УДК 517.983.54+519.642

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ВНУТРИ ИОНОСФЕРНОГО ВОЛНОВОДА ПО СКАЧКУ ТАУ–ФУНКЦИИ НА НЕМ

А.Л. Агеев, В.В. Васин
Институт математики и механики
Уральского отделения Российской академии наук

Э.Н. Бессонова, В.М. Маркушевич, С.Г. Киселев
Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук

Продолжается исследование обратной задачи радиозондирования ионосферы, содержащей волновод. В предшествующих работах [1–3] эта задача рассматривалась для наклонного зондирования вдоль магнитной широты, которое проводится на двух (и более) фиксированных частотах. В настоящей работе показано, что использование импульсного источника при той же схеме эксперимента не дает новой информации, несмотря на то, что дополнительно измеряется время движения радиосигнала вдоль луча. Причиной является ме́ньшая информация о среде, содержащаяся в групповой скорости, по сравнению с той, которая содержится в фазовой – это следует из теоремы Брайта–Тьюва. Кроме того, отмечено, что если нам известно фазовое время в некотором интервале частот, то строение волновода может быть определено по скачку тау-функции на волноводе, который зависит от частоты сигнала. Точнее говоря, определяются меры лебеговых множеств, порождаемых скоростью в волноводе. Для выпуклого волновода в этих условиях определяется его ширина при любой скорости.

DETERMINATION OF ELECTRON CONCENTRATION INSIDE THE IONOSPHERIC WAVEQUIDE FROM THE JUMP OF TAU–FUNCTION

A.L. Ageev, V.V. Vasin
Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Division, Russian Academy of Sciences

E.N. Bessonova, V.M. Markushevich, and S.G. Kiselev
International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences

In this paper the study of the ionosphere with waveguide is continued. In previous publications [1–3] this problem was treated for the oblique sounding along a magnetic latitude at two or more fixed frequencies. In this paper we show that a pulse source, used in the same manner as a monochromatic one, can not provide new information which seems to be obtained from travel times of radio signals. This happens because group velocity contains less information on dispersive media than phase velocity, as follows from the Breit–Tuve theorem. Besides we point out that the structure of waveguide can be inferred from the jump of tau-function at the waveguide which depends on frequency, if phase time is observed for some frequency range. Strictly speaking, we can find measures of Lebesgue sets generated by the velocity inside waveguide. For more vivid explanation let us assume that the waveguide is convex; then we can find its width at any value of velocity.

ВВЕДЕНИЕ

Обращение данных радиозондирования ионосферы с волноводами в книге [4] называется "проблемой долин". Насколько нам известно, строгого математического исследования этой задачи до недавнего времени не проводилось. Традиционными методами невозможно определить по ионограмме зависимость электронной плотности от высоты, если в ионосфере есть волноводы-"долины", т.е. слои с пониженной электронной концентрацией. Действительно, в этом случае метод обращения интеграла Абеля неприменим [4,5].

В работах [1–3] мы представили такое исследование. Рассматривая проблему долин, мы опирались на две теории: 1) решение обратной задачи геометрической сейсмики для сред с волноводами [6] и 2) закон Эпплтона–Хартри для дисперсии электромагнитных волн в ионосфере [2,7].

Опишем кратко результат нашего исследования.

Пусть проводится наклонное радиозондирование ионосферы вдоль некоторой трассы, т.е. сигнал, излучаемый неподвижным источником на поверхности Земли, записывается приемником, находящимся на самолете, который удаляется от источника. Вместо движущегося приемника можно использовать ряд (или профиль) близко расположенных неподвижных приемников, который позволяет в каждом пункте регистрации определить направление прихода радиоволны, или лучевой параметр. Предполагается, что источник излучает две стабильные частоты, а при обработке записи (например подвижного приемника) определяется доплеровский сдвиг на обеих частотах. Предположим, что трасса расположена вдоль магнитной широты, будем называть ее субширотной. Тогда по этим данным можно найти меру множеств Лебега, порождаемых электронной плотностью внутри волновода (далее называемой для краткости лебеговой мерой электронной плотности), и саму эту плотность выше волновода. Этот результат легко обобщается и на случай нескольких волноводов [1]. Решение основано на поведении экстраординарного луча (т.е. луча, в плоскости которого лежит вектор напряженности магнитного поля). Предположение о наличии магнитного поля важно, так как при его отсутствии этим способом лебегову меру определить нельзя.

Появление казалось бы чисто математического понятия – меры Лебега – при решении этой физической задачи объясняется очень просто. Представим себе, что волновод состоит из тонких однородных слоев. Тогда любой луч, прошедший сквозь волновод, не изменится выше волновода, если слои внутри него перетасовать произвольным образом. Эту аналогию с перетасовкой игральных карт впервые предложил Слихтер [8], рассматривая соответствующую сейсмическую задачу. Ясно, что при перетасовке лебегова мера сохраняется.

Допустим теперь, что известно время распространения монохроматического сигнала от источника к приемникам, расположенным вдоль субширотной трассы. Конечно, это более обширная информация, чем доплеровский сдвиг частоты. Более того, пусть это время известно для любой частоты, при которой сигнал проходит сквозь волновод и, отразившись, возвращается на Землю. При этом возникает новая возможность получения сведений о строении волновода. Она основана на обращении скачка времени, возникающего от пересечения волновода сигналом. На самом деле, рассматривается не время, а так называемая тау-функция [6], которая является линейной комбинацией времени и расстояния между источником и приемником для луча с заданным лучевым параметром. Этот скачок является функцией частоты.

Казалось бы, эту задачу, связанную с измерением времени, проще ставить для импульсного сигнала. Однако использование групповой скорости вместо фазовой приводит, вообще говоря, к обеднению информации, как следует из теоремы Брайта–Тьюва [4]. Ниже мы остановимся на этом явлении более подробно.

НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ ИЗ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СЕЙСМИКИ

Введем здесь некоторые обозначения, которые используются в [6] – они нам потребуются в дальнейшем.

Пусть в полуплоскости $\{(x,y),\ -\infty < x < \infty\ y \geq 0\}$ скорость распространения сигнала зависит только от высоты $y : u = u(y)$ (рис. 1). Допустим, что $u(0) = 1$, что всегда может быть получено с помощью соответствующей нормировки. Тогда восходящая и нисходящая ветви луча симметричны относительно средней линии, если источник и приемник находятся на одном уровне. Половина расстояния между источником и точкой возврата луча $X(p)$ и половина времени распространения сигнала вдоль луча $T(p)$ определяются следующими формулами:

$$X(p) = \int\limits_0^{Y(p)} \frac{p\,dy}{\sqrt{n^2(y) - p^2}}, \qquad T(p) = \int\limits_0^{Y(p)} \frac{n^2(y)\,dy}{\sqrt{n^2(y) - p^2}}, \tag{1}$$

где $p = \sin\alpha(0)$ – лучевой параметр, $n(y) = 1/u(y)$ – коэффициент преломления, $Y(p)$ – высота вершины луча с параметром p.

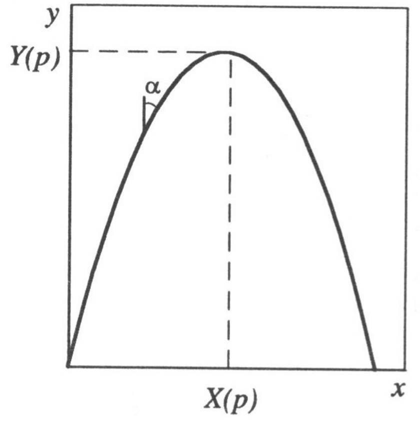

Рис. 1. Траектория луча
x – горизонтальное расстояние, y – высота

Для решения обратной лучевой задачи вводится тау-функция

$$\tau(p) = T(p) - pX(p) = \int\limits_0^{Y(p)} \sqrt{n^2(y) - p^2}dy. \tag{2}$$

Для понимания геометрического смысла этой функции введем кривую $\Gamma = \{x(p) = 2X(p),\ t(p) = 2T(p),\ p \in (0,1)\}$, которая в сейсмологии называется годографом (рис. 2). Лучевой параметр p имеет смысл производной $dT/dX = p$.

Функция $\tau(p)$ определяется отрезком, отсекаемым на полуоси $t > 0$ касательной к годографу в точке, где производная равна p. Этот отрезок в математической литературе называется подкасательной. В англоязычной сейсмической литературе за ним закрепился термин "intercept time" [9], в русской, насколько нам известно, стандартного названия нет, чаще всего используется термин "тау-функция".

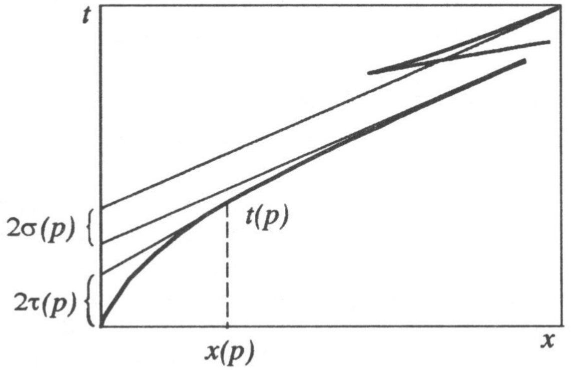

Рис. 2. Годограф

В работе [6] доказывается, что $\tau(p)$ – монотонно убывающая функция. Она непрерывна всюду, кроме тех p, которые совпадают со значением коэффициента преломления на нижнем краю волновода. На рис. 3 показан коэффициент преломления, соответствующий годографу на рис. 2; участок $(y_1, \bar{y}_1)$ – волновод, которому отвечает локальный минимум P коэффициента преломления. На рис. 2 та же величина P является тангенсом угла наклона касательной, к которой асимптотически стремится годограф при $x \to \infty$ в волноводе.

Следуя [6], обозначим скачок тау-функции на волноводе через σ. Значение параметра P определяет наклон асимптот к годографу.

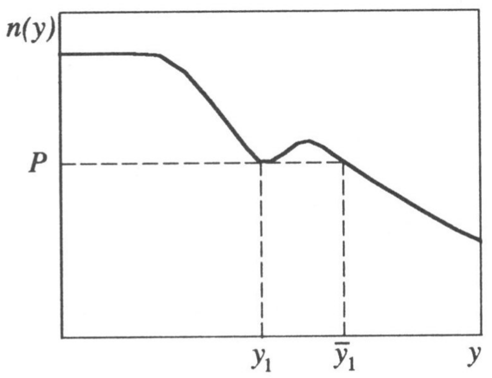

Рис. 3. Коэффициент преломления, отвечающий годографу на рис. 2

СКАЧОК ТАУ–ФУНКЦИИ НА ВОЛНОВОДЕ КАК ФУНКЦИЯ ЧАСТОТЫ

Так как скорость радиоволн в ионосфере зависит от частоты сигнала, то и скачок тау-функции является функцией частоты: $\sigma = \sigma(\omega)$. Найдем его выражение через коэффициент преломления и лебегову меру электронной плотности.

Введем (ср. [3])

$$f(y) = -\omega_0^2(y),$$

где ω_0 – плазменная частота, $\omega_0^2 = 4\pi N_e e^2/m$, $N_e = N_e(y)$ – электронная концентрация, e, m – заряд и масса электрона.

Пусть $F(r)$ – лебегова мера функции $f(y)$ внутри волновода

$$F(r) = \mathrm{mes}\{y,\ y \in (y_1, \bar{y}_1),\ f(y) < r\}.$$

Для упрощения допустим, что электронная концентрация является непрерывной функцией высоты в волноводе и некоторой его окрестности. Тогда [6]

$$\sigma(\omega) = \int\limits_h^H \sqrt{n^2(r,\omega) - P^2(\omega)}\,dF(r), \tag{3}$$

где $h = \min\{f(y),\ y \in (y_1, \bar{y}_1)\}$, $H = \max\{f(y),\ y \in (y_1, \bar{y}_1)\}$, $n(f,\omega)$ – коэффициент преломления (рис. 4).

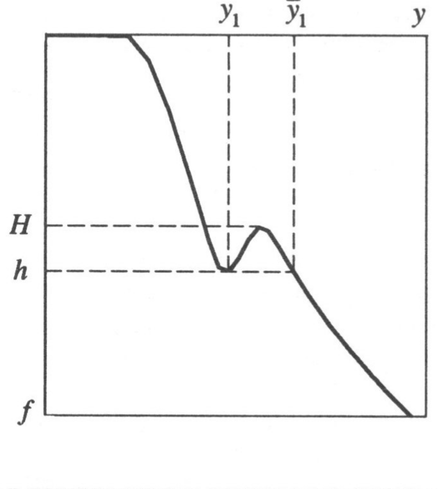

Рис. 4. Зависимость $f(y) = -\omega_0^2(y)$ от высоты y (ω_0 – плазменная частота)

ФАЗОВЫЙ И ГРУППОВОЙ КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Для экстраординарного радиолуча, который параллелен магнитной широте, из закона Эпплтона–Хартри получаем для фазового коэффициента преломления (ср. [3]) следующую формулу:

$$n^2 = \frac{\varphi^2 - a^2}{\varphi - a^2}, \tag{4}$$

где $\varphi = 1 + f(y)/\omega^2$, $f(y) = -\omega_0^2 = -4\pi N_e e^2/m < 0$, $a = \omega_T/\omega$, ω_0 – плазменная частота, ω_T – гиромагнитная частота, ω – частота сигнала, N_e – электронная концентрация, e, m – заряд и масса электрона, y – высота.

Здесь мы полагаем, что $0 < \varphi < 1$, $0 < a < 1$.

Можно убедиться, что коэффициент преломления n является монотонно возрастающей функцией φ и ω.

Групповой коэффициент преломления обычно определяется [4, гл. 5, § 5] формулой

$$\hat{n} = n + \omega \frac{\partial n}{\partial \omega}.$$

Если n определяется формулой (4), получаем

$$\hat{n} = \frac{n^2 + \omega^2 \partial n^2/\partial \omega^2}{n} = \frac{a^2(1-\varphi)/(a^2-\varphi)^2 + 1}{n}. \tag{5}$$

ТЕОРЕМА БРАЙТА–ТЬЮВА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим случай Эклса–Лармора, когда магнитного поля нет, т.е. в формуле (5) $a = 0$: следовательно $\hat{n} = n^{-1}$.

Мы увидим, что в этом случае использование группового времени вместо фазового существенно обедняет данные для решения обратной задачи, т.е. задачи определения электронной концентрации как функции высоты.

Действительно, фазовый и групповой путь в этом случае совпадают, поэтому групповое время

$$\hat{T}(p) = \int_0^{Y(p)} \hat{n}\,ds = \int_0^{Y(p)} \hat{n}\frac{dy}{\cos\alpha(y)} = \int_0^{Y(p)} \frac{1}{n}\frac{dy}{\sqrt{1-p^2u^2(y)}} = \int_0^{Y(p)} \frac{dy}{\sqrt{n^2(y)-p^2}} = p^{-1}X(p), \tag{6}$$

где $u(y) = n^{-1}(y)$ – фазовая скорость и по закону Снеллиуса $\sin\alpha(y) = pu(y)$.

Таким образом, вместо двух функций $X(p)$ и $T(p)$ (см.(1)), используемых в [6] для решения обратной лучевой задачи сейсмики, остается только одна из них, а именно $X(p)$. Формула (6) известна как теорема Брайта–Тьюва об эквивалентном пути [4, 7].

Причина более низкой информативности группового времени по сравнению с фазовым не вполне ясна, возможно она связана с асимптотическим характером групповой скорости. Приближенный характер понятия групповой скорости обсуждается, например, в [10–12].

В этой работе принято, что измерено фазовое время, т.е. набег фазы для каждого из множества монохроматических источников. Хорошо понимая, что такое предположение усложняет проведение эксперимента, особенно на высоких частотах, мы допустим, что частоты источников лишь незначительно превышают ту частоту $2 \div 5$ МГц, при которой сигнал отражается от области ионосферы, лежащей непосредственно над волноводом.

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ МЕРЫ ПО СКАЧКУ ТАУ–ФУНКЦИИ

Запишем формулу (4) более подробно

$$n^2 = 1 + \frac{f(y)}{\omega^2}\left(1 + \frac{\omega_T^2}{\omega^2 - \omega_T^2 + f(y)}\right),$$

где $f(y)$ показана на рис. 4.

Тогда формула (3) для скачка тау-функции (2) принимает вид

$$\sigma(\omega) = \frac{1}{\omega}\int\limits_h^H \sqrt{(r-h)\frac{\left(1-\frac{\omega_T^2}{\omega^2}\right)\left(1+\frac{r+h}{\omega^2}\right)+\frac{r}{\omega^2}\frac{h}{\omega^2}}{\left(1-\frac{\omega_T^2}{\omega^2}+\frac{r}{\omega^2}\right)\left(1-\frac{\omega_T^2}{\omega^2}+\frac{h}{\omega^2}\right)}}\,dF(r).$$

Ее можно переписать в виде

$$\omega\sqrt{1-\frac{\omega_T^2}{\omega^2}+\frac{h}{\omega^2}}\,\sigma(\omega) = \int\limits_h^H \sqrt{(r-h)\frac{\left(1-\frac{\omega_T^2}{\omega^2}\right)\left(1+\frac{r+h}{\omega^2}\right)+\frac{r}{\omega^2}\frac{h}{\omega^2}}{1-\frac{\omega_T^2}{\omega^2}+\frac{r}{\omega^2}}}\,dF(r). \qquad (7)$$

В этой статье мы не будем подробно исследовать уравнение (7), которое является уравнением Фредгольма–Стилтьеса первого рода. Решение его относится к числу некорректно поставленных (неустойчивых) задач. Тщательный анализ уравнений такого типа проведен в работе авторов [2]. Там же предложены регулярные методы решения (нахождения $F(r)$). Отметим только, что оно позволяет определить единственным образом функцию меры $F(r)$, $F(h) = 0$, только если гиромагнитная частота $\omega_T \neq 0$. Действительно, если $\omega_T = 0$, то (7) переходит в

$$\omega\sigma(\omega) = \int\limits_h^H \sqrt{(r-h)}\,dF(r),$$

откуда $F(r)$ не определяется. С другой стороны, если $\omega_T \neq 0$, то разлагая подинтегральную функцию (7) в ряд по обратным степеням ω^2, можно последовательно определить из систем с треугольными коэффициентами моменты

$$m_i = \int\limits_h^H r^i\,dF(r),$$

а следовательно, и саму функцию $F(r)$, $F(0) = 0$.

О РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПРИ РАДИОЗОНДИРОВАНИИ ИОНОСФЕРЫ СВЕРХУ

В статье [1] мы уже писали о том, что разработка метода определения электронной концентрации в ионосфере с волноводами важна и при зондировании ионосферы сверху, со спутников. С одной стороны, ситуация в этом случае кажется более благополучной, чем при зондировании снизу; причиной этого является искривление ионосферы, вызванное сферичностью Земли. Учет сферичности, который не нужен и никак не облегчает исследование задачи при зондировании снизу, становится необходим при рассмотрении зондирования сверху, в особенности для высокоорбитальных спутников. Формально лучевая задача для сферически симметричной среды сводится к задаче для некоторой плоско слоистой среды с помощью преобразования уплощения [1, 13]. При этом убывающая с углублением в сферически симметричную атмосферу скорость $v(r)$ в соответствующей плоской задаче может перейти в монотонно возрастающую с глубиной скорость. Оказывается, что это обязательно происходит с фазовой скоростью радиоволны в ионосфере, если ее частота достаточно высока. Таким образом, волноводы исчезают при достаточно высокой частоте зондирования.

Однако с ростом частоты уменьшается чувствительность радиоволны к распределению электронной концентрации по высоте. Поэтому можно повысить чувствительность метода, если уметь определять электронную плотность, содержащую волноводы.

Для решения этой задачи нами была разработана техника, которая существенно отличается от изложенной в этой статье и в [1]. При этом, правда, пришлось ввести ограничение на характер изменения скорости в волноводе – оно состоит в том, что рассматриваются скорости в волноводе с единственным минимумом. Так как в этом случае положение и размер волновода зависит от частоты, то это требование должно выполняться при любой частоте.

Этот подход мы собираемся изложить в отдельной статье. Однако срок осуществления этого намерения зависит от потребности практики радиозондирования ионосферы. Серьезным стимулом могут послужить данные радиозондирования ионосферы со спутников, проведенные на сравнительно низкой частоте, т.е. частоте ниже 30 МГц.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агеев А.Л., Бессонова Э.Н.; Васин В.В., Маркушевич В.М., Савин И.В.* Обратная задача радиозондирования ионосферы при наличии волноводов (долин). Единственность решения // Теоретические проблемы в геофизике. (Вычисл. сейсмология. Вып. 29). М.: Наука, 1997. С.81-99.
2. *Агеев А.Л., Бессонова Э.Н., Васин В.В., Маркушевич В.М., Савин И.В.* Радиозондирование ионосферы на двух частотах. Алгоритмический анализ интегрального уравнения Фредгольма–Стилтьеса // Теоретические проблемы в геофизике. (Вычисл. сейсмология. Вып. 29). М.: Наука, 1997. С.110-118.
3. *Агеев А.Л., Бессонова Э.Н., Васин В.В., Киселев С.Г., Маркушевич В.М.* Обратная задача радиозондирования ионосферы с волноводами. Сдано в журнал "Геомагнетизм и аэрономия".

4. *Kelso J.M.* Radio ray propagation in the ionosphere. N.-Y.: Mc Graw-Hill book company. 1964. 136 p.
5. *Budden K.G.* Radio waves in the ionosphere. Cambridge: Cambridge University Press, 1961. 360 p.
6. *Гервер М.Л., Маркушевич В.М.* Определение по годографу скорости распространения сейсмической волны // Методы и программы для анализа сейсмических наблюдений. (Вычисл. сейсмология. Вып. 3). М.: Наука, 1967. С.3-51.
7. *Митра С.К.* Верхняя атмосфера. М.: Изд-во иностр. лит. 1955. 640 с.
8. *Slichter L.B.* The theory of the interpretation of seismic traveltime curves in horizontal structures // Psysics. 1932. Vol.3. P.273-275.
9. *Потапов О.А. (ред.)* Англо-русский словарь терминов по автоматизированной интерпретации данных сейсморазведки. М.: Недра, 1993. 320 с.
10. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1990. 432 с.
11. *Мандельштам Л.И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. 440 с.
12. *Ахиезер А.И., Ахиезер И.А.* Электромагнетизм и электромагнитные волны. М.: Высш. шк., 1985. 504 с.
13. *Koo B.Y.C., Katzin M.* An exact Earth-flattening procedure in propagation around a sphere // J. Research of Nat. Bureau of Standards. D. Radio propagation. 1960. Vol.64D, N 1. P.61-64.