

УДК 550.348

## СТРАННЫЙ АТТРАКТОР И КЛАСТЕРИЗАЦИЯ ТОЛЧКОВ В ПРУЖИННО-БЛОЧНОЙ МОДЕЛИ С ЗАЛЕЧИВАНИЕМ

В.М. Герцик

*Международный институт теории прогноза землетрясений  
и математической геофизики Российской академии наук*

В двумерной пружинно-блочной модели с прочностью сцепления, растущей с ростом времени неподвижного контакта, наблюдается кластеризация событий в виде форшоков и афтершоков сильных толчков. В одномерной модели из трех блоков с периодическими граничными условиями динамический хаос порождается странным аттрактором.

## STRANGE ATTRACTOR AND EVENT CLUSTERING IN THE STRING-BLOCKS MODEL WITH THE HEALING

V.M. Ghertzik

*International Institute of Earthquake Prediction Theory  
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences*

Two-dimensional string-block model with time-increasing static friction exhibits events clustering as foreshocks and aftershocks of large shocks. Dynamical chaos in a one-dimensional three-block model with periodical boundary conditions is generated by a strange attractor.

## О МОДЕЛИРОВАНИИ СЕЙСМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

Задача моделирования сейсмического процесса преследует несколько целей. Во-первых, найти минимальный набор физических явлений, достаточный для получения модельного потока событий, отражающего характерные особенности природной сейсмичности. Во-вторых, выявить механизмы, ответственные за ее наблюдаемую стохастичность. Наконец, если удовлетворительная модель сконструирована, третьей целью является ее исследование с точки зрения возможности прогноза сильных событий для последующего использования полученных результатов в работе с реальными каталогами землетрясений.

Наиболее перспективным претендентом на роль адекватной модели в последнее десятилетие считается пружинно-блочная модель разлома, продуцирующего землетрясения, предложенная Барриджем и Кноповым [1] в 1967 году. Авторы рассмотрели одномерный вариант модели, а двумерный случай изучался в работе Оцуки [2]. С тех пор, как в работах Бака и Танга [3], а также [4, 5] и Карлсон и Лангера [6, 7] для модификаций этой модели был обнаружен хаотический характер динамики, исследование свойств этих и иных модификаций модели Барриджа-Кнопова ведется в высшей степени интенсивно ([8–20], список далеко не полон).

Практически во всех вариантах модели воспроизводится закон повторяемости "землетрясений" подобный реальному, но дальше этого подобие не идет. Используемые при этом физические свойства сводятся по существу к упругим взаимодействиям между блоками, изображающими малые элементы бортов разлома, и к движению блоков после того, как сила, действующая на них, достигает прочности сцепления. (В модели Карлсон и Лангера [6, 7] учитываются инерционные свойства блоков и трение скольжения, однако это не приводит к существенно иным результатам.)

Важной характеристикой реальных потоков сейсмичности является пространственно-временная кластеризация толчков в виде форшоков и афтершоков сильных землетрясений. В поисках механизма, ответственного за такое группирование, мы ввели в описание модели зависимость прочности сцепления от времени неподвижного контакта, выражающуюся в ее росте со временем до некоторого максимального значения. Оказалось, что это физическое явление, обнаруженное еще Кулоном [21], приводит к появлению кластеризации требуемого типа.

Могут существовать две гипотезы, способные объяснить причину наблюдаемой стохастичности природной сейсмичности. Первая "классическая" гипотеза заключается в том, что вероятностный, по-видимому, характер процесса является просто мерой недостатка информации о меняющейся во времени структуре неоднородной среды. При этом предполагается, что если бы полная информация могла быть получена, то физические модели в принципе способны были бы описать (и предсказывать) детали сейсмического процесса детерминистически. Вторая гипотеза предполагает, что нелинейность законов, управляющих сейсмичностью, приводит к появлению "встроенных" в процесс генераторов стохастичности. Случайный характер оказывается, таким образом, фундаментальным свойством потока землетрясений, и прогноз сильных событий может быть лишь вероятностным.

Динамика рассматриваемой модели согласуется со второй гипотезой. В модели малой размерности (три блока с периодическими граничными условиями) обнаружен динамический хаос, порождаемый движением траектории по странному аттрактору. Это не означает, что странные аттракторы в больших моделях также маломерны. Мы предполагаем, что их корреляционная размерность растет с ростом размерности модели, но это еще подлежит проверке.

Настоящую работу не следует рассматривать как итог систематического изучения модели, которое еще только предстоит проделать. Однако уже первые полученные результаты представляются нам достаточно интересными для того, чтобы быть опубликованными.

## РЕШЕТЧАТАЯ МОДЕЛЬ С ЗАЛЕЧИВАНИЕМ

Модель представляет собой набор блоков, расположенных на прямоугольной области горизонтальной поверхности (которую мы будем называть "полом"). Каждый блок соединен пружинами с ближайшими соседями и с "потолком", т.е. с верхней горизонтальной поверхностью. Пол смещается с постоянной скоростью вдоль одной из горизонтальных осей координат, а каждый блок движется вместе с полом, пока сила, действующая на него со стороны пружин, не достигнет предела прочности сцепления.

Залечиванием здесь мы называем рост прочности сцепления во время неподвижного контакта и будем считать, что прочность сцепления блока с полом линейно растет во времени с единичной скоростью от значения 1, возникающего после остановки блока, до фиксированного верхнего значения  $S$ .

Процесс генерации толчков описывается следующим образом. Когда сила, действующая на блок, достигает прочности сцепления, он начинает движение относительно пола и останавливается, когда сила обращается в ноль. При движении блока меняется натяжение горизонтальных пружин, связывающих его с ближайшими соседями. Если сила на соседнем блоке достигает прочности, этот блок тоже начинает двигаться и так далее. Предполагается, что такие лавинные процессы происходят мгновенно, и вводится правило, описывающее перемещение движущихся блоков друг относительно друга и состоящее в том, что расстояния между движущимися блоками не меняются. Иначе говоря, "в быстром времени" все движущиеся блоки имеют одну и ту же скорость. Приведем формальное описание модели.

Пусть точки прикрепления вертикальных пружин к потолку расположены на целочисленной решетке, т.е. определяются наборами координат  $i, j$ ;  $i = 1, \dots, N_1$ ,  $j = 1, \dots, N_2$ . Предполагается, что основание модели и каждый блок могут смещаться лишь в одном горизонтальном направлении. Обозначим через  $\xi(i, j)$  смещение блока с координатами  $i, j$  относительно потолка. Силу  $f(i, j)$ , действующую на блок, определим формулой

$$f(i, j) = -\xi(i, j) - \sum_{nb} (\xi(i, j) - \xi(i', j')),$$

где  $\sum_{nb}$  – символ суммирования по всем точкам  $(i', j')$ , которые являются ближайшими соседями точки  $(i, j)$ . Коэффициент жесткости всех пружин равен 1.

Алгоритм работы модели задается правилами: (1)

1. Начальные прочности сцепления  $s(i, j)$  таковы, что  $1 \leq s(i, j) \leq S$ , а начальные силы  $f(i, j) < s(i, j)$  при всех  $i, j$ . Переход к п. 2.

2. Прочности сцепления  $s(i, j)$  растут со скоростью 1, если  $s(i, j) < S$ , и не меняются при  $s(i, j) = S$ . Силы растут со скоростью  $v$ , пока абсолютная величина силы  $f(i, j)$  на некотором блоке с координатами  $(i, j)$  не достигнет прочности сцепления, после чего вводится множество  $A$ , состоящее из одной точки  $(i, j)$ . Переход к п. 3.

3. Сдвиг выражается в одинаковом уменьшении всех смещений  $x(i, j)$ ,  $(i, j) \in A$ , до тех пор, пока для некоторой точки  $(i', j')$  из  $A$  сила  $f(i', j')$  не обратится в 0 или, для некоторого  $(i', j')$  из дополнения  $A$ , не достигнет прочности сцепления  $s(i', j')$ . Переход к п. 4.

4. Если точка  $(i', j')$  принадлежит  $A$ , то она изымается из  $A$ , и  $s(i', j') = 1$ . В противном случае  $(i', j')$  включается в  $A$ . Если  $A$  пусто – конец сдвига и переход к п. 1, в противном случае переход к п. 3.

Модель имеет два параметра: внутренний параметр  $S$ , зависящий от "материала" блоков и пола, и внешний параметр  $v$  – скорость относительного смещения "плит". При  $v \rightarrow \infty$  и перенормировке времени  $t' = t/v$  модель превращается в ранее введенную модель [11, 19, 20] с единичной прочностью сцепления.

## СТРАННЫЙ АТТРАКТОР В МОДЕЛИ ИЗ ТРЕХ БЛОКОВ

Для исследования природы динамического хаоса, возникающего в модели, рассмотрим одномерную цепочку из трех блоков с периодическими граничными условиями в случае, когда сила  $f_t$  (индекс указывает на зависимость от времени) на произвольном блоке всегда достигает прочности сцепления  $s_t$  при  $s_t < S$ . Последнее условие выполняется при  $v > 1$ ,  $S > v/(v-1)$ . Первое неравенство очевидно, второе нуждается в доказательстве.

Пусть после сдвига блока  $f_t = f_0$ ,  $s(0) = 1$ . Изменение этих величин во времени между двумя сдвигами подчиняется формулам  $f_t \geq f_0 + v_t$ ,  $s_t = 1 + t$  (неравенство может возникнуть в результате передачи усилия с соседнего блока, претерпевшего сдвиг). Равенство  $f_t = s_t$  достигается в момент  $t \leq (f_t - f_0)/v$ . Максимальная прочность сцепления, достигаемая за время неподвижного контакта, равна  $s_t = 1 + (f_t - f_0)/v = f_t$ , откуда следует, что  $S > f_t = (v - f_0)/(v - 1)$  при всех  $f_0$ , т.е.  $S > v/(v - 1)$ .

Пусть  $f(i), s(i), x(i)$  — сила, прочность сцепления и смещение, соответственно, для блока с координатой  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Периодичность граничных условий означает, что  $\xi(0) = \xi(3), \xi(4) = \xi(1)$ . Легко видеть, что модель инвариантна относительно перестановок координат блоков. Чтобы исключить связанные с этой инвариантностью тривиальные симметрии, пронумеруем координату блоков  $i$  индексами 1, 2, 3 так, что  $f(i_3) \leq f(i_2) \leq f(i_1)$  и введем переменные  $x_1 = f(i_1) - f(i_2)$ ,  $x_2 = f(i_2) - f(i_3)$ ,  $x_3 = s(i_1)$ ,  $x_4 = s(i_2)$ . Точкой  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  фазового пространства  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  будем считать значения переменных в момент окончания сдвига. (Заметим, что в этот момент  $f(i_3) = 0, s(i_3) = 1$ .) Фазовое пространство представляет собой четырехмерную область, определяемую неравенствами

$$0 \leq x_1 \leq x_3 - x_2, \quad 0 \leq x_2 \leq x_4, \quad 1 \leq x_3 \leq v/(v-1), \quad 1 \leq x_4 \leq v/(v-1).$$

Оператор сдвига, определяемый алгоритмом (1), задает в фазовом пространстве кусочно-линейное отображение  $\mathbf{x}' = T(\mathbf{x})$ . Для того, чтобы в модели мог возникать динамический хаос, порождаемый движением траектории по странному аттрактору, отображение  $T$  должно быть диссипативным ([22]), т.е.  $|\det T| < 1$ . Вычисленный с помощью алгоритма (1) (элементарные, но громоздкие расчеты мы опускаем) определитель имеет вид

$$\det T = v/3(v-1)^2$$

в области, где в сдвиг вовлекается лишь один блок, задаваемой неравенствами

$$\begin{aligned} x_1 &> 3(v-1)(x_3-1)/2(3v-1), \\ v(x_3-3x_1) &< x-2 < [3(v-1) + (3-v)x-3]/2 - x-1. \end{aligned}$$

Можно показать, что эта область не пуста. Вне ее сдвиг захватывает 2 или 3 блока, в результате чего отображение  $T$  присваивает одному ( $x_3$ ) или двум ( $x_3, x_4$ ) пределам прочности не зависящие от  $\mathbf{x}$  значения, равные 1, поэтому в определителе появляются, соответственно, одна или две нулевые строки, и  $\det T = 0$ . Отсюда видно, что при  $v > (7 + 13^{1/2})/6$  отображение  $T$  обеспечивает глобальное сжатие фазового объема.

Поверхность  $x_2 = v(x_3 - 3x_1)$  обладает тем свойством, что отображение  $T$  делает конечным расстояние между двумя сколь угодно близкими точками, расположенными по разные стороны от нее. Таким же свойством обладают и другие поверхности, разделяющие области, в которых кусочно-линейное отображение  $T$  имеет разный вид, т.е. области, в которых различны число или порядок элементарных подвижек одиночных блоков, образующих сдвиг. Это обеспечивает локальную неустойчивость, которая в сочетании с глобальным сжатием дает основание ожидать появления в модели странного аттрактора.

Компьютерный эксперимент обнаруживает странный аттрактор во всей указанной области изменения параметра  $v$ . На рис. 1, *a* в логарифмических координатах представлено отображение Пуанкаре при  $x_3 = x_4 = 0$  отрезка траектории на аттракторе ( $3 \times 10^4$  итераций) при  $v = 4$ , имеющее характерную "ритмическую" структуру. Траектория содержит последовательные серии сдвигов, состоящих из 3-х и 4-х элементарных подвижек (в последнем случае один из блоков смещается дважды в ходе одного сдвига), разделенные изолированными сдвигами одного блока. Рис. 1, *б, в* дают представление о мелкомасштабной фрактальной структуре аттрактора.

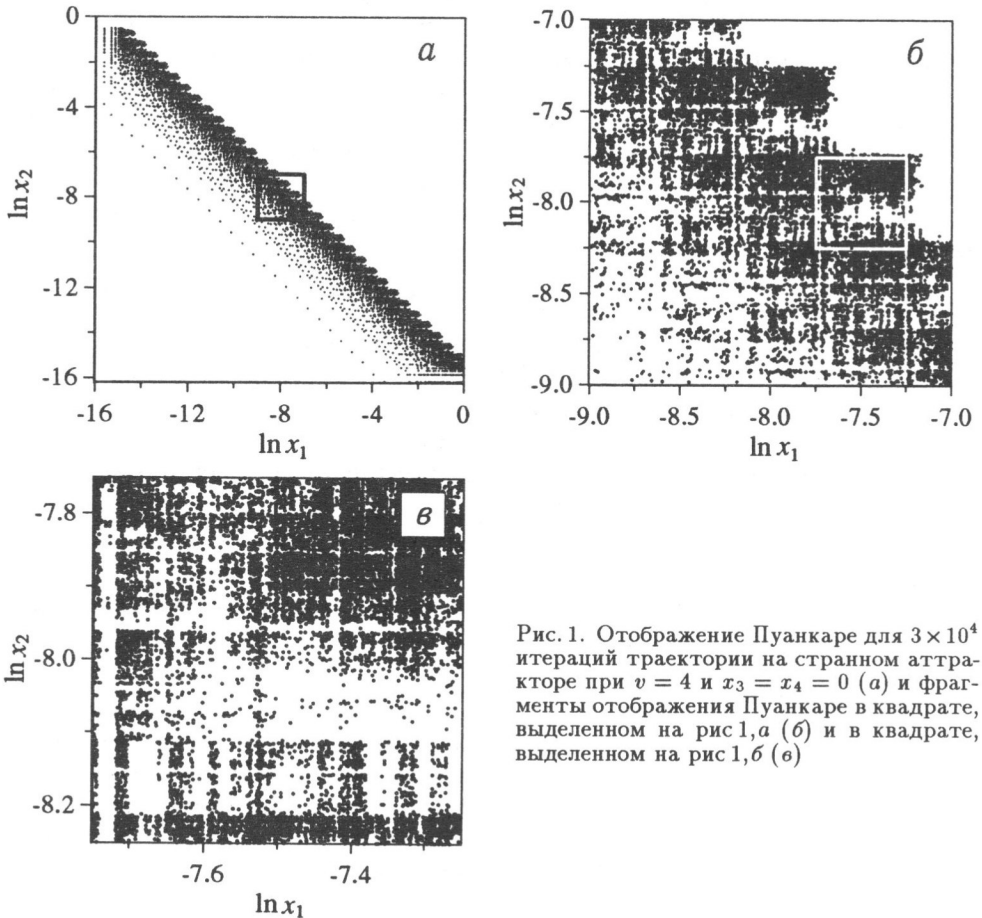


Рис. 1. Отображение Пуанкаре для  $3 \times 10^4$  итераций траектории на странном аттракторе при  $v = 4$  и  $x_3 = x_4 = 0$  (*a*) и фрагменты отображения Пуанкаре в квадрате, выделенном на рис 1, *a* (*б*) и в квадрате, выделенном на рис 1, *б* (*в*)

Корреляционная размерность  $D_2$  аттрактора в  $d$ -мерном фазовом пространстве определяется как

$$D_2 = \lim_{l \rightarrow 0} \ln C(l) / \ln l,$$

где

$$C(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N^2) \sum_{i,j=1}^{M(l)} \Theta(l - |x_i - x_j|)$$

– корреляционный интеграл,  $x_i (i = 1, \dots, N)$  – точки на аттракторе, получаемые последовательными итерациями,  $M(l)$  – число  $d$ -мерных кубов со стороной  $l$ , составляющих минимальное покрытие этих точек,  $\Theta$  – функция Хевисайда. Корреляционная размерность характеризует самоподобную структуру аттрактора и является нижней оценкой его фрактальной размерности (емкости)

$$D_0 = - \lim_{l \rightarrow 0} \ln M(l) / \ln l.$$

В случае  $v = 4$  размерность  $D_2 = 1.54$  (рис. 2).

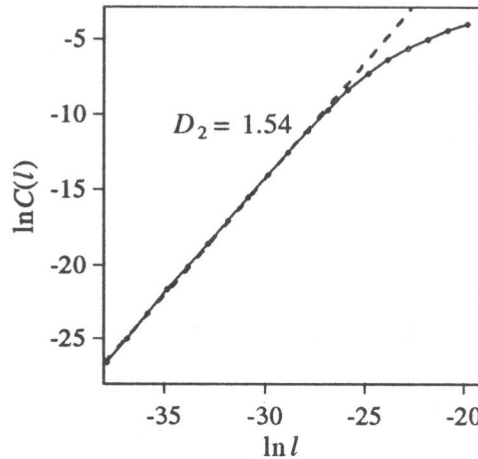


Рис. 2. Вычисление корреляционной размерности аттрактора ( $v = 4$ )

Критерием стохастичности аттрактора служит максимальный показатель Ляпунова, характеризующий поведение близких в начальный момент траекторий. Если он положителен, то расстояние между траекториями экспоненциально растет со временем, что является показателем неустойчивости и динамического хаоса. Показатели Ляпунова  $\lambda_k (k = 1, \dots, d)$  определяются как

$$\lambda_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln L_{k,N} / N,$$

где  $L_{k,N}$  – собственные значения  $\prod_{n=0}^{N-1} J(\mathbf{x}_n)$ ,  $J(\mathbf{x}) = (\partial T_i / \partial x_j)$  – якобиан отображения  $\mathbf{x}_{n+1} = T(\mathbf{x}_n)$ .

Для  $v = 4$  численные расчеты дают  $\lambda_1 = 0.3059$ ,  $\lambda_2 = -0.2961$ ,  $\lambda_3 = \lambda_4 = -\infty$ .

На рис. 3, *a* приведено отображение Пуанкаре при  $x_3 = x_4 = 0$  отрезка траектории при  $v = 100$ . На первый взгляд это типичный предельный цикл, состоящий из конечного числа точек. Однако увеличение масштаба показывает, что каждая "точка" представляет собой подмножество странного аттрактора и обладает фрактальной структурой с внутренними симметриями. На рис. 3, *б, в, г* демонстрируются следы разных участков траектории внутри "точки", выделенной квадратом на рис. 3, *a*.

При  $v \rightarrow \infty$  с перенормировкой времени  $t' = t/v$  модель превращается в упомянутую выше модель с единичной прочностью сцепления, фазовое пространство которой двумерно, а  $|\det T|$  всюду равен 1. Странный аттрактор при этом вырождается в периодическое движение, и в модели появляется хаос гамильтоновского типа, рассмотренный в работе [11].

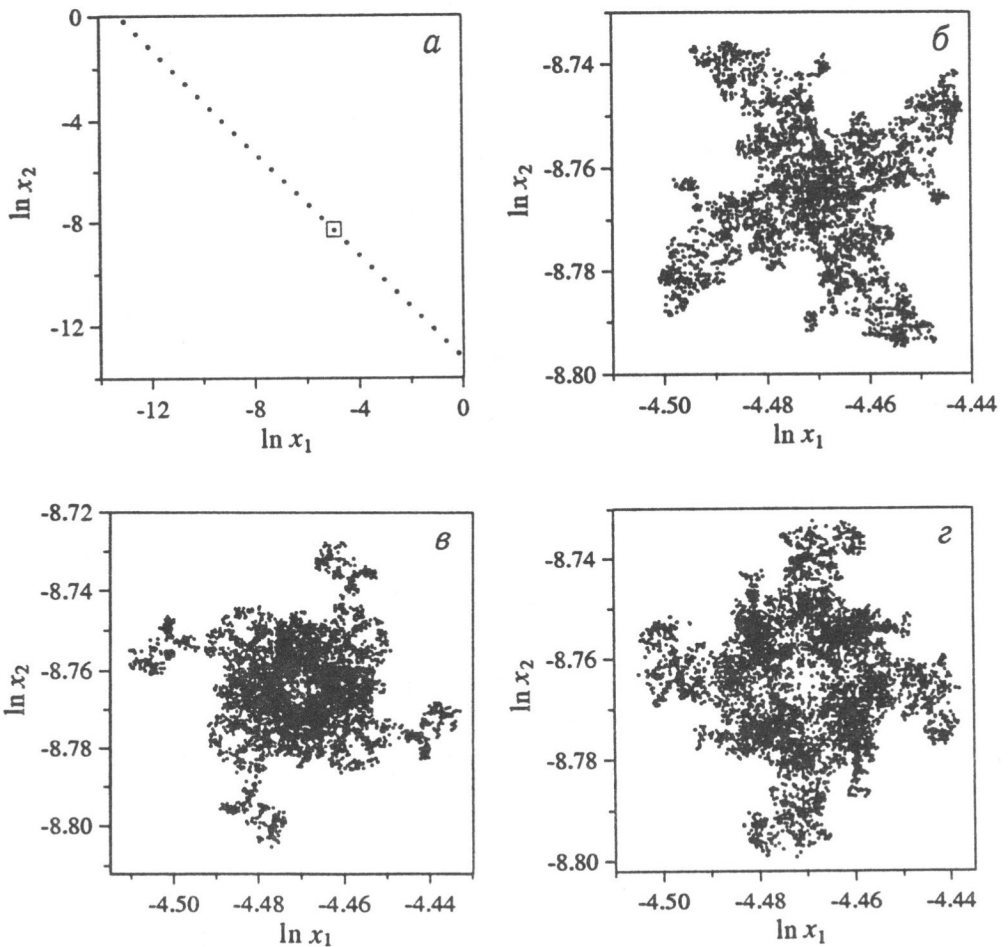


Рис. 3. Отображение Пуанкаре для траектории на странном аттракторе при  $v = 100$  и  $x_3 = x_4 = 0$  (*a*) и следы разных временных участков траектории внутри "точки", выделенной квадратом на рис. 3, *a* (*б - г*)

## МНОГОКОМПОНЕНТНАЯ МОДЕЛЬ

Приведем некоторые результаты исследования модельных каталогов, полученных для двумерных квадратных моделей, состоящих из  $50 \times 50$  блоков.

Граничные условия, были выбраны следующим образом: приграничные блоки связаны пружинами с внешними блоками, жестко скрепленными с нижней, движущейся пластиной. Такие граничные условия можно назвать "закрытыми" в противоположность "открытым" (см. [16]) граничным условиям, при которых внешние блоки жестко связаны с неподвижной верхней пластиной. Свободные граничные условия, когда внешние блоки отсутствуют, не слишком естественны, так как реальный разлом может им соответствовать лишь на верхней границе, при условии, что она выходит на поверхность Земли.

Использование открытых граничных условий приводит к тому, что подавляюще большая доля сдвигов начинается с приграничных блоков, поскольку силы на них растут быстрее, чем на внутренних блоках, и края модели служат как бы "линеаментами". Закрытые граничные условия делают все блоки модели равноправными с точки зрения начала сдвига.

На рис. 4 изображены численные логарифмические плотности полученных из модельных каталогов распределений  $P$  величины  $m = \lg M$ , где  $M$  – сейсмический момент, равный суммарному смещению блоков во время сдвига для случаев  $v = 4, S = 1.5$  и  $v = 0.905, S = 1.65$ . В первом случае численные данные хорошо аппроксимируются гамма-распределением  $P \sim m^{-\alpha} e^{-\beta m}$ , а во втором – распределением Гутенберга–Рихтера. По-видимому, показатели гамма-распределения возрастают с увеличением скорости  $v$ . При  $v < 1$  распределение меняет характер и становится похожим на закон Гутенберга–Рихтера,  $\lg P = a - \gamma m$ , в данном случае с показателем  $\gamma = 0.59$ , близким к наблюдаемому в реальных каталогах.

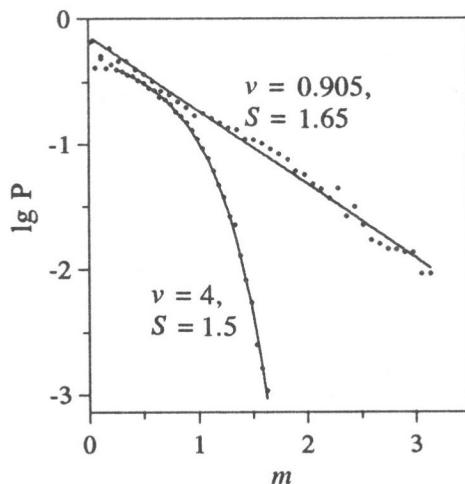


Рис. 4. Логарифмические плотности распределений  $P$  величины  $m = \lg M$

Точки – численные значения логарифмических плотностей. Сплошная линия в случае  $v = 4, S = 1.5$  представляет собой логарифм гамма-распределения  $\gamma(P) \sim m^{-\alpha} e^{-\beta m}$ ,  $\alpha = 0.018, \beta = 0.013$ ; в случае  $v = 0.905, S = 1.65$  – распределение Гутенберга–Рихтера  $\lg P = a - \gamma m$  с показателем  $\gamma = 0.59$

Чтобы охарактеризовать кластеризацию событий вокруг сильного толчка, мы использовали метод, рассмотренный в работе [20]: пусть в момент  $t_0$  произошло сильное землетрясение с "магнитудой"  $m_0 \geq m^*$  (в качестве магнитуды используется  $\lg M$ ). Отрезок  $(t_0, t_0 + T)$  разбивается на  $N$  интервалов, так чтобы первый из них был вдвое короче остальных. Более точно: пусть  $\Delta = T/(N - 1/2)$ .



Положим  $\tau_0 = t_0$  и введем соответствующий  $\tau_0$  интервал  $(t_0, t_0 + \Delta/2)$ . Моментам  $\tau_k = t_0 + k\Delta$  ( $k = 1, \dots, N-1$ ) поставим в соответствие интервалы  $(\tau_k - \Delta/2, \tau_k + \Delta/2)$ . Построим функцию  $d^+(\tau_k)$  ( $k = 0, \dots, N-1$ ), которая равна отношению числа толчков в интервале, соответствующем моменту  $\tau_k$ , к длине интервала, нормированному на число  $d$  толчков в единицу времени для всего каталога

$$d^+(\tau_k) = n_k N / (Td).$$

После замены переменной  $t_k = \tau_k - t_0$  проводится усреднение полученных функций  $d^+(t_k)$  по всем  $t_0$ , соответствующим встречающимся в каталоге сильным толчкам, за исключением тех, для которых в интервал  $(t_0, t_0 + T)$  попадают толчки  $m \geq m_0$ . Результирующая функция  $D(t_k; m^*, T, N)$  представляет собой зависящее от времени  $t_k$  условное математическое ожидание нормированной плотности числа толчков, при условии, что в момент  $t_0 = 0$  произошло сильное землетрясение, и все землетрясения в интервале  $(t_0, t_0 + T)$  имеют меньшую магнитуду.

Аналогичным образом строятся функции  $d^-(\tau_k)$ ,  $\tau_k = t_0 - k\Delta$  для интервалов  $(t_0 - T, t_0)$  и функция  $D(t_k; m^*, T, N)$  доопределяется в точках  $t_{-k} = -k\Delta$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ . Наряду с графиком повторяемости функции  $D(t_k; m^*, T, N)$  являются интегральными характеристиками каталогов и могут служить для более детального их сравнения.

На рис. 5 изображена функция  $D(t_k; 0.85m_{\max}, T(0.85m_{\max}), 25)$  для случая  $v = 0.905$ ,  $S = 1.65$ , где  $m_{\max}$  – максимальная магнитуда в каталоге,  $T(m^*)$  – среднее время между событиями  $m_0 \geq m^*$ , время нормировано на  $T(0.85m_{\max})$ . Хорошо видна кластеризация толчков вокруг основного события в виде "форшоков" и "афтершоков", причем интегральное число афтершоков значительно превосходит интегральное число форшоков и плотность афтершоков медленно падает со временем. Качественно такая картина соответствует наблюдаемой на материале реальных землетрясений. На рис. 6 кластеризацию модельных землетрясений можно наблюдать непосредственно.

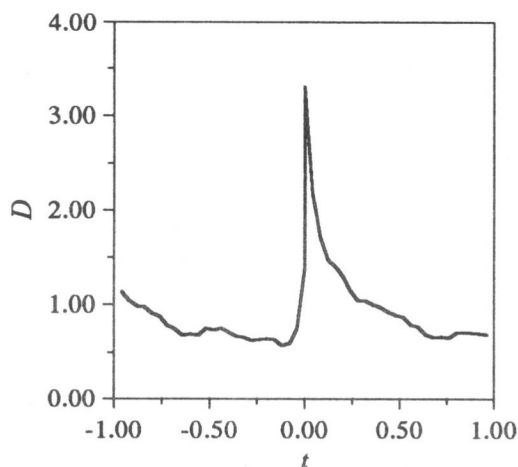


Рис. 5. Функция  $D(t_k; 0.85m_{\max}, T(0.85m_{\max}), 25)$  для случая  $v = 0.905$ ,  $S = 1.65$

При  $\nu \geq 1$  кластеризация толчков вокруг сильных событий в модели не обнаруживается.

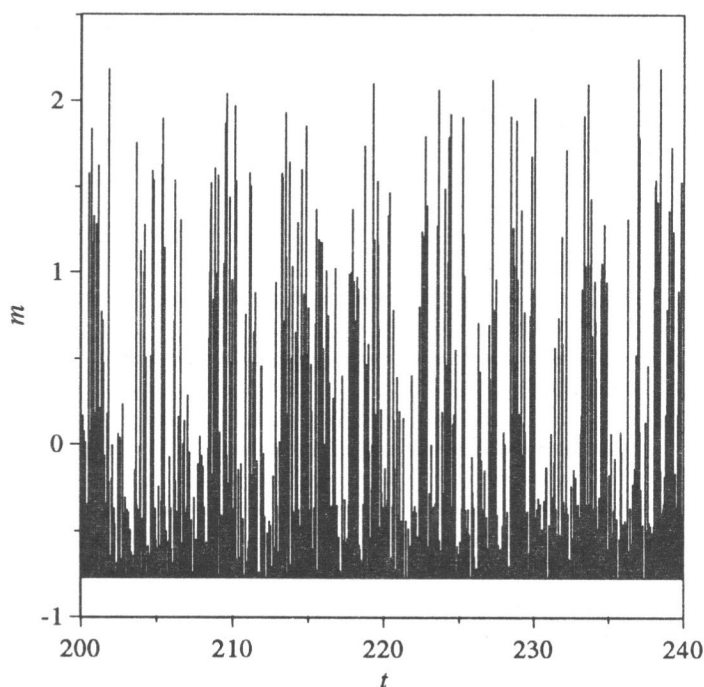


Рис. 6. Кластеризация модельных землетрясений

Работа выполнена в рамках проекта МНТЦ 96415.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Burridge R., Knopoff L.* Model and theoretical seismicity // *Bull. Seismol. Soc. Amer.* 1967. Vol.57. P.341-371.
2. *Otsuka M.* A Simulation of earthquake occurrence // *Phys. Earth and Planet. Inter.* 1972. Vol.6. P.311-315.
3. *Bak P., Tang C.* Earthquakes as a self-organized critical phenomenon // *J. Geophys. Res.* 1989. Vol.94. P.15635-15637.
4. *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* Self-organized criticality: an explanation of  $1/f$  noise // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol.59. P.381.
5. *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* Self-organized criticality // *Phys. Rev. A.* 1988. Vol.38. P.364.
6. *Carlson J.M., Langer J.S.* Properties of earthquakes generated by fault dynamics // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol.62. P.2632-2635.
7. *Carlson J.M., Langer J.S.* A mechanical model of an earthquake fault // *Phys. Rev. A.* 1989. Vol.40. P.6470-6484.
8. *Brown S.R., Scholtz C.H., Rundle J.B.* A simplified spring-block model of earthquakes // *Geophys. Res. Lett.* 1991. Vol. 18. P.215-218.

9. *Christensen K., Olami Z.* Variation of the Gutenberg-Richter b values and nontrivial temporal correlations in a spring-block model for earthquakes // *J. Geophys. Res.* 1992. Vol.97. P.8729-8735.
10. *Feder H.J.S., Feder J.* Self-organized criticality in a stick-slip process // *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol.66. P.2669-2672.
11. *Gabrielov A., Newman W.I., Knopoff L.* Lattice model of failure: Sensitivity to the local dynamics // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol.50. P.188-197.
12. *Hertz A.V.M., Hopfield J.J.* Earthquake cycles and neural reverberations: collective oscillations in systems with pulse-coupled threshold elements // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol.75. P.1222-1225.
13. *Ito K., Matsuzaki M.* Earthquakes as a self-organized critical phenomena // *J. Geophys. Res.* 1990. Vol.95. P.6853-6860.
14. *Nakanishi H.* Cellular-automaton model of earthquakes with deterministic dynamics // *Phys. Rev. A.* 1990. Vol.41. P.7086-7089.
15. *Nakanishi H.* Statistical properties of the cellular-automaton model for earthquakes // *Phys. Rev. A.* 1991. Vol.43. P.6613-6621.
16. *Olami Z., Feder H.J.S., Christensen K.* Self-organized criticality in a continuous, non-conservative cellular automaton modelling earthquakes // *Phys. Rev. Lett.* 1992. Vol.68. P.1244-1247.
17. *Olami Z., Christensen K.* Temporal correlations, universality, and multifractality in a spring-block model of earthquakes // *Phys. Rev. A.* 1992. Vol.46. P.1720-1723.
18. *Rundle J.B., Brown S.R.* Origin of the rate dependence in frictional sliding // *J. Stat. Phys.* 1991. Vol.65. P.403-412.
19. *Герцик В.М.* Форшоки и афтершоки в слоистой модели Барриджа-Кнопва // Математическое моделирование сеймотектонических процессов в литосфере, ориентированное на проблему прогноза землетрясений. Вып.1 М.: МИТП РАН. 1993. С.20-23.
20. *Герцик В.М.* Делокализация, форшоки и афтершоки в модифицированной модели Барриджа-Кнопва // Теоретические проблемы геодинамики и сейсмологии. (Вычисл. сейсмология. Вып. 27). М.: Наука. 1994. С.127-136.
21. *Coulomb.* Theorie des machines simples // *Mem. Noir. Math. et Phys.* 1985. Vol.10. P.161.
22. *Шустер Г.* Детерминированный хаос: Введение. М.: Мир. 1988. 240 с.