(z) = \int_0^R \left[\varepsilon(\zeta - z) - \int_0^z A(\zeta, z') dz' \right]^2 d\zeta \rightarrow \min, \tag{12}$$

$$\int_0^R A(z, z') dz' = 1,$$

смысл которого заключается в том, что если ядро $A(z, z')$ близко к δ -функции, то интеграл от него должен быть близок к ε -функции Хэвисайда. Недостаток этого критерия заключается в том, что остается неясным, как сглаженное решение, основанное на критерии (12), соотносится с решением, определяемым из условия, накладываемого на саму функцию. В свою очередь, преимуществом подхода, основанного на критерии δ -образности сглаживающего ядра, является то, что он позволяет одновременно с решением оценивать и интервал сглаживания, характеризуемый величиной $s(z)$, и таким образом определять разрешающую способность исходных данных.

В работе [8] описанная выше задача была обобщена на двумерный случай. В этой статье была рассмотрена задача нахождения функции $m(r)$, $r \in \Omega = R^2$ из условия

$$\iint_S (\nabla m)^2 dr \rightarrow \min \tag{13}$$

при ограничениях

$$\delta t_i = t_i - t_{0i} = \iint_S G_i(r)m(r) dr, \quad i \in [1 : N].$$

При этом рассматривался случай неограниченной области Ω . Существенным моментом в обосновании результатов этой работы являлось требование ограничения на бесконечном контуре $m(r)$, иными словами:

$$m(r) \rightarrow \text{const} \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (14)$$

При выполнении указанного требования были получены следующие результаты:

а) дано аналитическое решение задачи (13), (14) (с помощью метода множителей Лагранжа);

б) установлено, что это решение представимо в виде сглаженного решения типа (4). При этом сглаживающее ядро $A_N(r, r')$ имеет вид (5), соответствует минимуму функционала

$$s(r) = \iint_S |E(r, r') - \varepsilon(r, r')|^2 dr'$$

и подчинено условию нормировки

$$\iint_S A_N(r, r') dr' = 1$$

(здесь $\text{div } E(r, r') = 2\pi A_N(r, r')$, $\varepsilon(r, r') = \nabla \ln |r' - r|$);

в) указан эффективный радиус области сглаживания.

Один из алгоритмов решения задачи (13) при ограничениях вида (1) был предложен в работе [9]. Этот алгоритм связан с предварительной дискретизацией исследуемой области и последующим поиском минимума соответствующей квадратичной формы, который проводится с привлечением метода сопряженных градиентов.

Подводя итог сказанному, мы приходим к выводу, что с математической точки зрения сформулированная выше задача является задачей минимизации того или иного функционала (см. (3), (6) или (9)) при соответствующих ограничениях, заданных в виде равенств ((2), (10)). В действительности времена пробега сейсмических волн замеряются неточно, с ошибкой. В таком случае естественно рассматривать задачу минимизации соответствующего функционала с ограничениями в виде неравенств (см. (7), (8), а также работу [10]). Ниже мы укажем новый алгоритм решения этой задачи. Мы также приведем некоторые тестовые примеры решения задачи лучевой сейсмической томографии. Отметим некоторые преимущества предлагаемого алгоритма. Во-первых, он является достаточно быстрым (как правило, достаточно просчитать два цикла по 3–5 итераций). Во-вторых, при его реализации (в отличие, например, от алгоритма работы [9]) не требуется решение каких-либо систем линейных уравнений. Последняя задача, как известно, довольно трудоемка, если размерность системы велика. И в-третьих, описанный ниже алгоритм при его дискретной реализации может быть использован также и в случаях других функционалов качества процесса, например, функционалов вида (13).

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

Итак, укажем алгоритм нахождения минимального по норме решения системы линейных неравенств. Пусть в гильбертовом пространстве $(H, | \cdot |_H)$ задана конечная система неравенств

$$h_i(x) = \langle g_i, x \rangle - b_i \leq 0, \quad i \in [1 : \tilde{N}]. \tag{15}$$

Здесь символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение в пространстве H , $g_i \in H$, $b_i \in R$ – заданные величины. Предположим, что эта система совместна. Пусть $S \subset H$ – шар радиуса R с центром в нуле, такой что

$$S \cap X_{\text{ОПТ}} \neq \emptyset,$$

где $X_{\text{ОПТ}}$ – множество решений системы (15). Рассмотрим следующую задачу: найти минимальное по норме решение системы (15) – $x_{\text{min}} \in X_{\text{ОПТ}}$.

Теория линейных неравенств – один из интенсивно развивающихся в последние годы разделов современной алгебры и математического программирования [11–14]. Для приближенного решения конечной системы линейных неравенств в гильбертовом пространстве могут быть использованы, например, градиентные методы [13]. В настоящей работе, продолжая исследования [15, 16], мы укажем алгоритм решения (15), основанный на методе агрегирования ограничений. В соответствии с этим методом, для решения экстремальной задачи с ограничениями применяется итерационный процесс (в нашем случае – процесс (16), (18), (19)). При этом на каждом шаге соответствующей итерации решается более простая вспомогательная экстремальная задача. Вместо семейства ограничений (15) используется одно новое ограничение (П1) (см. Приложение), представляющее собой линейную комбинацию исходных ограничений с соответствующими агрегированными весовыми коэффициентами $h_{i,k}^+(x^k)$ (см. доказательство теоремы 1 в Приложении). Эти агрегированные коэффициенты после аналитического решения вспомогательной экстремальной задачи (П2) пересчитываются заново.

Введем последовательность

$$x^{k+1} = (1 - \tau_k)x^k + \tau_k u^k, \quad x^0 \in S, \quad k \in \mathcal{N} = \{0, 1, 2, \dots\}. \tag{16}$$

Заметим, что в силу выпуклости множества S из включений $x^k, u^k \in S$ следует включение

$$x^{k+1} \in S. \tag{17}$$

Алгоритм основан на следующих двух теоремах, рассмотренных подробнее в Приложении.

Теорема 1. Пусть взяты последовательности элементов $\{g_i^k\}_{k=0}^\infty$, $g_i^k \in H$, а также чисел $\{b_i^k\}_{k=0}^\infty$, $i \in [1 : \tilde{N}]$ и $\{\tau_k\}_{k=0}^\infty$ со свойствами:

А) $\nu_k = \max_{i \in [1 : \tilde{N}]} \{ \max_{i \in [1 : \tilde{N}]} |b_i^k - b_i|, \max_{i \in [1 : \tilde{N}]} |g_i^k - g_i|_H \} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$,

В) $\tau_k \in [0, 1]$, $\tau_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, $\sum_{k=0}^\infty \tau_k = \infty$.

Тогда последовательность $\{x^k\}_{k=0}^\infty$ вида (16) сходится к x_{min} , т. е.

$$x^k \rightarrow x_{\min} \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

если последовательность $\{u^k\}_{k=0}^\infty \in H$ задается по правилу

$$u^k = \begin{cases} 0, & c_k \geq 0 \text{ или } |\sigma_k|_H = 0 \\ c_k \sigma_k / |\sigma_k|_H^2, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (18)$$

Здесь

$$\begin{aligned} h_{i,k}^+(x) &= \max\{0, h_{i,k}(x)\}, \quad \sigma_k = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} h_{i,k}^+(x^k) g_i^k, \quad c_k = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} h_{i,k}^+(x^k) b_i^k + \varepsilon_k, \\ h_{i,k}(x) &= \langle g_i^k, x \rangle - b_i^k, \quad \varepsilon_k = \tilde{N}(\lambda_k + \mu) \nu_k (1 + R), \\ \mu &= \max_{i \in [1:\tilde{N}]} \{|b_i| + |g_i|_H R\}, \quad \lambda_k = \nu_k (1 + R) + \mu. \end{aligned} \quad (19)$$

Из теоремы 1 и теоремы 2 работы [16] вытекает следующая теорема, дающая представление о скорости сходимости алгоритма

Теорема 2. Пусть $\tau_k = \alpha/(k+1)$, $k \in \mathcal{N}$, $\alpha \in (0.5; 1)$ и существует число $p \in [2(1-\alpha), 1]$, $p < 2\alpha$ такое, что при всех $k \in \mathcal{N}$

$$\varepsilon_k (k+1)^p < 1 - \alpha.$$

Тогда справедливы следующие оценки:

$$|h^+(x^k)|_{\tilde{N}}^2 \leq \frac{M(p)}{(k+1)^p} \quad (k \in \mathcal{N}), \quad |x^k|_H \leq |x_{\min}|_H + \frac{|x^0|_H}{(1+k)^\alpha},$$

если $M(p) = 2(1 + K_h)\alpha/(2\alpha - p)$.

Здесь величины ε_k заданы согласно (19) (определение числа K_h см. в доказательстве теоремы 1).

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ. МОДЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ

Укажем алгоритм решения обратной задачи лучевой сейсмологии.

Входные данные алгоритма. Область $\Omega \subset R^2$, местоположение источников и приемников, замеры времен t_i , $i = 1, \dots, N$, погрешности $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$ измерений времен пробега, начальное распределение скорости $v_0(r)$, $r \in \Omega$.

Выход. Распределение скорости $v(r)$, $r \in \Omega$.

Начальный шаг. По распределению скорости $v_0(r)$ определяем форму лучей l_{0i} , а также времена пробега t_{0i} , $i = 1, \dots, N$. Находим невязки времен $\delta t_i^0 = t_i - t_{0i}$; $i = 1, \dots, N$.

Строим по лучам l_{0i} ядра интегрирования G_i^0 , $i = 1, \dots, N$.

Решаем задачу минимизации функционала

$$\iint_{\Omega} |m(r)|^2 dr$$

при ограничениях

$$\delta t_i^0 - \varepsilon^{(2)} \leq \iint_{\Omega} G_i^0(r)m(r) dr \leq \delta t_i^0 + \varepsilon^{(1)}, \quad i \in [1 : N].$$

Для этого применяем алгоритм (16), (18), полагая

$$\begin{aligned} H &= L_2(\Omega), \quad \tilde{N} = 2N, \quad x = m, \\ g_i &= G_i^0, \quad b_i = \delta t_i^0 + \varepsilon^{(1)}, \quad i \in [1 : N], \\ g_i &= G_{i-N}^0, \quad b_i = -\delta t_{i-N}^0 + \varepsilon^{(2)}, \quad i \in [N + 1 : \tilde{N}], \\ h_i(m) &= \iint_{\Omega} G_i^0(r)m(r) dr - \delta t_i^0 - \varepsilon^{(1)}, \quad i \in [1 : N], \\ h_i(m) &= \iint_{\Omega} G_{i-N}^0(r)m(r) dr + \delta t_{i-N}^0 - \varepsilon^{(2)}, \quad i \in [N + 1 : \tilde{N}]. \end{aligned}$$

Здесь $L_2(\Omega)$ – пространство суммируемых с квадратом функций на Ω со следующей нормой и скалярным произведением

$$|x|_H = \left(\iint_{\Omega} |x(r)|^2 dr \right)^{1/2}, \quad \langle x, y \rangle = \iint_{\Omega} x(r) y(r) dr.$$

Просчитываем M_0 шагов этого алгоритма, т. е. просчитываем M_0 “внутренних итераций”, полагая $\nu_k = 0, k = 0, \dots, M_0 - 1$. Заметим, что так как $\nu_k = 0$, то справедливы соотношения (см. теорему 1 и формулы (19))

$$g_i^k = g_i, \quad b_i^k = b_i, \quad \varepsilon_k = 0, \quad k \in [0 : M_0 - 1], \quad i \in [1 : \tilde{N}].$$

Получаем распределение невязки $m^1(r), r \in \Omega$, по которому определяем распределение скорости $v^1(r)$, исходя из формулы

$$m^1(r) = \frac{1/v^1(r) - 1/v_0(r)}{1/v^1(r)}, \quad r \in \Omega.$$

n-й шаг (“внешняя итерация” $n = 1, \dots, K$). На предыдущем $(n - 1)$ -м шаге вычислено распределение скорости $v^n(r), r \in \Omega$. На данном шаге принимаем его за начальное : $v_0(r) = v^n(r), r \in \Omega$. Для этого распределения проводим лучевое трассирование, находим форму лучей $l_i^n, i = 1, \dots, N$, которые принимаем за начальное приближение: $l_{0i} = l_i^n, i = 1, \dots, N$.

По распределению скорости $v_0(r)$ и лучам l_{0i} находим времена пробега $t_{0i}, i = 1, \dots, N$, невязки времен $\delta t_i^n = t_i - t_{0i}$.

Строим по лучам l_{0i} ядра интегрирования $G_i^n, i = 1, \dots, N$.

Решаем задачу минимизации функционала

$$\iint_{\Omega} |m(r)|^2 dr$$

при ограничениях

$$\delta t_i^n - \varepsilon^{(2)} \leq \iint_{\Omega} G_i^n(r) m(r) dr \leq \delta t_i^n + \varepsilon^{(1)}, \quad i \in [1 : N].$$

Для этого применяем алгоритм (16), (18), полагая

$$H = L_2(\Omega), \quad \tilde{N} = 2N, \quad x = m,$$

$$g_i = G_i^n, \quad b_i = \delta t_i^n + \varepsilon^{(1)}, \quad i \in [1 : N],$$

$$g_i = G_{i-N}^n, \quad b_i = -\delta t_{i-N}^n + \varepsilon^{(2)}, \quad i \in [N+1 : \tilde{N}].$$

Просчитываем M_n “внутренних итераций” при $\nu_k = 0, k = 0, \dots, M_n - 1$. Получаем распределение $m^{n+1}(r), r \in \Omega$, по которому находим распределение $v^{n+1}(r), r \in \Omega$.

Конечный шаг. Полагаем $v(r) = v^{K+1}(r), r \in \Omega$.

С целью проверки эффективности описанной методики была проведена серия тестовых расчетов для различных моделей среды. Рассмотрим два примера этой серии, которые отвечают изображенным на рис. 1 распределениям скоростей. На рис. 2 показан набор источников и приемников, соединенных 100 лучами, который использовался при тестировании. В качестве входных данных брались времена пробега t_i , рассчитанные в предположении криволинейности лучей. Величины погрешностей $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}$ при проведении вычислительных экспериментов были положены равными нулю. Отметим, что погрешности практически всегда неявно присутствуют в замерах t_i в виду приближенного вычисления времен пробега.

В нулевом приближении распределение скорости $v_0(x, y), (x, y) \in \Omega$, считалось равномерным и равным фоновой скорости: $v_0(x, y) = 3, (x, y) \in \Omega$, начальное значение невязки $m^0(x, y) = 0, (x, y) \in \Omega$. При проведении вычислительных экспериментов была взята равномерная сетка на Ω , состоящая из 25×25 квадратных ячеек, пронумерованных от 1 до 625. Ядра интегрирования $G_i(x, y), i = 1, \dots, 100$, аппроксимировались дискретными ядрами $A_i = \{a_{ij}\}_{j=1}^{625}$. Отметим, что ядра $G_i(x, y)$ должны [1–5] удовлетворять соотношению

$$\iint_{\Omega} G_i(x, y) dx dy = t_{0i},$$

которое для A_i записывается следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{625} a_{ij} \Delta S = t_{0i},$$

где ΔS – площадь ячейки. Поэтому a_{ij} вычислялись по формуле

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{|l_{0i}|}{v_{0j} n_i}, & \text{если } (x_j, y_j) \in O_h(l_{0i}), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь $|l_{0i}|$ – длина луча l_{0i} , v_{0j} – скорость в j -й ячейке, $O_h(l_{0i})$ – h -окрестность луча l_{0i} ($h = 10$), n_i – число ячеек, центры которых принадлежат $O_h(l_{0i})$.

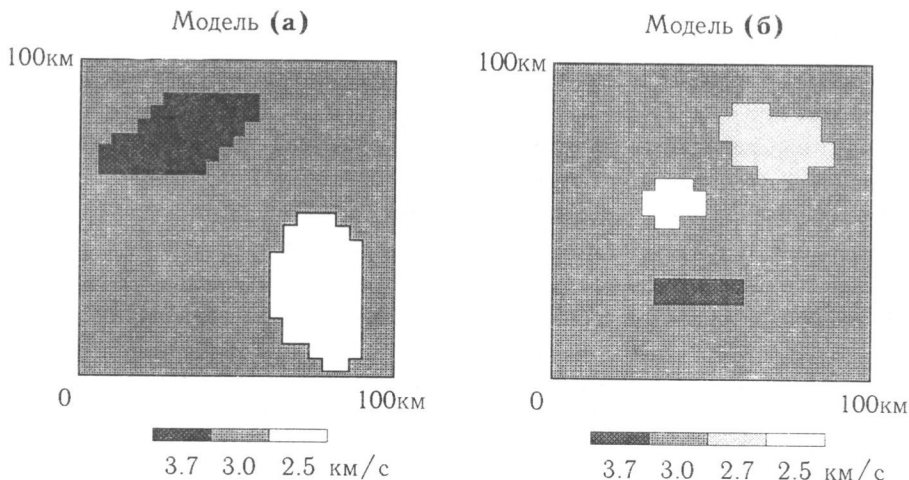
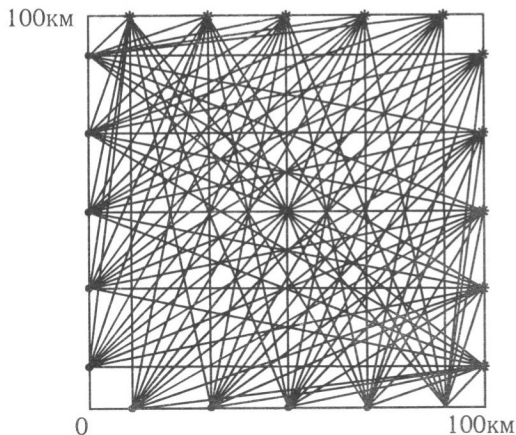


Рис. 1. Модели среды

Рис. 2. Набор лучей, для которого проводилось тестирование

Кружки – станции, звездочки – эпицентры землетрясений



Лучевое трассирование проводилось путем интегрирования уравнений эйконала [17]

$$\frac{dx}{ds} = vp_1, \quad \frac{dy}{ds} = vp_2, \quad \frac{dp_1}{ds} = -v^{-2} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{dp_2}{ds} = -v^{-2} \frac{\partial v}{\partial y}$$

по методу Эйлера.

Численные эксперименты показали, что наибольшая эффективность достигается после проведения 3–5 итераций до и 3–5 итераций после трассирования. Иными словами, достаточно двух “внешних итераций”, каждая из которых состоит из 3–5 “внутренних итераций”. Больше число итераций не дает существенного улучшения точности. Кроме того, значительное влияние на качество выхода ал-

горитма оказывают элементы τ_k последовательности $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$, удовлетворяющие условию (В) теоремы 1. Для рассмотренных примеров наилучшие результаты достигаются при $\tau_k = 1/(k+2)$ и $\tau_k = 1/\sqrt{3k+4}$. В таблице приведены равномерные (ϵ_{\max}) и усредненные ошибки (ϵ_{aver}) для найденных распределений скорости после каждой итерации при разных τ_k . Было положено $K = 1$, $M_0 = M_1 = 5$. На рис. 3 показаны значения распределения скорости, полученные после 10 “внутренних” итераций при $\tau_k = 1/(k+2)$. Различная штриховка отвечает различным интервалам найденной скорости. Например, на рис. 3 (модель (а)) в ячейках с самой темной штриховкой $3.6052 < v < 3.6391$, а в незаштрихованных ячейках $2.3407 < v < 2.5665$. Для сравнения на рис. 4 показаны значения распределения скорости для модели (а), полученного после первой итерации.

Процессорное время, затрачиваемое ПЭВМ типа АТ-486DX, 66 МГц, на десять итераций (без учета трассирования) составляет около 5 с.

ТАБЛИЦА. Ошибки вычислений (в %) для моделей (а) и (б).

Шаг	k	$\tau_k = 1/(k+2)$		$\tau_k = 1/\sqrt{3k+4}$	
		ϵ_{\max}	ϵ_{aver}	ϵ_{\max}	ϵ_{aver}
Модель (а)					
1	0	18.84	6.66	18.84	6.66
2	1	17.71	5.73	17.56	5.64
3	2	19.96	5.78	20.81	5.91
4	3	18.72	5.46	18.87	5.62
5	4	19.85	5.59	20.02	5.77
6	0	18.06	5.23	17.75	5.24
7	1	20.17	5.12	20.47	5.34
8	2	19.04	5.04	19.31	5.15
9	3	19.69	5.05	18.91	5.11
10	4	19.31	4.93	19.40	4.92
Модель (б)					
1	0	18.05	4.15	18.05	4.15
2	1	17.02	4.21	17.31	4.26
3	2	17.16	4.02	17.39	4.06
4	3	15.73	3.96	15.81	4.02
5	4	16.15	3.88	16.52	3.93
6	0	13.29	4.18	13.59	4.08
7	1	14.44	3.92	14.97	3.86
8	2	13.80	4.11	13.85	4.12
9	3	13.79	4.00	14.09	3.92
10	4	13.06	4.13	14.69	3.92

Примечание. После пятого шага проведено лучевое трассирование

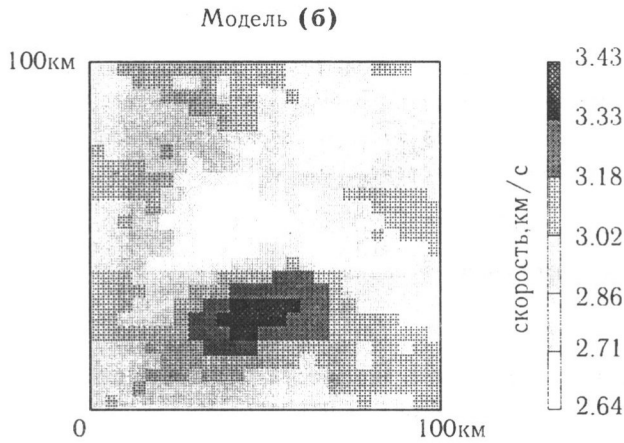
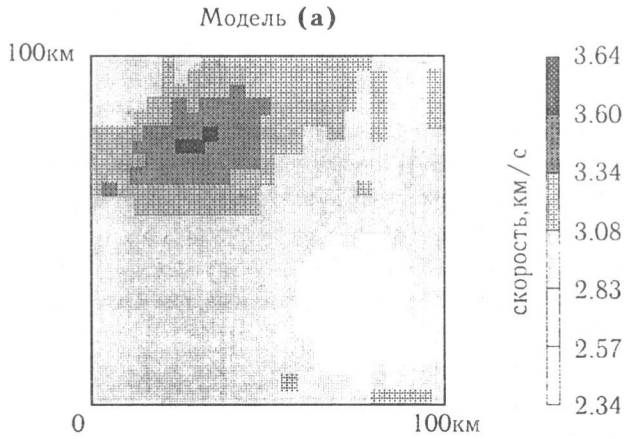


Рис. 3. Восстановленное после десяти итераций распределение скорости для моделей (а) и (б), $\tau_k = 1/(k + 2)$

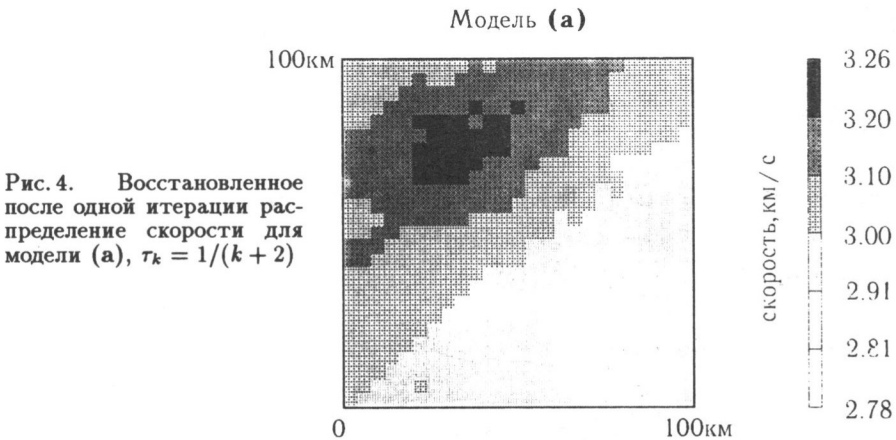


Рис. 4. Восстановленное после одной итерации распределение скорости для модели (а), $\tau_k = 1/(k + 2)$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе описан вычислительный алгоритм решения обратной задачи лучевой сейсмологии: задачи восстановления скоростных характеристик среды по результатам измерения времени пробега сейсмических сигналов. Алгоритм апробирован на модельных примерах, которые показывают его удовлетворительную сходимость.

Предлагаемый метод ориентирован на ситуации, когда времена пробега сейсмических волн измеряются с ошибкой и безусловно требует уточнений и основательной экспериментальной апробации на реальных данных. Мы планируем дальнейшее развитие описанной методики. При этом значительное внимание будет уделяться как вопросам, связанным с использованием различных функционалов для отбора подходящих величин $m(r)$, так и вопросам устойчивости, корректности создаваемых алгоритмов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1 проводится по схеме доказательства теоремы 1 работы [16] и основано на следующей лемме.

Лемма 1 [15]. Пусть последовательности чисел $\{\beta_k\}_{k=1}^\infty$, $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$, $\{\delta_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq \beta_{k+1} \leq \beta_k - \tau_k \delta_k + \gamma_k.$$

Если выполнены следующие условия:

- i) $\underline{\lim} \delta_k \geq 0$,
- ii) для любой подпоследовательности $\{k_i\}_{i=1}^\infty \in \mathcal{N}$ из неравенства $\underline{\lim} \beta_{k_i} > 0$ следует неравенство $\underline{\lim} \delta_{k_i} \geq 0$,
- iii) $\tau_k \geq 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = 0$, $\sum_{k=1}^\infty \tau_k = \infty$,
- iv) $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k / \tau_k = 0$,

то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 0.$$

Доказательство теоремы 1. Заметим, что неравенство

$$(h_k^+(x^k), h_k(u))_{\tilde{N}} = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} h_{i,k}^+(x^k) (\langle g_i^k, u \rangle - b_i^k) \leq \varepsilon_k \quad (\text{П1})$$

может быть записано в виде

$$\sum_{i=1}^{\tilde{N}} h_{i,k}^+(x^k) \langle g_i^k, u \rangle \leq \sum_{i=1}^{\tilde{N}} h_{i,k}^+(x^k) b_i^k + \varepsilon_k.$$

Здесь $h_k(x) = \{h_{1,k}(x), \dots, h_{\tilde{N},k}(x)\} \in R^{\tilde{N}}$, $h_k^+(x) = \{h_{1,k}^+(x), \dots, h_{\tilde{N},k}^+(x)\} \in R^{\tilde{N}}$, символ $(\cdot, \cdot)_{\tilde{N}}$ означает скалярное произведение в $R^{\tilde{N}}$, а символ $|\cdot|_{\tilde{N}}$ – евклидову норму в $R^{\tilde{N}}$. Иными словами (см. (18))

$$\langle \sigma_k, u \rangle \leq c_k.$$

Отсюда вытекает соотношение

$$u^k = \arg \min\{|u|_H : (h_k^+(x^k), h_k(u))_{\tilde{N}} \leq \varepsilon_k\}. \quad (\text{П2})$$

Далее, справедливы неравенства:

$$|h_i(x)| \leq \mu, \quad |h_{i,k}(x)| \leq |(g_i^k - g_i, x) - (b_i^k - b_i)| + |\langle g_i, x \rangle - b_i| \leq \lambda_k,$$

$$|h_{i,k}(x) - h_i(x)| = |\langle g_i^k - g_i, x \rangle - (b_i^k - b_i)| \leq \nu_k(1 + R),$$

$$|h_{i,k}^+(x) - h_i^+(x)| \leq \nu_k(1 + R) \quad \forall x \in S,$$

где

$$h_i^+(x) = \max\{0, h_i(x)\}, \quad i \in [1 : \tilde{N}].$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |(h_k^+(x^k), h_k(u))_{\tilde{N}} - (h^+(x^k), h(u))_{\tilde{N}}| &= \left| \sum_{i=1}^{\tilde{N}} h_{i,k}^+(x^k) h_{k,i}(u) - \sum_{i=1}^{\tilde{N}} h_i^+(x^k) h_i(u) \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^{\tilde{N}} h_{i,k}^+(x^k) (h_{i,k}(u) - h_i(u)) \right| + \left| \sum_{i=1}^{\tilde{N}} (h_i^+(x^k) - h_{i,k}^+(x^k)) h_i(u) \right| \leq \varepsilon_k. \end{aligned} \quad (\text{П3})$$

Кроме того, имеем $(h^+(x^k), h(x_{\min}))_{\tilde{N}} \leq 0$. Поэтому, учитывая (П3), заключаем

$$(h_k^+(x^k), h_k(x_{\min}))_{\tilde{N}} \leq \varepsilon_k.$$

Откуда в силу (П2) выводим

$$|u^k|_H \leq |x_{\min}|_H. \quad (\text{П4})$$

Следовательно, $u^k \in S$, т.е. верно включение (17). В силу выпуклости функций $h_i(\cdot)$ справедливы неравенства

$$h_{i,k}((1 - \tau_k)x^k + \tau_k u^k) \leq (1 - \tau_k)h_{i,k}(x^k) + \tau_k h_{i,k}(u^k) \leq (1 - \tau_k)h_{i,k}^+(x^k) + \tau_k h_{i,k}(u^k).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |h_k^+((1 - \tau_k)x^k + \tau_k u^k)|_{\tilde{N}}^2 &\leq |(1 - \tau_k)h_k^+(x^k) + \tau_k h_k(u^k)|_{\tilde{N}}^2 \leq \\ &\leq (1 - \tau_k)^2 |h_k^+(x^k)|_{\tilde{N}}^2 + 2(1 - \tau_k)\tau_k \varepsilon_k + \tau_k^2 |h_k(u^k)|_{\tilde{N}}^2. \end{aligned}$$

При получении последнего неравенства мы воспользовались соотношениями (П1), (П2). Таким образом

$$|h_k^+(x^{k+1})|_{\tilde{N}}^2 \leq (1 - 2\tau_k)|h_k^+(x^k)|_{\tilde{N}}^2 + 2K_h\tau_k^2 + 2\tau_k\varepsilon_k,$$

$$K_h = \sup\{|h_k(x)|_{\tilde{N}}^2 : x \in S, k \in \{0, 1, \dots\}\}.$$

Воспользовавшись леммой 1, считая

$$\beta_k = |h_k^+(x^k)|_{\tilde{N}}^2, \quad \delta_k = 2\beta_k, \quad \gamma_k = 2K_h\tau_k^2 + 2\tau_k\varepsilon_k,$$

будем иметь

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_k^+(x^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} h^+(x^k) = 0, \quad (\text{П5})$$

где $h^+(x) = \{h_1^+(x), \dots, h_{\tilde{N}}^+(x)\} \in R^{\tilde{N}}$.

Пусть $\{x^{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ – слабо сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$:

$$k_l \rightarrow \infty, \quad x^{k_l} \rightarrow x_* \in H \quad \text{слабо в } H \text{ при } l \rightarrow \infty. \quad (\text{П6})$$

Ввиду ограниченности последовательности $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ такая подпоследовательность существует. Напомним, что сходимость (П6) означает

$$\langle x^{k_l} - x_*, y \rangle \rightarrow 0 \quad \text{при } l \rightarrow \infty \quad \forall y \in H.$$

Из (П5) следует равенство $h^+(x_*) = 0$, которое влечет включение

$$x_* \in X_{\text{ОПТ}}. \quad (\text{П7})$$

В силу свойства слабого предела из (П6), (П7) получаем

$$\liminf_{l \rightarrow \infty} |x^{k_l}|_H \geq |x_*|_H \geq |x_{\min}|_H. \quad (\text{П8})$$

Учитывая выпуклость нормы, включение (17) и неравенство (П4), выводим

$$|x^{k+1}|_H \leq (1 - \tau_k)|x^k|_H + \tau_k|x_{\min}|_H.$$

Поэтому

$$\max\{|x^{k+1}|_H - |x_{\min}|_H, 0\} \leq (1 - \tau_k) \max\{|x^k|_H - |x_{\min}|_H, 0\}.$$

Снова воспользуемся леммой 1, полагая

$$\beta_k = \delta_k = \max\{|x^k|_H - |x_{\min}|_H, 0\}.$$

Будем иметь

$$|x^k|_H \rightarrow |x_{\min}|_H \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (\text{П9})$$

В силу (П8) и (П9)

$$x_* = x_{\min}.$$

Итак, всякая слабо сходящаяся подпоследовательность последовательности (x^k) сходится (слабо) к одному и тому же элементу — x_{\min} . Это означает, что и сама последовательность (x^k) сходится (слабо) к x_{\min} . Однако в гильбертовом пространстве слабая сходимости последовательности элементов и сходимости их норм влечет сильную сходимости [18]. Отсюда и из (П9) и следует справедливость теоремы.

Работа выполнена при поддержке Международного научно-технического центра (грант 008-94), Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 97-01-01060 и 96-05-65349), Министерства науки и технологий Российской Федерации (грант 0201.01.017) и ИНТАС (грант INTAS 93-457).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Backus G., Gilbert F.* The resolving power of gross earth data // *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 1968. Vol.16. P.169–205.
2. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. Теория и методы. Т. 2. М.: Мир, 1983. С.526–776.
3. *Backus G., Gilbert F.* Numerical applications of a formalism for geophysical inverse problems // *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 1967. Vol.13. P.247–276.
4. *Левшин А.Л., Яновская Т.Б., Ландер А.В., Букчин Б.Г. и др.* Поверхностные сейсмические волны в горизонтально-неоднородной Земле. М.: Наука, 1983. 278 с.
5. *Яновская Т.Б.* Метод решения обратной кинематической задачи сейсмологии для горизонтально-неоднородной среды // *Методы и алгоритмы интерпретации сейсмологических данных.* (Вычисл. сейсмология. Вып.13). М.: Наука, 1980. С.96–101.
6. *Backus G., Gilbert F.* Constructing *P*-velocity models to fit restricted sets of travel-time data // *Bull. Seismol. Soc. Amer.* 1969. Vol.59. P.1407–1420.
7. *Jonson E., Gilbert F.* Inversion and inference for teleseismic ray data // *Math. Comp. Phys.* 1972. Vol.12. P.231–266.
8. *Дитмар П.Г., Яновская Т.Б.* Обобщение метода Бэйкуса–Гильберта для оценки горизонтальных вариаций скорости поверхностных волн // *Изв. Акад. наук СССР. Физика Земли.* 1987. N 6. С.30–40.
9. *Дитмар П.Г.* Алгоритм томографической обработки сейсмических данных, предполагающей гладкость искомой функции // *Изв. Акад. наук СССР. Физика Земли.* 1993. N 1. С.7–12.
10. *Рамм А.Г.* Многомерные обратные задачи рассеяния. М.: Мир, 1994. 494 с.
11. *Черников С.Н.* Линейные неравенства. М.: Наука, 1984. 384 с.
12. *Астафьев Н.Н.* Бесконечные системы неравенств в математическом программировании. М.: Наука, 1991. 116 с.
13. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. 324 с.
14. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И.* Конструктивные методы оптимизации. Ч. 3. Сетевые задачи. Минск.: Университетское, 1986. 224 с.

15. *Ermoliev Yu.M., Kryazhinskiy A.V., Ruszczyński A.* Constraint aggregation principle in convex optimization // *Mathematical Programming*. 1997. Vol.76. P.353–372.
16. *Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Об одной итерационной процедуре решения задачи управления с фазовыми ограничениями // *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. 1998. Т.42, N 9. (в печати).
17. *Pšenčík I.* Seismic ray method for inhomogeneous isotropic and anisotropic media // *Second Workshop on Three-dimensional Modelling of Seismic Waves Generation, Propagation and their Inversion, Italy, Trieste, 1994*. 114 с.
18. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 744 с.