

УДК 550.311

СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН МИГРАЦИИ РАСПЛАВА В СЖИМАЕМОЙ СРЕДЕ ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТИ

Г.И. Ходаковский, В.П. Трубицын

*Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук, Москва*

М. Рабинович

*Группа исследований в космической геодезии,
Национальный центр научных исследований/
Национальный центр космических исследований, Тулуза, Франция*

Проводится численный и аналитический анализ свойств обобщенных уединенных волн миграции расплава в сжимаемой пористой среде при сильно нелинейной зависимости вязкости среды от концентрации расплава (совпадающей с пористостью в случае, когда все поры заполнены расплавом). Рассчитаны распределения концентрации расплава при переменной вязкости среды в зависимости от времени для различных начальных условий (для начального распределения концентрации расплава в виде гауссовой кривой, ступенчатой функции и постоянной). Результаты расчетов объясняют процесс зарождения и эволюции волн всплывающего расплава. На основе анализа двух первых интегралов уравнения компактизации и численных расчетов показано, что для реальных сред с сильно нелинейной зависимостью вязкости от пористости, появляется новый тип нелинейных волн с высокой амплитудой, повышающий эффективность миграции расплава.

PROPERTIES OF GENERALIZED SOLITARY MELT WAVES IN A COMPRESSIBLE MEDIUM OF VARIABLE VISCOSITY

G.I. Khodakovskii and V.P. Trubitsyn

*International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences*

M. Rabinowicz

Groupe de Recherche en Geodesie Spatiale CNRS/CNES, Toulouse, France

We study properties of generalized solitary melt waves in a compressible porous medium where viscosity is a strongly nonlinear function of melt concentration. The study involves numerical analysis and analytical methods. Time and space distributions of melt concentration are calculated assuming variable viscosity and several initial conditions (the initial melt concentration taken as a Gaussian curve, a piecewise constant function, or a constant). Numerical

results explain the initiation and evolution of waves in buoyant melt. We analyze numerical solutions and two first integrals of the compaction equation and conclude that nonlinear waves of a new kind emerge in real media where viscosity is a strongly nonlinear function of melt concentration. These waves have high amplitudes and add vigor to melt migration.

ВВЕДЕНИЕ

При подъеме вещества давление понижается и на глубинах порядка 80 км начинается плавление легкоплавких компонентов. Если их концентрация не очень мала, то в поднимающемся веществе образуется сетка связанных каналов, по которым расплав мигрирует вверх, а нерасплавленная матрица втекает вниз. При определенных условиях режим монотонного всплывания сменяется на волновой, при котором образуется бегущая волна расплава. Движение расплава и матрицы описывается в рамках двухскоростной модели компакции в работах [1,2], краткое изложение модели компакции и возникновения волнового режима миграции расплава для случая постоянной вязкости дано также в [3].

Попытка учета влияния изменения вязкости при миграции расплава предпринималась в работе [4] на упрощенной модели (обратно пропорциональной зависимости вязкости от количества расплава), авторами был сделан вывод – вязкость практически не влияет на движение расплава. Однако, как известно, при увеличении количества расплава в породе вязкость может изменяться на 20 порядков (от величины порядка 10^{22} Па с для породы без расплава до 100 Па с для полностью расплавленных базальтов). В экспериментальной работе [5] измерена вязкость частично расплавленных пород и обнаружено падение вязкости на несколько порядков в интервале 5-6% содержания расплава. Поэтому модель в работе [4] оказалась слишком упрощенной, а вывод авторов о несущественной роли переменной вязкости требовал пересмотра. В работе [6] проведены первые численные расчеты уравнений компакции с резко нелинейной зависимостью вязкости от содержания расплава и показано, что в этом случае сильно изменяется процесс миграции и появляются нелинейные волны нового типа.

В настоящей работе анализируются особенности волнового режима движения расплава для случая, когда вязкость матрицы нелинейно зависит от концентрации расплава. Приводится аналитическое объяснение появления нового волнового решения, обнаруженного в численных экспериментах для переменной вязкости.

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Безразмерная система уравнений. Общая постановка задачи компакции приведена, например, в [3]. В настоящей работе рассматривается одномерная модель миграции расплава с вязкостью матрицы, нелинейно зависящей от количества расплава. Если положить, что неизвестные функции зависят только от одной координаты z , то система уравнений, описывающая задачу компакции с переменной вязкостью, запишется следующим образом [7] (см. также [3]):

$$\partial f / \partial t - \partial [\eta(1/f_0 - f)W] / \partial t = 0, \quad (1.1)$$

$$\partial [\eta \partial W / \partial z] / \partial z - W/k = (1 - f_0 f) / (1 - f_0), \quad (1.2)$$

где f – пористость или объемная концентрация расплава, W – скорость течения вязкой матрицы, $k(f)$ и $\eta(f)$ – безразмерные проницаемость и вязкость матрицы, соответственно. При введении безразмерных переменных для скорости и длины были взяты следующие величины:

$$W_0 = k_0/\mu(1 - f_0)\delta\rho g, \quad L^2 = \eta_0 k_0/\mu. \quad (1.3)$$

В (1.3) $\delta\rho$ – разности плотностей расплава и матрицы, μ – вязкость расплава, η_0 – вязкость сухой (в отсутствие расплава) матрицы, а g – ускорение силы тяжести. При этом возникает проблема выбора характерного значения k_0 для проницаемости. Выбрать значение k_0 для такой матрицы невозможно, поскольку проницаемость сухой матрицы равна нулю. Напомним, что мы рассматриваем случай миграции расплава, когда пористость матрицы тождественно совпадает с объемной концентрацией расплава, поскольку пористость возникает при плавлении легкоплавких компонент среды. С другой стороны, в качестве k_0 нельзя взять значение проницаемости и для полностью расплавленной среды равное единице, так как при этом обратится в ноль характерная скорость матрицы W_0 . Таким образом, для введения безразмерных переменных нам необходимо в качестве единицы измерения для проницаемости k_0 (или пористости f_0 , однозначно связанной с проницаемостью известным соотношением) взять некоторое промежуточное ее значение между сухой и полностью расплавленной породами.

При решении задачи компакции возможно получить два типа эволюции начального возмущения (см., напр., [3]). При узком пике начального возмущения оно распространяется вверх и расплывается в нижнюю сторону. При достаточно широком пике возмущения оно всегда последовательно распадается на уединенные волны всплывающего расплава с растущей во времени амплитудой [8], причем длина образующейся волны определяется амплитудой начального возмущения. Поэтому условием распада начального возмущения фиксированной амплитуды является значительное (более чем в 2 раза) превышение его ширины над характерной длиной волны, которая может возникнуть при данной фиксированной амплитуде начального возмущения. Новые волны генерируются на верхнем склоне начального возмущения, что показано в работах [6,9] для начального распределения в виде ступеньки.

В настоящей статье показано, что для модели, в которой вязкость резко падает при достижении пористостью некоторого критического значения, существуют два режима волновой миграции. В связи с этим естественно выбрать в качестве f_0 критическое значение пористости, в окрестности которого происходит скачок вязкости. Это значение входит в число определяющих параметров задачи [10], и такая единица измерения приобретает физический смысл.

Зависимость проницаемости и вязкости от пористости. Проницаемость матрицы при значительном (свыше 3%) содержании расплава описывается кубической зависимостью от пористости (см., напр., [11])

$$k(f) = Af^3, \quad (1.4)$$

где A – константа, зависящая от геометрии твердой матрицы.

Рассмотрим ситуацию, когда в породе содержится достаточно много расплава и поэтому необходимо учитывать изменения вязкости матрицы. Исследование зависимости вязкости от пористости не является классической проблемой, как это имеет место для проницаемости; обычно рассматривают зависимость вязкости только от температуры и давления. Но в выбранную нами динамическую модель температура не входит, а давление является функцией только пористости. Поэтому, если мы хотим учесть изменения вязкости, формально нам остается предположить ее зависимость от пористости. Впервые изменение вязкости в зависимости от пористости было рассмотрено в [4], при этом была принята простейшая модель

$$\eta = 1/f. \quad (1.5)$$

Оказалось, что для зависимости (1.5) решение с переменной вязкостью практически совпадает со случаем для постоянной вязкости. Отсюда авторы сделали вывод – переменная вязкость не приводит к качественному изменению решения. Этот результат для модели вида (1.5) согласуется с проведенным в настоящей статье аналитическим исследованием фазовых портретов уравнения, описывающего задачу компакции. В разд. 3 будет показано, что фазовые портреты для задачи с постоянной вязкостью и с вязкостью, изменяющейся по закону (1.5), совпадают.

Однако модель вида (1.5) является слишком упрощенной и плохо описывает реальные породы. Кроме того, зависимость (1.5) предполагает сильные изменения вязкости в окрестности $f = 0$, что трудно объяснимо с физической точки зрения.

Согласно [12], частично расплавленная верхняя мантия под срединно-океаническими хребтами, содержащая значительное количество магматической жидкости (5–10%), имеет пониженную на несколько порядков вязкость, поэтому вязкость должна резко падать при некотором критическом значении пористости. В работе [6] была предложена следующая безразмерная зависимость для вязкости:

$$\eta = (1/\pi)(\pi/2 - \text{arctg}(q(f - f_c))). \quad (1.6)$$

Физический смысл критического значения пористости f_c может состоять в том, что при его достижении зерна твердой матрицы оказываются со всех сторон смоченными жидкостью. При этом вязкость может упасть на 2–3 порядка по величине при увеличении пористости на доли процента. Зависимость типа (1.6) была затем подтверждена лабораторными экспериментами [5], обнаружившими подобный скачок вязкости при пористости порядка 5–6%. Мы приняли $f_c = 0.06$ во всех расчетах. Величина параметра q характеризует скорость изменения вязкости в окрестности $f = f_c$. Например, при $q = 50$ вязкость меняется на порядок при изменении пористости на 0.5% от критического значения.

В настоящей работе приводятся результаты численных расчетов эволюции миграции расплава для модели при проницаемости, изменяющейся по кубическому закону (1.4), и вязкости, зависящей от пористости по арктангенциальному закону (1.6). Затем проводится анализ волнового режима миграции расплава.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Использованный метод численного решения системы уравнений (1.1)–(1.2) для пористости $f(t, z)$ и скорости матрицы $W(t, z)$ описан в работе [13]. Были рассмотрены три модели с различными начальными распределениями пористости. Во

всех моделях верхняя и нижняя границы свободные, т.е. на них выполнялись условия равенства нулю вязких напряжений в матрице $\partial W/\partial z = 0$. В уравнении (1.2) для пористости требуется лишь одно граничное условие. Во всех моделях значение пористости на нижней границе фиксировалось, оставаясь равным начальному.

Результаты расчетов эволюции начального распределения пористости и скорости матрицы приведены на рис. 1–4. В качестве единицы измерения для пористости принято значение $f_0 = 10\%$. В (1.6) параметр $f_c = 0.6$ (что в размерных переменных дает $f_c = 6\%$). Параметр q менялся от 50 до 300.

На рис. 1 представлена рассчитанная эволюция начального распределения, взятого в виде суммы константы и функции Гаусса, при $q = 300$. При этом распределении максимальное значение начальной безразмерной пористости равно 0.7 и пористость в двух точках пересекает прямую $f = f_c = 0.6$, соответствующую критической пористости, где происходит скачок вязкости. На границах пористость равна 0.5, что меньше критического значения. Как видно из рис. 1, начальное распределение пористости (и, соответственно, скорости матрицы на следующем шаге по времени) с одним гауссовым пиком сначала трансформируется в распределение с несколькими узкими пиками, амплитуда которых со временем растет, а ширина, соответственно, уменьшается. Отметим, что по сравнению со случаем постоянной вязкости, эффект локализации расплава для переменной вязкости выражен в значительно большей степени. Ширина пиков распределения пористости $f(z)$ оказывается на порядок меньше длины уединенных волн пористости при постоянной вязкости. Со временем весь поднимающийся расплав перетекает в передовой пик, а задние пики уменьшаются и исчезают.

На рис. 2 представлена эволюция начального распределения, взятого в виде ступеньки с гауссовым склоном. Параметр q , характеризующий скачок вязкости, принят равным 50. Как видно из рис. 2, и в этом случае начальное распределение пористости (и, соответственно, скорости матрицы) трансформируется в распределение с системой пиков. В отличие от модели, представленной на рис. 1, число пиков постоянно растет со временем. Это обусловлено тем, что расплав с концентрацией, превышающей критическое значение, может неограниченно поступать снизу.

На рис. 3 представлена эволюция начального распределения с гауссовым склоном, аналогичного рис. 2, но для скачка вязкости с параметром $q = 300$. Из сравнения рис. 2 и 3 видно, что амплитуда и длина формирующихся волн пористости зависят от величины параметра q , т.е. от скорости изменения вязкости в области скачка. Отметим, что для случая постоянной вязкости амплитуда и длина возникающих волн зависела только от начального распределения, т.е. большую конечную концентрацию расплава можно было бы получить только при большом начальном возмущении (см., напр., [3]).

На рис. 4 представлены результаты расчета эволюции начального однородного распределения с постоянной пористостью $f(z, t = 0) = const = 0.7$, превышающей критическое значение $f_c = 6\%$. Кроме распределений пористости и скорости матрицы, приведены также распределения вязкости. Напомним, что при постоянной вязкости, несмотря на переменную проницаемость, волны пористости возникают только при наличии областей с инверсией распределения пористости. Поэтому для рассматриваемого случая постоянной начальной пористости в модели с постоянной вязкостью расплав монотонно поднимался бы вверх без какого-либо перераспределения пористости.

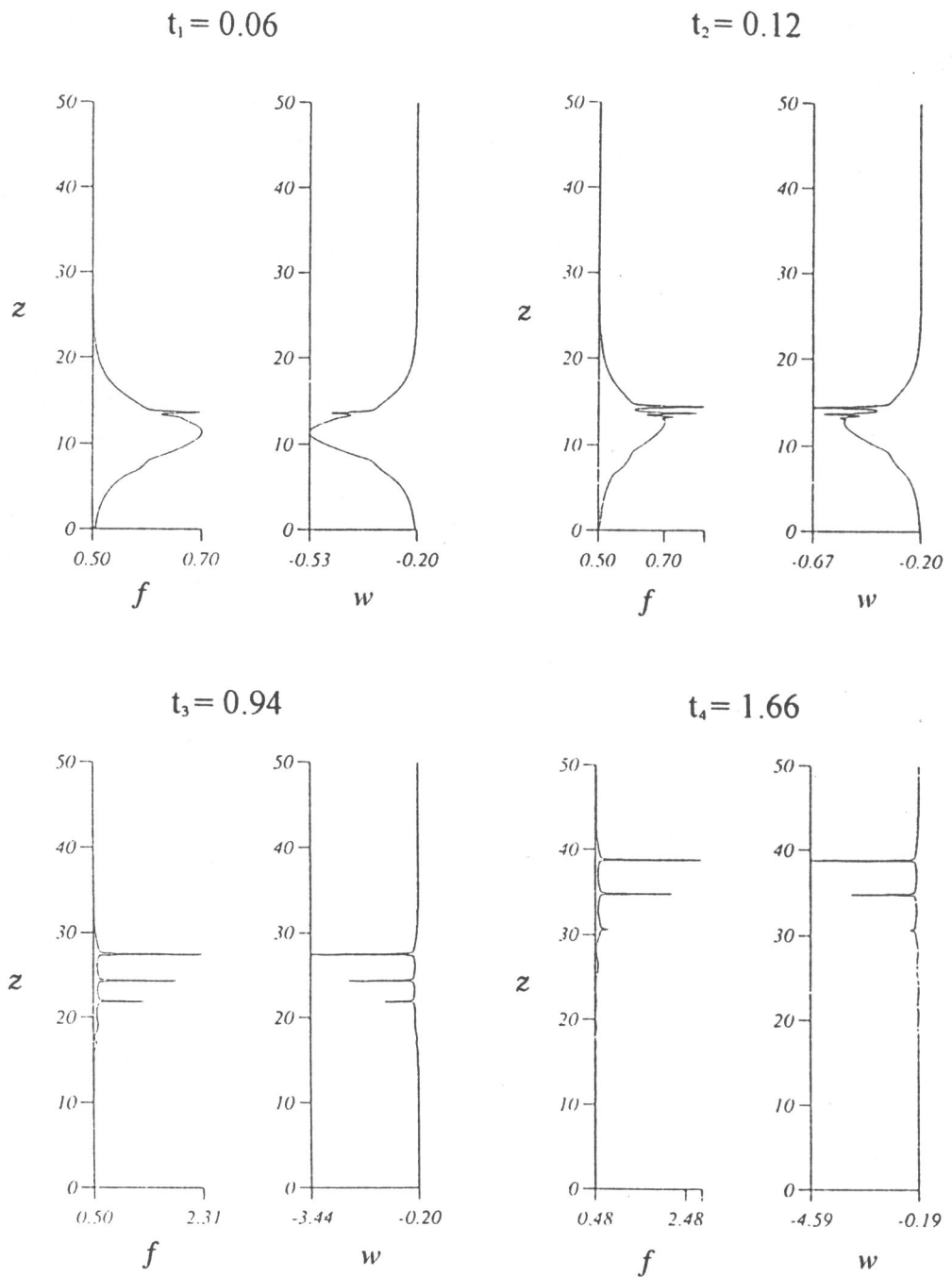


Рис. 1. Эволюция пористости $f(z, t)$ и скорости матрицы $W(z, t)$ при переменной вязкости для начального возмущения в виде гауссовой кривой, пересекающей критическое значение пористости в 6% при $q = 300$ для 4-х значений безразмерного времени

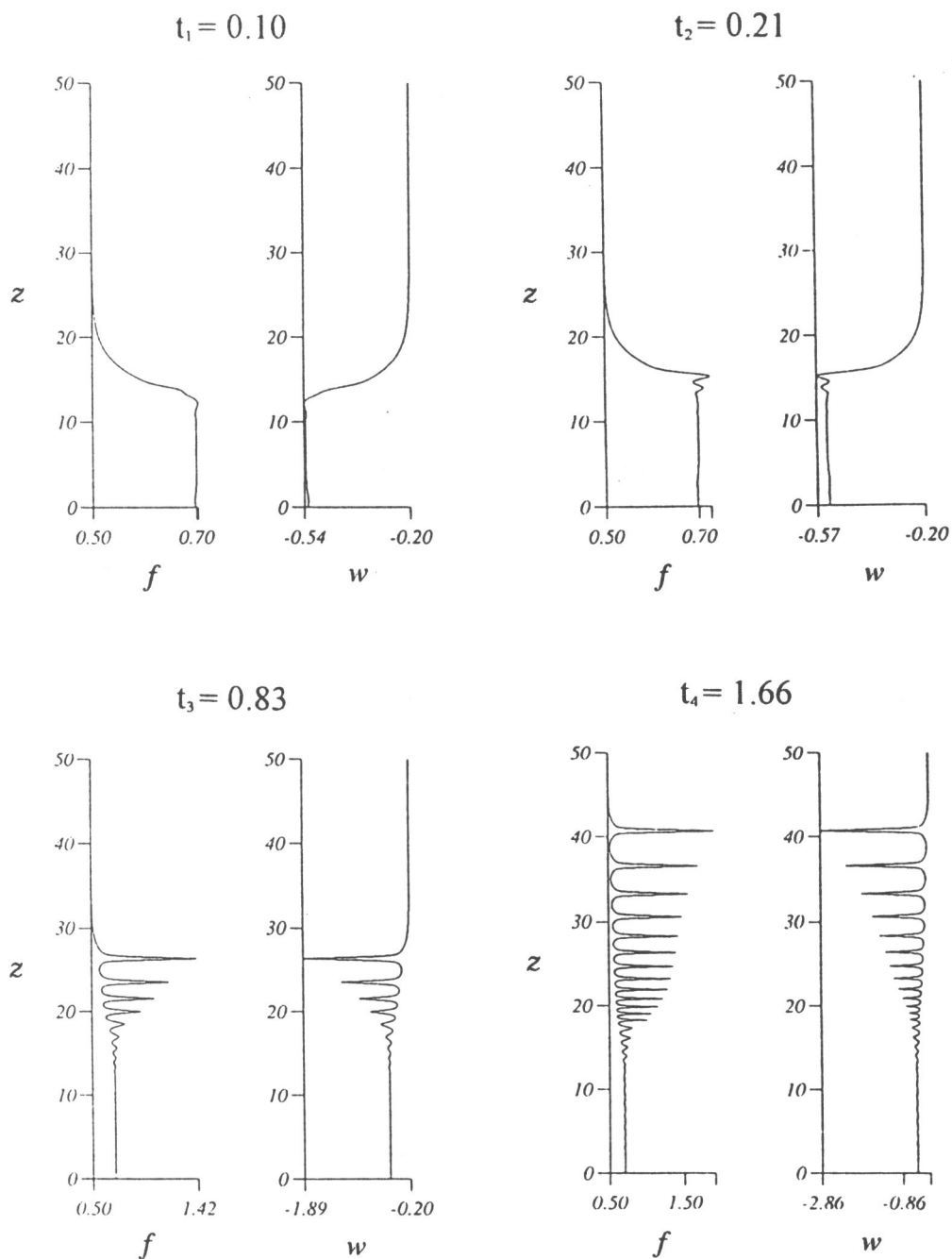
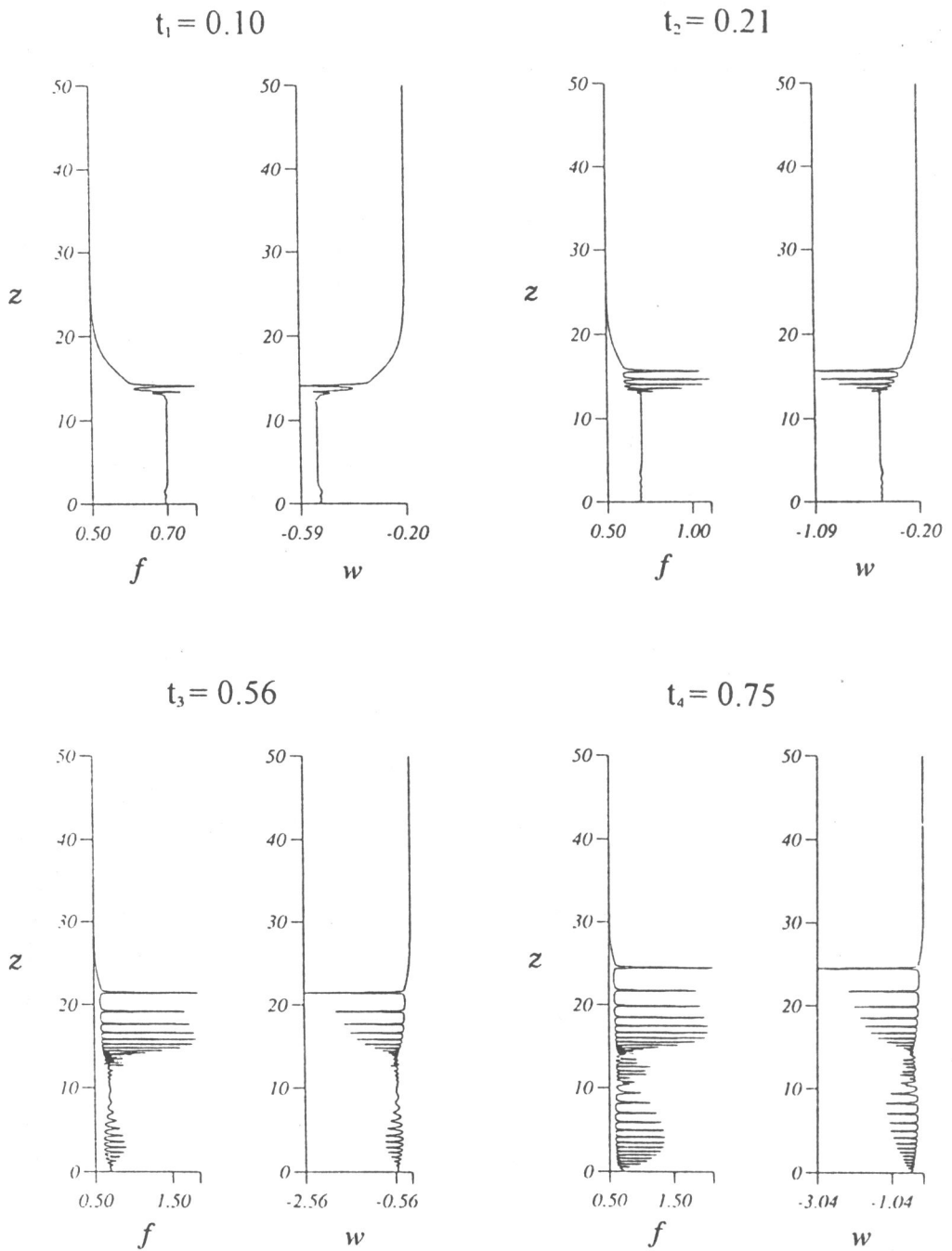


Рис. 2. Эволюция пористости $f(z, t)$ и скорости матрицы $W(z, t)$ при переменной вязкости, когда начальное распределение пористости убывает от одной константы до другой, пересекая критическое значение пористости в 6% при $q = 50$ для 4-х значений безразмерного времени

Рис. 3. То же, что на рис. 2, но при $q = 300$

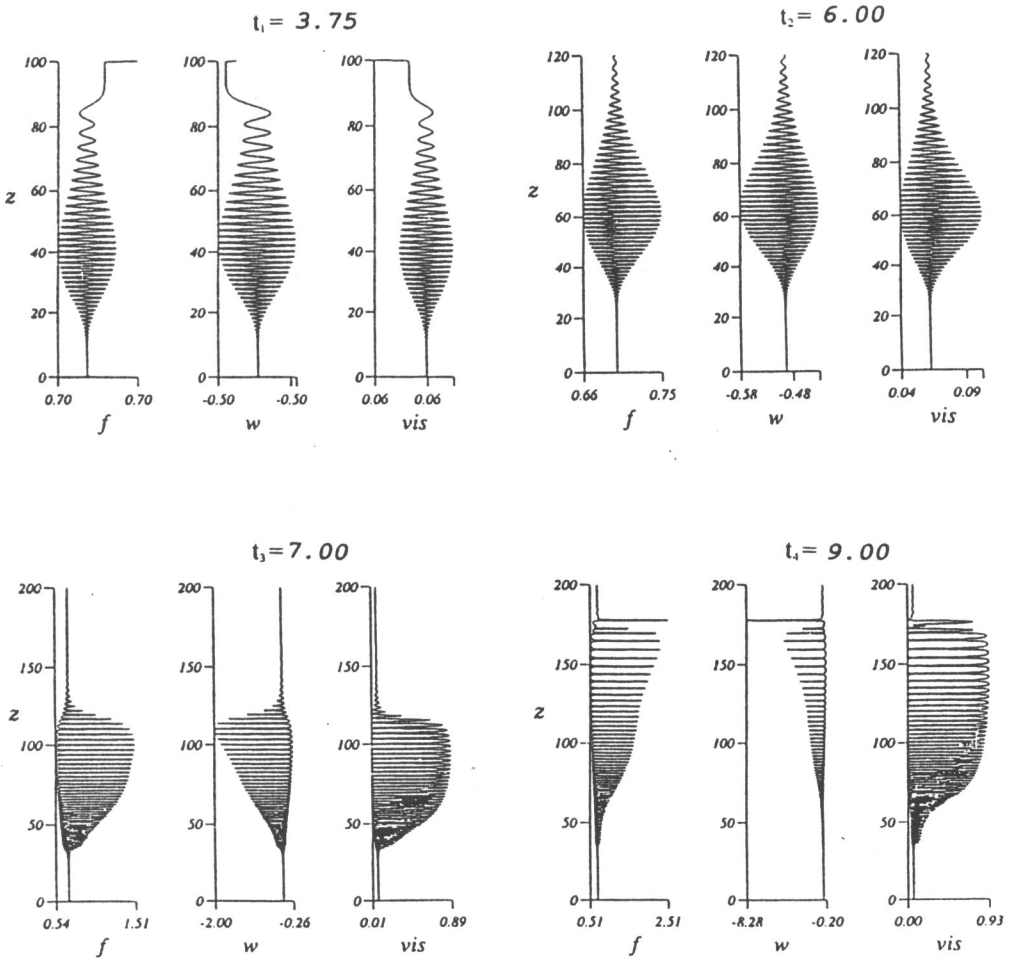


Рис. 4. Эволюция безразмерных распределений пористости $f(z, t)$, скорости матрицы $W(z, t)$ и вязкости матрицы $vis(z, t)$ для модели с переменной проницаемостью и арктангенциальной зависимостью вязкости от пористости для 4-х значений безразмерного времени.

Начальное распределение пористости – постоянная, равная 7%, т.е. превышающая критическое значение, $q = 50$; пространственный размер расчетного окна изменяется со временем от $100L$ до $200L$

Но, как видно из рис. 4, при переменной вязкости начальное однородное распределение пористости при $f > f_c$ является неустойчивым. Вначале образуются симметричные волновые пакеты малой амплитуды. Образование этих пакетов можно объяснить следующим образом. Так как расплав движется вверх, а значение пористости на нижней границе фиксировано, то возможны флуктуации, при которых вблизи нижней границы возникают малые отрицательные градиенты пористости. Так как при переменной вязкости волны возникают очень быстро, то они успевают сформироваться прежде, чем расплав всплывет в процессе постоянно сопутствующей однородной миграции.

Из рис. 4 видно, что со временем амплитуда пакета волн сначала растет симметрично. Но поскольку волновой режим возникает только в области $f > f_c$, то рост амплитуды пакета ограничен со стороны меньших значений пористости (см. рис. 4, начиная со значения безразмерного времени, равного 6.0). С этого момента пакет волн становится несимметричным. Со стороны больших значений амплитуды волн неограниченны. Амплитуды передовых волн в пакете быстро растут, и эти волны поглощают расплав из оставшейся части пакета.

Из рис. 4 также видно, что распределение вязкости со временем стабилизируется. Вне цуга волн вязкость равна начальной, а внутри цуга она меняется в противофазе с распределением пористости. При этом амплитуда вязкости внутри цуга мало меняется, оставаясь вблизи значения безразмерной вязкости, равного 0.9. Таким образом, мигрирующий расплав концентрируется в очень узкие горизонтальные слои, в которых вязкость понижена более чем на порядок. Между этими слоями находится порода, вязкость которой в рассматриваемой модели равна 0.9. Как видно из рис. 4 (момент времени 3.75), до и в начале формирования волн средняя вязкость рассматриваемого слоя была равна 0.06. После сформирования волн распределение вязкости резко изменилось и поэтому эффективная вязкость в слое с расплавом может изменяться в зависимости от пространственного масштаба протекающих процессов от резко пониженной до вязкости сухой породы.

Важной общей чертой решений при переменной вязкости является выравнивание пористости вне волн при значении, близком к критическому. Этот факт оправдывает выбор (см. разд. 3) в качестве характерного значения пористости ее критического значения, входящего в зависимость вязкости от пористости. Подобный выбор значительно упрощает математический анализ и придает характерному значению пористости физический смысл. В области изменения пористости $f < f_c$ вязкость практически постоянна и поэтому решения при переменной и постоянной вязкости почти одинаковы. Однако в области, где $f > f_c$, теперь действует новый физический механизм, вызванный скачкообразным изменением вязкости. Такой механизм обусловлен появлением новой зоны неустойчивости для пористости, превышающей критическое значение, что ведет к изменению решения в этой области. Для инициирования уединенных волн достаточно, чтобы начальная пористость превышала критическое значение и хотя бы незначительно менялась с глубиной. Можно сказать, что учет скачкообразного изменения вязкости приводит к общему росту неустойчивости системы, которая описывается уравнениями компаккции.

3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН

Некоторые свойства решения задачи компаккции для случая постоянной вязкости были аналитически исследованы в работах [4,14]. Система двух уравнений компаккции первого и второго порядка приводилась к одному уравнению третьего порядка для пористости. Использовалось также приближение малой пористости ($f_0 \ll 1$). В этой аппроксимации одномерная система (1.1) и (1.2) принимает следующий вид:

$$\partial f / \partial t = \partial W / \partial z, \quad (3.1)$$

$$\partial(\eta \partial W / \partial z) - W / f^n = 1. \quad (3.2)$$

Аналогично [7], для упрощения положим $f_0 = 1$. Для проницаемости будем использовать кубическую зависимость ($n = 3$). Возьмем производную по z от уравнения (3.2). Используя соотношение (3.1), получим следующее уравнение третьего порядка для пористости:

$$\eta(f)f_{zzt} = f_t/f^3(1 - 3f^2\eta_z f_z - f^3\eta_{zz}) - (2f\partial\eta/\partial f + 3\eta f)f_{zt}f_z/f + f_z/3f, \quad (3.3)$$

где $f_y = \partial f/\partial y$.

Уравнение (3.3) обобщает на случай с переменной вязкостью уравнение, полученное в статье [7] для постоянной вязкости. Последнее легко получить из (3.3), положив в нем вязкость равной единице

$$f_{zzt} = f_t/f^3 - 3f_{zt}f_z/f + 3f_z/f. \quad (3.4)$$

Перегруппировав члены в уравнении (3.4), можно найти два его первых интеграла (два закона сохранения)

$$\partial(t-1)/\partial t = \partial(f^3 f_{zt} - f^3)/\partial z, \quad (3.5)$$

$$\partial(f_z^2 + 1/f - 1)/\partial t = \partial(3f - ff_{zt})/\partial z. \quad (3.6)$$

Первый закон из (3.5) и (3.6) представляет собой закон сохранения массы и, очевидно, должен существовать и в общем случае с переменной вязкостью. Действительно, перегруппировав члены в уравнении (3.3), получим закон сохранения в более общем виде

$$\partial(f-1)/\partial t = \partial[t^3(\eta f_{zt} + f_z f_t \partial\eta/\partial f - 1)]/\partial z. \quad (3.7)$$

Будем искать автомодельное решение задачи в виде $f = F(\xi)$, где $\xi = z - ct$ есть автомодельная переменная, а c – константа. Это решение представляет собой уединенную волну, распространяющуюся со скоростью c . Если автомодельное решение существует, то уравнение в частных производных третьего порядка (3.3) становится обыкновенным дифференциальным уравнением. В случае постоянной вязкости, изученном в работе [14], уравнение (3.4) имеет более простой вид

$$F^3 F_{ttt} + 3F^2 F_t F_{tt} + (3/c)F^2 F_t - F_t = 0. \quad (3.8)$$

Обычно для автомодельного решения в виде уединенной волны выбирают следующие граничные условия [14]:

$$F \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \pm\infty.$$

Следствием этого условия являются соотношения:

$$F' \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad F'' \rightarrow 0, \quad \text{когда} \quad \xi \rightarrow \pm\infty. \quad (3.9)$$

Следующие ниже выкладки показывают, что задача (3.8)–(3.9) может быть проинтегрирована до конца. Перегруппировав члены в (3.8), получим следующий первый интеграл:

$$F^3 F_{tt} + F^3/c - F = c_1. \quad (3.10)$$

Используя условие (3.9), получим, что $c_1 = (1 - c)/c$ и уравнение (3.10) может быть переписано в следующем виде:

$$F_{tt} = (1 - c)/cF^3 + 1/f^2 - 1/c. \tag{3.11}$$

Умножив (3.11) на F_ξ и взяв интеграл, получим

$$(F_t)^2/2 = -(1 - c)/2cF^2 - 1/F - F/c + c_2. \tag{3.12}$$

Учитывая снова условие (3.9), получим соотношение для константы интегрирования $c_2 = (3 + c)/2c$. Перегруппировав члены в (3.12), получим следующее выражение:

$$(F_t)^2 = (F - 1)^2(c - 1 - 2F)/cF^2. \tag{3.13}$$

Чтобы производная F_t имела действительные значения, необходимо, чтобы правая часть выражения (3.13) оставалась положительной: $(c - 1 - 2F) \geq 0$. Поскольку $c > 0$, это условие предполагает, что пористость всегда ограничена сверху некоторым максимальным значением $F = A$. На фазовой плоскости (F_ξ^2, F) первая часть уравнения (3.13) задает кривую, качественно представленную на рис. 5,а, из которого видно, что уравнение (3.13) имеет двойной корень при $F = 1$ и простой корень в некотором максимальном значении $F = A$. Искомым решением дифференциального уравнения (3.8) является распределение $F = F(\xi)$. Точки кривой $F_\xi = F_\xi(F)$ на фазовой плоскости (F_ξ^2, F) характеризуют состояние процесса, описываемого уравнением (3.8). Как видно из рис. 5,а, в области $F > A$ решение не существует, так как всегда $F_\xi^2 > 0$. Уединенные волны соответствуют точкам фазовой плоскости, находящимся в области $1 < F < A$.

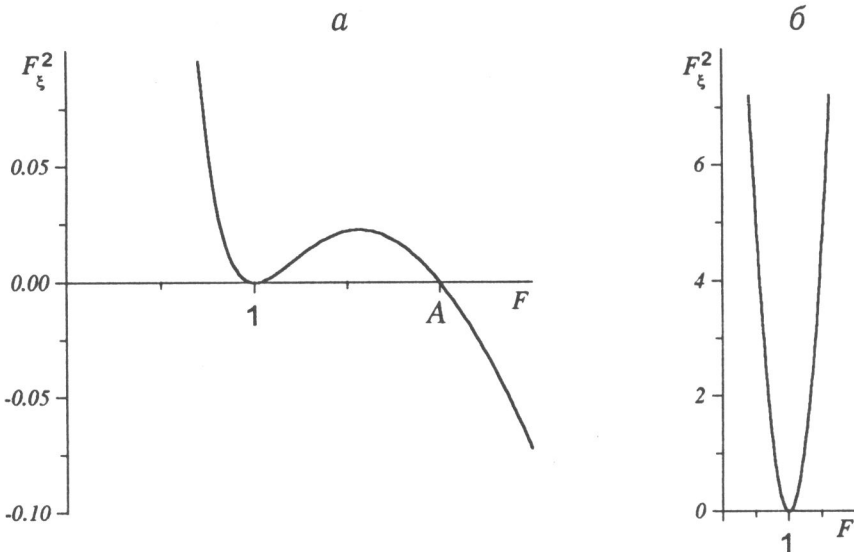


Рис. 5. Фазовый портрет для случаев с постоянной вязкостью или с вязкостью, изменяющейся по закону (1.5) (а) и для случая с арктангенциальной зависимостью для вязкости, изменяющейся по закону (1.6) (б)

В режиме уединенных волн пористость достигает максимального значения $F = A$, когда выражение в скобках в правой части (3.13) равно нулю. Это условие дает дисперсионное соотношение, которое связывает максимальную амплитуду A волны пористости $F(\xi = z - ct)$ с ее скоростью

$$c = 1 + 2A. \tag{3.14}$$

С помощью (3.14) уравнение (3.13) может быть еще раз проинтегрировано и найдено следующее аналитическое решение задачи (3.8)–(3.9) [14]:

$$|\xi|(A + 1/2)^{-1/2} = 2(A - F)^{1/2} - (A - 1)^{-1/2} \ln\{[(A - 1)^{1/2} - (A - F)^{1/2}]/[(A - 1)^{1/2} + (A - F)^{1/2}]\}. \tag{3.15}$$

Рассмотрим теперь более общую модель среды с переменной вязкостью матрицы, нелинейно зависящей от пористости. Чтобы найти уравнение для автомодельного волнового решения при переменной вязкости, подставим $F(z, t) = F(\xi = z - ct)$ в уравнение (3.3) и получим

$$\begin{aligned} F^3 \eta F_{ttt} + F^2(2F \partial \eta / \partial F + 3\eta) F_t F_{tt} + 3F_2 F_t / c = \\ = F t(1 - 3F^2 F_t^2 \partial \eta / \partial F - F^3 \eta_{tt}). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Перегруппировав члены в (3.16), получим следующий закон сохранения:

$$F^3(\eta F_{tt} + F_t^2 \partial \eta / \partial F + 1/c) = F + c_1. \tag{3.17}$$

Выражение (3.17) можно переписать в виде

$$(\eta F_t)_t + 1/c = 1/F^2 + c_1/F^3. \tag{3.18}$$

Поскольку вязкость входит в (3.18) только под знак производной, константа интегрирования не зависит от того, переменна вязкость или нет. Используя условие (3.9), получим $c_1 = (1 - c)/c$. Умножим обе части (3.18) на ηF_t и возьмем интеграл. В результате получим

$$\eta^2 F_t^2 / 2 = \int \eta[(1 - c)/c F^3 + 1/F^2 - 1/c] dF. \tag{3.19}$$

После интегрирования (3.19) по частям, перепишем его в виде

$$\begin{aligned} \eta^2 F_t^2 c / 2 = \eta[(1 - c)/2F^2 + c/F + F] - \\ - \int (d\eta/dF)[(1 - c)/2F^2 + c/F + F] dF. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Интеграл, стоящий в правой части выражения (3.20), для некоторых конкретных случаев зависимости вязкости от пористости может быть взят в элементарных функциях.

Для частного случая зависимости вида (1.4), предложенном в работе [4], получим следующий интеграл:

$$F_t^2 = 2F^2[-(1 - c)/3cF^3 - 1/2F^2 - (1/c) \ln F + c_2]. \tag{3.21}$$

Используя условия (3.9), получим константу интегрирования $c_2 = (2 + 6)/6c$. Перепишем (3.21) в виде

$$F_t^2 = D(F)/3cF, \quad (3.22)$$

где

$$D(F) = (c + 2 - 6 \ln F)F^3 - 3cF + 2(c - 1). \quad (3.23)$$

Числитель $D(F)$ выражения (3.22) обращается в нуль при $F = 1$. Последовательно дифференцируя числитель $D(F)$, легко показать, что $F = 1$ является двойным корнем, поскольку $D'' \neq D' = D = 0$ при $F = 1$. Вследствие вышеизложенного, выражение (3.22) может быть представлено в виде

$$(F_t)^2 = [(F - 1)^2/cF]/\Theta(F). \quad (3.24)$$

Более того, надо отметить, что $\Theta(F)$, входящее в (3.24), имеет простой корень при $F > 1$, поскольку числитель $D(F)$ стремится к $-\infty$, когда F стремится к $+\infty$. Этот факт подтверждается также при численном расчете правой части (3.22) (для фиксированного $c = 3$): график правой части (3.22) качественно совпадает с графиком, соответствующим случаю с постоянной вязкостью.

Таким образом, проведенный анализ объясняет результаты численных экспериментов, выполненных в работе [4]. Именно, обратно пропорциональная зависимость вязкости от пористости не дает качественно новых эффектов в поведении решения по сравнению со случаем, когда проницаемость переменна, а вязкость постоянна. Ниже мы покажем, что если принять зависимость вязкости от пористости в форме скачкообразного падения вблизи некоторого критического значения пористости, то влияние вязкости приведет к качественному изменению характера волн пористости, что проявится в существенно иной форме для первого интеграла (3.20).

Для закона вязкости (1.6) производная вязкости от пористости примет вид

$$d\eta/dF = -q/\pi(1 + q^2(F - Fc)^2). \quad (3.25)$$

Возьмем интеграл в правой части выражения (3.20), учтя (3.25). В результате найдем, что этот интеграл представляет собой сумму трех интегралов от дробно рациональных функций. Эти интегралы имеют следующий вид (мы положили здесь критическое значение равным единице и произвели очевидную замену):

$$I_1 = (1/2q) \int d(t^2)/(1 + t^2) + \int dt/(1 + t^2) = (1/2q) \ln |1 + t_2| + \text{arctg}(t), \quad (3.26)$$

$$I_2 = -cq \int dt/(t + q)(1 + t^2) = -[cq/(1 + q^2)][\ln |(t + q)(1 + t^2)^{-1/2}| + q \text{arctg}(t)], \quad (3.27)$$

$$I_3 = -cq^2 \int dt/(t + q)^2(1 + t^2) = -[cq^2/(q^2 + q + 2)][\ln |(t + q)/(1 + t^2)| + (1 - q)(2q)^{-1} \text{arctg}(t) - q/(t + q)]. \quad (3.28)$$

Подставив зависимость (1.6) в (3.20) и учтя интегралы (3.26)–(3.28), получим

$$\begin{aligned}
F_{\xi}^2 = & (2/\eta^2)\{(1/2q)(\ln |(qF/(1+q^2(F-1)^2)| + \arctg(F-1) - \eta[(1-c)/2F^2] + \\
& + c/F + F)\} - (2/\eta^2)\{(q/(1+q^2)(\ln |(qF/(1+q^2(F-1)^2)| + q \arctg(F-1))\} - \\
& - (2/\eta^2)\{q^2/(q^2+q+2)(\ln |(qF/(1+q^2(F-1)^{1/2})| + \\
& + [(1-q)/2q] \arctg(F-1)) - 1/F\}C_2\}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Здесь $C_2 = [q^2/(q^2+q+2) + q(1+q^2)(\ln |q| + (3+c)/4c] -$ константа интегрирования, выбранная в соответствии с условием (3.10).

Легко видеть, что, если в (3.29) вязкость положить равной единице и $q = 0$, то все члены в фигурных скобках обратятся в нуль и выражение (3.29) сведется к первому интегралу (3.13), имеющему место в случае постоянной вязкости.

Кривая состояний уравнения (3.29) на фазовой плоскости представлена на рис. 5, б. Эта зависимость существенно отличается от предыдущих. Во-первых, теперь нет простого корня. Во-вторых, градиенты пористости чрезвычайно велики, особенно в области, в которой $F > 1$, где градиент пористости стремится к бесконечности, причем быстрее, чем в окрестности $F = 0$ (для $q = 50$). Поскольку единица является критическим значением, то аналитическая зависимость находится в соответствии с численным решением, которое неустойчиво и быстро образует структуры, имеющие большие градиенты в области, где значение пористости превышает критическое. Образование этих структур, называемых обобщенными уединенными волнами [15], происходит значительно быстрее, чем образование классических уединенных волн, изученных в случае с постоянной вязкостью. Это свидетельствует о том, что новая неустойчивость доминирует (т.е. за образование волн теперь ответственна не окрестность нуля, а окрестность положительного критического значения пористости в законе вязкости). Мы видим, что из-за отсутствия простого корня (аналогичного $F = A$ в случае постоянной вязкости или вязкости, изменяющейся по закону (1.5), см. рис. 5, а) амплитуда не ограничена и волны пористости при вязкости, изменяющейся по закону (1.6), представляют собой не классические уединенные волны с постоянной максимальной амплитудой, а обобщенные уединенные волны, рассмотренные в работе [15] в общематематической постановке. Вследствие такой особенности кривой на фазовой плоскости невозможно написать дисперсионное соотношение для развитой нелинейности, как это делалось для постоянной вязкости, базировавшееся на существовании простого корня. Таким образом, аналитические результаты анализа находятся в соответствии с численными решениями модели компактизации и могут быть полезны как для тестирования решения, так и для дальнейших исследований.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассчитанные в работе распределения концентрации расплава при переменной вязкости среды в зависимости от времени для различных начальных условий (для начального распределения концентрации расплава в виде гауссовой кривой, ступенчатой функции и постоянной) показывают, что зарождение волн расплава происходит в локальных областях пространства с отрицательными градиентами концентрации расплава.

Ранее, на основании работ Скотта и Стивенсона для частной модели переменной вязкости, предполагалось, что учет зависимости вязкости матрицы от концентрации расплава мало изменяет волновой режим всплывания расплава.

На основе анализа двух первых интегралов уравнения компакции показано, что действительно используемая Скоттом и Стивенсоном частная обратнопропорциональная зависимость вязкости от пористости не приводит к качественным изменениям режима миграции расплава. Однако, проведенные в настоящей работе численные и аналитические исследования показали, что для реальных сред с резко нелинейной зависимостью вязкости от пористости, появляется новый тип нелинейных волн с высокой амплитудой, повышающий эффективность миграции расплава. При этом, в отличие от модели с постоянной вязкостью, для резконелинейной зависимости вязкости от концентрации расплава волновой режим может возникать даже для однородного начального распределения концентрации.

Работа выполнена при поддержке Международного научно-технического центра (грант 415-96) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 98-05-64112).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каракин А.В.* К выводу основных уравнений механики тающего льда // Физика льда и льдотехника / Под ред. В.П. Царева. Якутск: 1974. С.22-30.
2. *McKenzie D.* The generation and compaction of partially molten rock // *J. Petrol.* 1984. Vol.25. P.713-765.
3. *Трубицын В.П., Ходаковский Г.И., Рабинович М.* Волновая миграция расплава в сжимаемой пористой среде с постоянной вязкостью // Физика Земли. 1998. N10. С.33-39.
4. *Scott D., Stevenson D.* Magma solitons // *Geophys. Res. Lett.* 1984. Vol.11. P.1161-1164.
5. *Hirth G., Kohlstedt D.* Experimental constraints on the dynamics of the partially molten upper mantle: deformation in the diffusion creep regime // *J. Geophys. Res.* 1995. Vol.100. P.1981-2001.
6. *Khodakovskii G, Rabinowicz M., Ceuleneer G., Trubitsyn V.* Melt percolation in a partially molten mantle mush: effect of a variable viscosity // *Earth and Planet. Sci. Lett.* 1995. Vol.134. P.267-281.
7. *Barcilon V., Richter F.M.* Non-linear waves in compacting media // *J.Fluid Mech.* 1986. Vol.164. P.429-448.
8. *Richter F.M., McKenzie D.* Dynamical models for melt segregation from a deformable matrix // *J. Geol.* 1984. Vol.92. P.729-740.
9. *Spiegelman M.* Flow in deformable porous media II: numerical analysis-the relationship between shock waves and solitary waves // *J. Fluid Mech.* 1993. Vol.247. P.39-63.
10. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т.1. М.: Наука, 1983. 536с.
11. *McKenzie D.* Some remark on the movement of small melt fraction in the mantle // *Earth and Planet. Sci. Lett.* 1989. Vol.95. P.53-72.
12. *Rabinowicz M., Nicolas A., Vigneresse J.L.* A rolling mill effect in asthenosphere beneath oceanic spreading centers // *Earth and Planet. Sci. Lett.* 1984. Vol.67. P.97-108.
13. *Ходаковский Г.И., Трубицын В.П., Рабинович М., Колинер Ж.* Миграция магмы и компакция вмещающих пород с переменной вязкостью // Проблемы динамики и сейсмичности Земли. М.: ГЕОС, 1998. С.16-31. (Вычисл. сейсмология. Вып; 30).
14. *Barcilon V., Lovera O.* Solitary waves in magma dynamics // *J.Fluid Mech.* 1989. Vol.204. P.121-133.
15. *Ильичев А.Т.* Некоторые вопросы теории уединенных волн в диспергирующих средах. Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук / МГУ. М., 1996. 30 с.