

УДК 550.311

ДИФФЕРЕНЦИАЦИЯ ДВУХКОМПОНЕНТНОГО РАСПЛАВА В КРИСТАЛЛИЗУЮЩЕЙСЯ МАГМАТИЧЕСКОЙ КАМЕРЕ

А.Г. Симакин

*Институт экспериментальной минералогии
Российской академии наук, Черноголовка*

В.П. Трубицын

*Объединенный институт физики Земли Российской академии наук,
Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук, Москва*

Рассчитывается модель затвердевающего расплава при охлаждении сверху. Решается система уравнений сохранения массы для двух компонентов расплава и содержания кристаллов, уравнения переноса тепла, уравнения фазового равновесия и соотношения между абсолютной и относительной скоростью оседания. Ее решение определяют шесть функций: распределения с глубиной для двух концентраций, температуры, скоростей расплава и кристаллов, а также содержания кристаллов. Учитывается противоток расплава, вызванного осаждением кристаллов, и течение, вызванное разностью плотностей растущих кристаллов и расплава. Эти эффекты оказывают существенное влияние на динамику осаждения кристаллов. Во-первых, возникают разрывы, обусловленные изменением скорости оседания, во-вторых, появляется новый вид решения, при котором пограничный слой разбивается на две части. Это обусловлено тем, что при увеличении объемного содержания кристаллов около фронта полного затвердевания их скорость осаждения становится меньше, чем U_b . В то же время во внешней части пограничного слоя $U_s > U_b$. В результате этот эффект ведет к уменьшению потока твердой фазы от верхней границы при быстром охлаждении лавовых озер и силлов.

DIFFERENTIATION OF A TWO-COMPONENT MELT IN A CRYSTALLIZING MAGMA CHAMBER

A.G. Simakin

Institute of Experimental Mineralogy, Russian Academy of Sciences, Chernogolovka

V.P. Trubitsyn

*United Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences,
International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow*

We compute a model of solidifying melt cooled from above. The following system of equations is solved: equations of conservation of mass for two melt components and crystal fraction, equation of heat transfer, equation of phase equilibrium, and relationship between relative and absolute settling velocity. The solution consists of 6 functions:

the depth dependence of the two concentrations, crystal fraction, temperature, and the velocities of melt and crystals. The counterflow of melt produced by crystal settling is included in the model as well as the flow due to the density difference between melt and growing crystals. These effects are essential in the dynamics of crystal settling. First, they give rise to discontinuities resulting from changes of settling velocities; second, they yield a new solution

ВВЕДЕНИЕ

Явления, связанные с кристаллизацией расплава, широко распространены в природе. Размер магматических тел варьирует от нескольких тысяч километров в магматическом океане (как его представляют, например, Соломатов и Стевенсон [1]) до десятков сантиметров, составляющих поперечник малых даек и вулканических бомб. Время застывания этих тел – от нескольких секунд до миллионов лет. При застывании образуются разнообразные магматические породы, интрузии, элементы земной коры. Подъем, дегазация и застывание магмы в верхней коре сопровождается вулканической активностью.

Чисто геохимический подход состоит в термодинамическом моделировании кристаллизации без расчета перераспределения компонентов и фаз по пространству [2]. При этом можно рассчитать детальный тренд эволюции состава расплава и выделяющихся магматических минералов. В сочетании со схематичным полуэмпирическим описанием конвекции расплава и осаждения кристаллов точные термодинамические модели использовались для моделирования застывания пластообразных интрузивов – силлов [3]. Подбором эмпирических параметров достигнуто очень близкое соответствие результатов моделирования и строения природных объектов.

С другой стороны, много исследований нацелено на менее строгий геохимический анализ системы, но с учетом роста кристаллов и их перераспределения по пространству. В упомянутой выше работе [2] изменение размеров кристаллов не учитывалось. В работе [3] размер кристаллов является подгоночным параметром. В то же время в физических моделях размер образующихся кристаллов имеет большое значение, поскольку он влияет на скорость осаждения и структуру конвекции [4,5]. Корректная формулировка проблемы объемной кристаллизации включает уравнение для распределения кристаллов по размерам (CSD), как это описано, например, в [1]. Такие параметры, как средний размер кристаллов и объемная доля твердой фазы, являются моментами этого распределения.

В работе [6], хотя и не учитывалось осаждение кристаллов, была в полной форме сформулирована проблема объемной кристаллизации в температурном пограничном слое пластообразного тела. Автор использовал решение Аврамы для объемной доли твердой фазы в выражении для теплового источника. Он получил численное решение одномерной кондуктивной тепловой задачи для однокомпонентного расплава. Был оценен средний уровень переохлаждения и проведено сравнение интегральных характеристик CSD с природными данными по различным интрузивам.

Соломатов и Стевенсон [1] получили аналитические оценки моментов CSD и максимальное переохлаждение, достигаемое при заданной скорости охлаждения в точке. Без гетерогенной нуклеации в системе достигаются нереально большие

переохлаждения, отвечающие протеканию гомогенной нуклеации. В этих условиях кристаллы будут иметь неизометричную форму, что нарушает постулаты модели.

Есть множество попыток рассматривать конвекцию кристаллизующейся магмы. Обычно предполагается, что конвекция является тепловой и она учитывается приближенно в рамках параметризованной конвекции с использованием соотношения между числом Нуссельта и Рэлея. В этих схемах существует проблема определения границы верхнего теплового пограничного слоя кристаллизующейся жидкости. В статье [7] полагается, что затвердевание магматической камеры происходит не сверху, а во всем объеме, при этом пограничный слой выполняет лишь функцию отвода тепла.

В работе [8] верхний фронт застывания описан как мономинеральная поверхность, изменяющаяся по кинетическому закону. Объемное застывание с осаждением кристаллов ведет к дифференциации магмы.

Недавно Хорт [9] попытался обобщить анализ Уорстера и Халперта [8] с включением верхней двухфазной зоны. Однако он не описал явно изменение состава расплава и не пояснил, как он определяет нижнюю границу этой зоны. Поэтому данный подход представляется очень искусственным. В статье [10] нижняя граница пограничного слоя определялась с помощью критериев, полученных на основе качественного анализа неустойчивости, вызванной распределением плотности в двухфазной зоне.

В большинстве моделей осаждение и рост кристаллов в двухфазной зоне не описывается, а вводятся эффективные источники зародышей кристаллов для объемного роста [7]. В то же время в работе [11] показано, что в ряде случаев застывания камер конвекция не существенна. Эти доказательства дополняются вычислениями Хорта [9], который получил хорошую сходимость с природными данными, постулировав, что кристаллизация происходит в основном в верхней неподвижной части расплава. Анализ процесса кристаллизации в этой зоне заслуживает подробного анализа. Нестрогая полуколичественная модель роста оседающих кристаллов была рассмотрена Манганом и Марчем [12]. Эта модель основана на эмпирических оценках скорости роста минералов в малых интрузивах.

Поток кристаллов, покидающих верхнюю приконтактную зону, может существенно влиять на режим тепловой конвекции [4, 13] или даже вызвать самостоятельные двухфазные течения [5, 10].

В настоящей статье, как и в наших ранних работах, рассматривается процесс кристаллизации в отсутствие тепловой конвекции [14], но с учетом влияния компенсационного течения, а также нелинейных эффектов при осаждении кристаллов со скоростью, зависящей от объемного содержания твердой фазы. Этот анализ необходим для будущего решения полной задачи с учетом гидродинамических эффектов как композиционной конвекции, так и тепловой при охлаждении кристаллизующегося расплава сверху. В данной работе используется приближение, при котором полагается, что все кристаллы обладают некоторым фиксированным эффективным размером, как это делалось ранее при геохимическом моделировании [3, 12]. Расчеты ведутся с использованием функции распределения кристаллов по размеру, впервые примененной в работе [15] для анализа осаждения кристаллов. Список обозначений приведен в приложении.

1. УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим для простоты двухкомпонентную систему с диаграммой плавкости эвтектического типа с фазами постоянного состава. Исходное состояние расплава принимается на линии ликвидуса фазы А со значительным обогащением ею эвтектического состава. Таким образом, рассматривается объемная кристаллизация одной фазы А, тогда как вторая фаза В появляется на фронте полного затвердевания при эвтектической температуре (рис. 1).

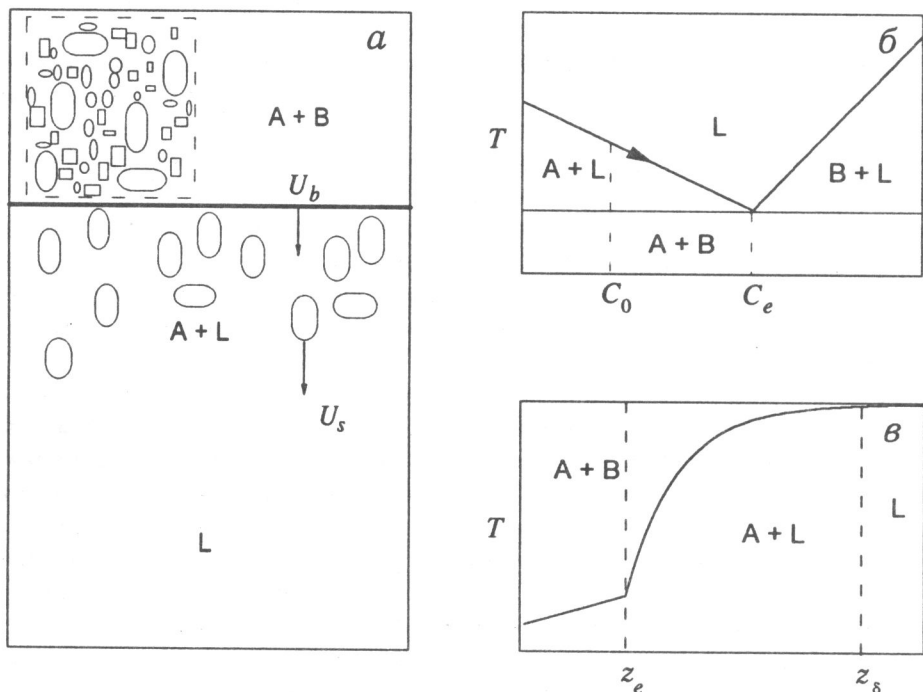


Рис. 1. Схематическое изображение застывающего расплава (а), диаграмма плавкости моделируемой системы (б) и распределение температуры с глубиной (в).

Обозначения. На рис. 1, а область А + В соответствует твердой фазе; L – расплав, содержащий компоненты А и В; А + L – двухфазная область, содержащая кристаллы компонента А и расплав L – видны кристаллы компонента А, осаждающиеся со скоростью U_s ; фронт полного затвердевания движется вниз со скоростью U_b .

На рис. 1, б C_0 – начальная концентрация компонента в расплаве, C_e – эвтектический состав расплава, стрелка обозначает траекторию изменения состава равновесного расплава.

На рис. 1, в участок кривой $0 - z_e$ – температура в области твердой фазы А + В, участок $z_e - z_\delta$ – температура в погранслое, участок $z_\delta - \infty$ – температура в основной области расплава (изотермическое ядро)

Перенос твердой фазы можно описать либо с помощью функции распределения по размерам $n(R, z, t)$ с учетом зависимости скорости осаждения от размера кристаллов $U_s(z, R)$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n U_s(z, R)}{\partial z} + V \frac{\partial n}{\partial R} = 0,$$

либо относительно ее третьего момента – объемной доли кристаллов $\varepsilon(z, t)$ и средней скорости осаждения

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon \bar{U}_s}{\partial z} - \Gamma = 0, \quad (1.1)$$

где усредненные параметры определяются как

$$\varepsilon(z, t) = 4\pi/3 \int_0^{\infty} nR^3 dR, \quad (1.2)$$

$$\bar{U}_s = U_l + \bar{S} = U_l + \frac{\int_0^{\infty} nR^3 S(R) dR}{\int_0^{\infty} nR^3 dR}.$$

Уравнение сохранения для компонента расплава А, который участвует в кристаллизации, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} [(1 - \varepsilon)\rho_l C] + \frac{\partial}{\partial z} [(1 - \varepsilon)\rho_l C U_l] = -\Gamma \rho, \quad (1.3)$$

где Γ – функция источника, а C – содержание компонента А в расплаве, U_l – скорость расплава.

Аналогично записывается уравнение для компонента В

$$\frac{\partial}{\partial t} [(1 - \varepsilon)\rho_l (1 - C)] + \frac{\partial}{\partial z} [(1 - \varepsilon)\rho_l (1 - C) U_l] = 0, \quad (1.4)$$

где функция источника $\Gamma_B = 0$, а концентрация компонента В равна $1 - C$.

Уравнение теплового баланса в энтальпийной форме имеет вид

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon U_s H_s + (1 - \varepsilon) U_l H_l) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2},$$

где энтальпия смеси находится суммированием по фазам (индекс s относится к твердой фазе, индекс l – к жидкой)

$$H = H_s \varepsilon + H_l (1 - \varepsilon), \text{ где } H_s \approx (c_{ps} T + H_{os}) \rho_s, \quad H_l \approx (c_{pl} T + H_{ol}) \rho_l.$$

Это уравнение теплового баланса для двухфазной среды может быть переписано как уравнение для температуры [16, 17]

$$\frac{\partial}{\partial t} (T c_p + L(1 - \varepsilon)) = \kappa_T c_p \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + L \frac{\partial \varepsilon \bar{U}_s}{\partial z}. \quad (1.5)$$

Чтобы определить функцию источника генерации кристаллов Γ , необходимо еще одно уравнение. В равновесном состоянии температура расплава и его состав связаны ликвидусными соотношениями. В линейном приближении

$$C = 1 - (T_m^A - T)/m_l, \quad (1.6)$$

где T_m^A – температура плавления чистого компонента А, а m_l – ликвидусный склон. Уравнение (1.6) определяет количество твердой фазы, выделяющейся при понижении температуры, и тем самым неявно определяет функцию Γ .

Альтернативным является определение Γ , использующее скорость V_{cr} роста кристаллической фазы А и величину ее поверхности Ω . Допуская независимость скорости роста от размера, получим для фазы с распределением по размерам $n(r)$

$$\Gamma = \int n(R)\Omega(R)V_{cr}dR, \quad V_{cr} = V_{cr}(\Delta T),$$

где скорость роста зависит от переохлаждения ΔT , равного разности ликвидусной и текущей температур

$$T_l(C) = T_m^A - (1 - C)m_l. \quad (1.7)$$

Таким образом, для шести неизвестных функций $T(Z, R, t)$, $C(Z, R, t)$, $U_l(Z, t)$, $U_s(Z, R, t)$, $\Gamma(Z, t)$, $\varepsilon(Z, t)$ мы получили систему из шести уравнений: трех уравнения сохранения массы (1.1), (1.3), (1.4) для двух компонентов (C_A и C_B) расплава и содержания кристаллов ε , уравнения переноса тепла (1.5), уравнения фазового равновесия (1.7) и соотношения между абсолютной и относительной скоростями оседания U_s (1.2).

В связи с гиперболической природой уравнений седиментации возможны разрывы в распределении кристаллов (рис. 2).

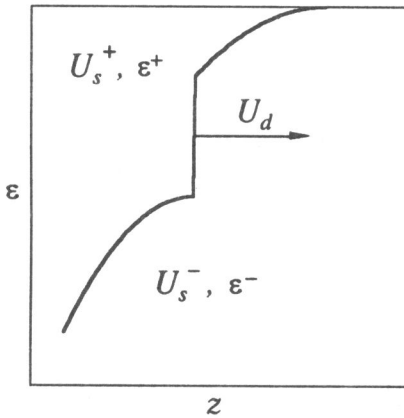


Рис. 2. Схематическое распределение кристаллов с разрывом:

U_d – скорость перемещения разрыва

Подобные явления встречаются в газовой динамике и при инфильтрационном метасоматозе. Можно предложить новое описание для выражения скорости перемещения разрыва U_d . Преобразованием координат $t' = t$, $z' = z - \int U_d dt$ распределения $T(z)$, $C(z)$, $\varepsilon(z)$ можно представить в квазистационарном виде. Седиментационный поток не инвариантен к этому преобразованию. Для того, чтобы в новой координатной системе разрыв в $\varepsilon(z)$ был в фиксированной позиции, должны быть равны седиментационные потоки по обе стороны от разрыва

$$(U_s^+ - U_d)\varepsilon^+ = (U_s^- - U_d)\varepsilon^- \Rightarrow U_d = \frac{U_s^+\varepsilon^+ - U_s^-\varepsilon^-}{\varepsilon^+ - \varepsilon^-}. \quad (1.8)$$

Первый разрыв возникает непосредственно на фронте застывания, когда $U_d = U_b$, так как в твердой фазе (при $T < T_e$) скорость осаждения равна нулю. Чтобы найти соотношение твердой фазы (вкрапленников) в расплаве (ϵ^+) и в затвердевшей области (ϵ^-), перепишем уравнение (1.8) в виде

$$\epsilon^- = \epsilon^+(1 - U_s^-/U_b). \tag{1.9}$$

Здесь мы различаем кристаллическую фазу компонента А в эвтектическом сростании с компонентом В и захваченные вкрапленники А. Из соотношения (1.9) вытекает, что при положительной скорости осаждения (ко дну) содержание вкрапленников в расплаве выше, чем в застывшей породе. При $U_s < 0$, т.е. при всплывании кристаллов (или осаждении у нижнего контакта), наблюдается обратное соотношение. При достижении содержания вкрапленников 0.4–0.5 образуется кумулус между нижним фронтом затвердевания и расплавом с оседающими кристаллами.

При осаждении кристаллов может возникать и другой тип разрыва, так как скорость осаждения зависит от содержания кристаллов (он рассмотрен ниже).

Неизвестные функции – температура T и содержание кристаллов ϵ – находятся из дифференциальных уравнений, соответственно, 2-го и 1-го порядков. Поэтому необходимо выписать два граничных условия для T и одно для ϵ .

Температура принимается фиксированной на двух концах пограничного слоя (верхней границей является фронт затвердевания, нижней – примерно изотрмический основной объем камеры) $T(0) = T_e$, $T(\infty) = T_0$.

Дополнительная неизвестная скорость движения фронта затвердевания в приближении фиксированной скорости охлаждения находится из уравнения Стефана

$$\lambda \partial T / \partial z |_{z=z(t)} + U_b L \rho (1 - \epsilon^+(1 - U_s/U_b)) |_{z=z(t)-0} = Q, \tag{1.10}$$

где содержание кристаллов вкрапленников в затвердевшем расплаве ϵ^- определено из соотношения (1.9).

Граничное условие для объемного содержания твердой фазы ϵ (уравнение седиментационного переноса 1-го порядка) заранее неизвестно. Его анализ впервые был дан в работе [16]. Граничное условие можно ставить только на той поверхности, откуда кристаллы движутся. Содержание кристаллов на той границе, куда кристаллы движутся, заранее не известно и может быть определено только после решения задачи. Если $U_s < U_b$, то содержание твердой фазы нужно задавать на границе с основным объемом камеры (в идеальном случае – в бесконечности) $\epsilon(z = \infty) = \epsilon_0$.

Если $U_s > U_b$, то содержание кристаллов определено только на границе полного затвердевания $\epsilon(z = \xi_{cr}) = 0$.

В более сложных реальных случаях весь пограничный слой делится на интервалы $U_s > U_b$ и $U_s < U_b$ и граничные условия задаются на соответствующих концах интервалов. Таким образом, система, задающая эволюцию $T(Z, R, t)$, $C(Z, R, t)$, $U_l(Z, t)$, $U_s(Z, R, t)$, $\Gamma(Z, t)$, $\epsilon(Z, t)$ (или $n(z, R, t)$), становится полностью определенной.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО СОСТОЯНИЯ

При охлаждении бесконечного слоя расплава с параметрами, зависящими только от глубины, с постоянной скоростью отвода тепла фронт полного затвердевания продвигается с асимптотически постоянной скоростью U_b . Перед фронтом возникает термический пограничный слой с шириной, пропорциональной k_T/U_b (где k_T – коэффициент температуропроводности). Естественно рассматривать кристаллизацию в двухкомпонентной системе в приближении квазистационарного термического пограничного слоя. При достаточно быстром охлаждении размер этого погранслоя составляет малую долю размера силлов и лавовых озер.

2.1. Исключение скоростей жидкости

Равные плотности расплава и кристаллов. В приближении равных плотностей кристаллов и расплава ($\rho_l \approx \rho_s = \rho$) может быть получено наиболее простое соотношение между U_l и U_s , справедливое и в нестационарном случае. Сумма уравнений (1.1), (1.3), (1.4) задает баланс массы для полной плотности смеси

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial z} \rho [(1 - \varepsilon)U_l + \varepsilon U_s] = 0.$$

Поскольку мы положили $\rho = \text{const}$, интеграл этого уравнения равен

$$(1 - \varepsilon)U_l + \varepsilon U_s = A. \quad (2.1)$$

В отсутствие глобальной конвекции течение жидкости вызывается только осаждением кристаллов, поэтому $U_l = 0$ при $U_s = 0$. Следовательно $A = 0$. Полная скорость осаждения равна сумме скорости жидкости и стоксовой скорости S

$$U_s = U_l + S, \quad \text{где } S = \frac{2\Delta\rho g R^2}{9\eta}.$$

Нетрудно получить простые выражения, справедливые и в нестационарных процессах

$$U_l = -\varepsilon S, \quad U_s = (1 - \varepsilon)S. \quad (2.2)$$

Различные плотности расплава и кристаллов. Рассмотрим влияние объемных эффектов в квазистационарном состоянии. Для получения описывающих тепловой пограничный слой квазистационарных решений перейдем к системе координат, движущейся с фронтом затвердевания со скоростью $U_b(t)$: $t' = t$, $z' = z - \int U_b dt$. Соответствующие производные по времени при этом преобразовании добавят новый член

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - U_b \frac{\partial}{\partial z'}. \quad (2.3)$$

В квазистационарном состоянии (производные по времени равны нулю) с учетом (2.3) уравнения (1.1), (1.3) и (1.4) запишутся в виде

$$[\rho_s \varepsilon (U_l - U_b + S)]_z = \Gamma, \quad (2.4)$$

$$[(1 - \varepsilon) \rho_l C (U_l - U_b)]_z = -\Gamma, \quad (2.5)$$

$$[(1 - \varepsilon) \rho_l (1 - C) (U_l - U_b)]_z = 0. \quad (2.6)$$

Интеграл суммы уравнений (2.4)–(2.6), являющийся аналогом (2.1), равен

$$(1 - \varepsilon) \rho_l U_l^r + \rho_s \varepsilon (U_l^r + S) = B. \quad (2.7)$$

Относительная скорость расплава ($U_l^r = U_l - U_b$) выражается через константу интегрирования как

$$\frac{B - \varepsilon S}{(1 - \gamma) \varepsilon + \gamma} = U_l - U_b, \quad \text{где } \gamma = \frac{\rho_l}{\rho_s}. \quad (2.8)$$

При равенстве плотностей расплава и кристаллов расплав покоится при неподвижных кристаллах ($S = 0$), что дает константу интегрирования $B = -U_b$. Если плотности не равны, то течение может быть связано с компенсацией объемного эффекта при кристаллизации.

Если $S > U_b$, то содержание кристаллов на границе равно нулю. Поэтому скорость расплава на границе обеспечивает компенсацию объемного эффекта при полной кристаллизации в эвтектике

$$U_l = -U_b(1 - \gamma); \quad (2.9)$$

подставив (2.9) в (2.7), получим

$$B = \gamma(\gamma - 2)U_b, \quad U_l^r = \frac{\gamma(\gamma - 2)U_b - \varepsilon S}{(1 - \gamma) \varepsilon + \gamma}.$$

Если $S < U_b$ и содержание кристаллов в расплаве на границе не равно нулю, константа интегрирования B находится следующим образом. Скорость расплава представляется суммой компенсационного и седиментационных членов. Содержание кристаллов вкрапленников компонента А в эвтектике выразим через соотношение (1.9) и получим

$$U_l(0) = -(1 - (1 - S/U_b)\varepsilon_e)(1 - \gamma)U_b - \varepsilon_e S. \quad (2.10)$$

Проинтегрировав уравнение (2.6), имеем

$$(U_l - U_b) = \frac{B_1}{(1 - \varepsilon)(1 - C)}. \quad (2.11)$$

Следующие граничные условия справедливы для ε и C на концах погранслоя

$$C(\infty) = C_0, \quad C(0) = C_e, \quad \varepsilon(\infty) = 0, \quad \varepsilon(0) = \varepsilon_e. \quad (2.12)$$

Семь неизвестных B , B_1 , U_b , C , U_l , ε , ε_e связаны семью соотношениями (2.8), (2.10), (2.11) и (2.12).

Полученную систему нетрудно свести к двум уравнениям относительно ε_e и B .

$$\frac{B(1 - C_0)}{\gamma(1 - \varepsilon_e)(1 - C_e)} - \frac{B - \varepsilon_e S}{(1 - \gamma)\varepsilon_e + \gamma} = 0, \quad (2.13)$$

$$U_b + \frac{B - \varepsilon_e S}{(1 - \gamma)\varepsilon_e + \gamma} = -(1 - (1 - \frac{S}{U_b})\varepsilon_e)(1 - g)U_b - \varepsilon_e S. \quad (2.14)$$

Система (2.13), (2.14) решается численно. Из-за наличия компенсационного течения решения для распределений $\varepsilon(z)$, $C(z)$ уточняются членами порядка $O(1 - \gamma)$. Зависимости содержания кристаллов в расплаве у границы застывания (ε_g) в зависимости от $\gamma = \rho_l/\rho_s$ при различных S приведены на рис. 3. (При реальных $\gamma \approx 0.9$ этим эффектом можно пренебречь.)

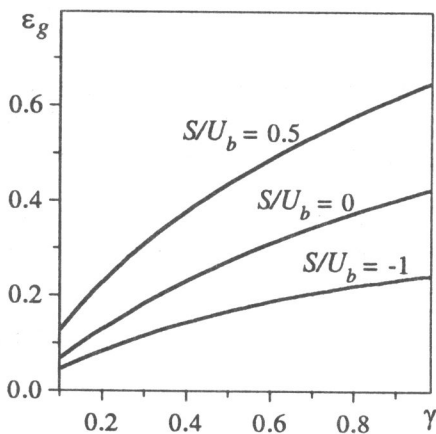


Рис. 3. Рассчитанная зависимость граничного содержания кристаллов в расплаве ε_g (на фронте затвердевания) от объемного эффекта фазового превращения $\gamma = \rho_s/\rho_l$ при 3-х относительных скоростях перемещения кристаллов S/U_b ($S > 0$ для погружения, $S < 0$ для всплывания кристаллов)

Компенсационное течение может стать значимым при фазовых превращениях с большим объемным эффектом, например, при пузырении расплава.

2.2 Нахождение зависимости $\varepsilon(C)$ в стационарном состоянии

Сумма уравнений (1.1) и (1.3) представляет уравнение сохранения для полного содержания компонента А после исключения функции источников

$$\frac{\partial}{\partial t}((1 - \varepsilon)C + \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon U_s + U_l(1 - \varepsilon)C) = 0. \quad (2.15)$$

Учитывая уравнения (2.2) и (2.3), запишем (2.15) в движущихся с фронтом координатах для стационарного состояния

$$-\frac{\partial}{\partial z}U_b((1 - \varepsilon)C + \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon U_s(1 - C)) = 0. \quad (2.16)$$

Общим решением уравнения (2.16) является

$$\varepsilon(z) = \frac{B - C(z)}{(1 - U_s(z)/U_b)(1 - C(z))}, \quad (2.17)$$

где B — это константа интегрирования, которая подбирается, чтобы удовлетворялось граничное условие для ε . При скорости осаждения больше U_b

$$\varepsilon(0) = 0, \quad C = C_e, \quad B = C_e. \quad (2.18)$$

Для поглощающего пограничного слоя ($j = U_s/U_b < 1$), в отличие от (2.18), граничное условие необходимо ставить на внешней границе

$$\varepsilon(\infty) = \varepsilon_0, \quad C = C_0, \quad B = C_0 + \varepsilon_0(1 - j)(1 - C_0). \quad (2.19)$$

Простое алгебраическое выражение для $\varepsilon(C)$ (2.17) позволяет изучить свойства распределений $\varepsilon(z)$, $C(z)$, не находя их точного вида. Оно также может быть использовано для проверки численного решения при нахождении распределения кристаллов более сложной формы по их размерам с глубиной.

2.3. Нахождение зависимости $T(z)$ в стационарном состоянии

Линейный масштаб задачи определяет уравнение теплового баланса. В системе, движущейся со скоростью фронта полного затвердевания, естественными масштабами скорости и расстояния будут U_b и $l_0 = k_T/U_b$, соответственно. Уравнение для $T(z)$ в стационарном состоянии в движущихся координатах принимает вид

$$\left(U_b \frac{\partial}{\partial z} \left(T - \frac{L}{c_p} \varepsilon \right) + \frac{L}{c_p} \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon (U_s - U_b) + k_T \frac{\partial^2}{\partial z^2} T \right) \frac{k_t}{U_b^2} = 0. \quad (2.20)$$

Масштабом температуры выберем ликвидусный склон m_l : $T' = (T - T_e)/m_l$. При этом единственным безразмерным параметром будет число Стефана $Ste = L/(m_l c_p)$. В результате имеем

$$\frac{d^2 T}{dz^2} + \frac{d}{dz} (T + Ste \varepsilon (U_s/U_b - 1)) = 0.$$

После подстановки ε через (2.17) и с учетом того, что $C = C_e + T'$, отбросив штрих, получим

$$\frac{d^2 T}{dz^2} + \frac{d}{dz} \left(T + Ste \frac{1 - B}{1 - C_e - T} \right) = 0.$$

В условии Стефана вводится безразмерный тепловой поток

$$Q^* = Q/Q_0, \quad Q_0 = m_l \lambda / l_0 = m_l c_p \rho U_b, \quad (2.21)$$

а само условие, исходя из (1.10), принимает вид

$$(1 - \varepsilon(0)^*(1 - j))Ste + \partial T / \partial z = Q^*. \quad (2.22)$$

Если зависимость $\varepsilon(C)$ без разрывов, нетрудно найти стационарное распределение $T(z)$. Поскольку тепловой эффект объемной кристаллизации в уравнении теплового баланса (2.20) входит как дивергенция $\varepsilon(U_s - U_b)$, а ε обратно пропорциональна $(U_s - U_b)$ согласно уравнению (2.17), то распределение температуры зависит от осаждения кристаллов только через коэффициент B в (2.17). Уравнение теплового баланса принимает вид

$$\partial T / \partial z = - \left(T + \frac{\beta}{\alpha - T} + B_1 \right), \quad \beta = Ste(1 - B), \quad \alpha = 1 - C_e, \quad (2.23)$$

$$-z = \int \frac{dt}{\left(T + \frac{\beta}{\alpha - T} + B_1 \right)} + B_2.$$

Интеграл нетрудно выразить в виде

$$z = \Phi(T, B_1) + B_2, \quad (2.24)$$

где

$$\Phi(T, B_1) = -\frac{(B_1 + \alpha)}{2\sqrt{4\beta + (B_1 + \alpha)^2}} \ln\left(\frac{Q + 1}{1 - Q}\right) + 1/2 \ln(P),$$

$$Q = \frac{\alpha - 2T - B_1}{\sqrt{4\beta + (B_1 + \alpha)^2}}, \quad P = -T^2 + (\alpha - B_1) + \alpha B_1 + \beta.$$

Константа B_2 находится из граничных условий для температуры на фронте затвердевания: при $z = 0$

$$T = 0 \quad \text{или} \quad B_2 = -\Phi(0, B_1). \quad (2.25)$$

Условие Стефана в соответствии с уравнениями (2.22), (2.17) и (2.23) сводится к очень простой связи константы интегрирования B_1 и безразмерного теплового потока $Q^*(U_b)$: $Q^* = -B_1$. Значение B_1 можно найти из уравнения (2.23), воспользовавшись равенством нулю температурного градиента вдали от фронта полного затвердевания при $T = C_0 - C_e$. Это дает

$$B_1 = -\left(C_0 - C_e + \frac{\text{Ste}(1 - B)}{1 - C_0}\right). \quad (2.26)$$

Из (2.21) следует, что решения при данном B_1 и различных тепловых потоках будут подобны с различными линейными масштабами k_T/U_b . Чем меньше тепловой поток, тем больше линейный масштаб. Полное подобие наблюдается при соблюдении условий $U_b/U_s > 1$ (или $U_b/U_s < 1$) во всем интервале, а также при соблюдении постоянства константы B при ненулевом начальном содержании твердой фазы ϵ_0 .

Существенно, что решение (уравнения (2.24) и (2.17)) определяет в явной форме источник $\Gamma(z)$ во всем интервале (C_e, C_0) , например, в соответствии с уравнением (2.4).

3. АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ В ПЕРЕМЕННЫХ ϵ, C

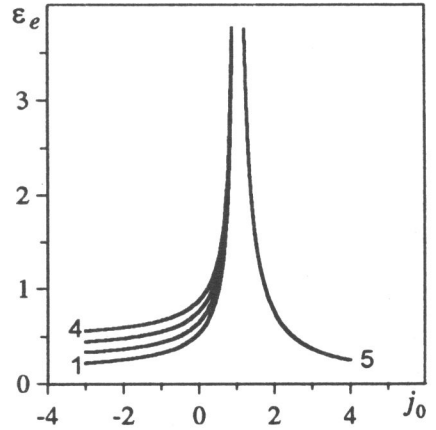
3.1 Линеаризованный случай $U_s = S$ (без противотока)

Зависимостью скорости осаждения U_s от содержания твердой фазы для простоты можно пренебречь, тогда $U_s = S$ и $j = j_0$. Два типа решения [14, 15] существуют при $j_0 = U_s/U_b > 1$ и $j_0 < 1$. При $j_0 > 1$ все надэвтектические кристаллы А избегают захвата фронтом затвердевания $\epsilon(0) = 0$, только это граничное условие удовлетворяет (1.9). При этом в уравнении (2.26) константа $B = C_e$, тогда как при $j_0 < 1$ все кристаллы захватываются фронтом полного затвердевания. Значение константы B , входящей в уравнение (2.26), зависит от содержания кристаллов на бесконечности. Если в расплаве изначально кристаллов нет, то константа $B = C_0$.

Рассматриваемое линеаризованное (без учета противотока) решение имеет особенность в точке $j_0 = 1$. Содержание кристаллов у фронта (при $j_0 < 1$) и на бесконечном удалении (при $j_0 > 1$) стремится к бесконечности при j_0 , стремящемся к единице (рис. 4).

Рис. 4. Стационарное объемное содержание кристаллов на границах двухфазного погранслоя ϵ_e в зависимости от относительной стоксовой скорости осаждения кристаллов $j_0 = U_s/U_b$ без учета противотока расплава и для кристаллов одного размера.

1-4 – рассчитанные значения содержания кристаллов ϵ_1 на верхней границе при $j_0 < 1$ для 4-х заданных значений содержаний кристаллов на нижней границе камеры: 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, соответственно; 5 – рассчитанное содержание кристаллов ϵ_2 на нижней границе пограничного слоя при $j_0 > 1$ для заданного содержания кристаллов на фронте полного затвердевания, равного нулю



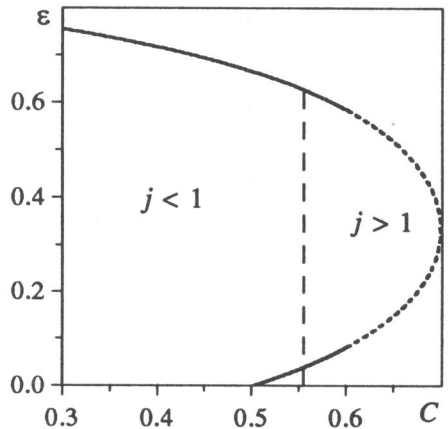
3.2 Эффект противотока

Если кристаллы образуются в тепловом пограничном слое, их стоксова скорость обычно не превосходит значительно скорости фронта затвердевания и вследствие влияния противотечения и возрастания вязкости можно ожидать, что термальный пограничный слой разбивается на две части $j < 1$ и $j > 1$.

Легче анализировать свойства $\epsilon(z)$ и $C(z)$ распределений на проекции $\epsilon(C)$. Поскольку C является монотонной функцией z , топологически зависимость $\epsilon(C)$ подобна $\epsilon(z)$. Нетрудно заметить, что уравнение (2.17) задает параболу $C(\epsilon)$, а обратная функция $\epsilon(C)$ становится многозначной с верхней и нижней ветвями (рис. 5).

Рис. 5. Рассчитанная зависимость содержания объемной доли кристаллической фазы $\epsilon(z)$ компонента А от ее концентрации в расплаве $C(z)$ при скорости осаждения кристаллов $S/U_b = 3$ ($C_0 = 0.6, C_e = 0.3$).

Штриховая вертикальная линия делит погранслой на области, где $U_s = S(1-\epsilon)$ меньше и больше, чем U_b ; пунктирная соответствует области, в которой концентрация компонента А больше начальной. Значение концентрации в точке пересечения кривой с осью C равно константе интегрирования B в уравнении сохранения компонента А



Решение с $j > 1$ во всем пограничном слое. Положение параболы определяется значением константы B или ее точкой пересечения с осью C . При этом C_e является ее крайне левым положением и при этом $\epsilon(z = 0) = \epsilon(C = C_e) = 0$, а $B = C_e$. Зависимость $\epsilon(C)$ опишет интервал $(C_e, C_T(j_0))$ (см. рис. 5).

$$C_T = \{(1 - j_0)^2 + 4C_e\} / \{(1 + j_0)^2\}.$$

Если $C_T(j_0) > C_0$, то стационарное решение с $j > 1$ возможно во всем концентрационном интервале. Нетрудно показать, что значение j_0 , обеспечивающее условие $C_T = C_0$, равно

$$j_{0,T} = \frac{\{2[1 - C_e](C_0 - C_e)\}^{0,5} + (C_0 - C_e) + (1 - C_e)}{(1 - C_0)}.$$

Для $C_0 = 0.6$ и $C_e = 0.3$ оно составит 4.791.

Стационарное решение, отвечающее верхней ветви зависимости $\varepsilon(C)$, также существует, но оно не достижимо, так как подразумевает большое содержание твердой фазы на бесконечном удалении.

Решение с внутренней границей. Если $j_0 < j_{0,T}$, погранслоем разбивается на части с $j > 1$ и $j < 1$. Стационарное решение для $j_0 < j_{0,T}$ можно получить, положив $B = C_g$ при $C_e < C_g < C_0$. Тогда на верхней ветви зависимости $\varepsilon(C)$ при $C = C_g$ имеем $U_s/U_b = 1$, а $\varepsilon = \varepsilon_g = 1 - 1/j_0$. На нижней ветви при $C = C_g$ содержание твердой фазы $\varepsilon = 0$. Минимальное значение C_g , при котором функция $C(\varepsilon)$ покрывает весь интервал (C_e, C_0) , равно

$$C_g = \frac{1}{4} \frac{-(1 - S/U_b)^2 + C_0(1 + S/U_b)^2}{S/U_b}.$$

Точка $C = C_g$ делит верхнюю ветвь $\varepsilon(C)$ на левую часть с $j < 1$ и правую с $j > 1$ (см. рис. 5). Непрерывность потока кристаллов в движущейся системе координат в точке $C = C_g$ на верхней ветви решения обеспечивается, поскольку относительная скорость кристаллов в ней равна нулю.

Одно гладкое распределение $T(z)$ описывает температуру во всем интервале (C_e, C_0) . Коэффициент B_1 определяется граничным условием $C(\infty) = C_0$ по уравнению (2.26):

$$B_1 = -(C_0 - C_e + Ste(1 - C_g)/(1 - C_0)).$$

Выше при определении типа решения мы оперировали с параметром $j_0 = S/U_b$. Но скорость перемещения фронта полного затвердевания зависит от содержания вкрапленников, т.е. от S . Более законченной является оценка, основанная на независимых физических параметрах. Согласно (2.23) константа интегрирования $-B_1 = Q^*/U_b(\delta, C_g)$, где $Q^* = Q/\rho m_1 c_p$,

$$\frac{Q}{U_b} = -B_1 = C_0 - C_e + \frac{Ste(1 - C_g)}{(1 - C_0)}. \quad (3.1)$$

При $C_g = C_0$ минимальный уровень скорости осаждения, при котором появляется интервал с кристаллами, избегающими захвата, достигается при $j_0 = 1$. Из (3.1) следует, что эта первая критическая скорость осаждения S_1 равна

$$S_1 = \frac{Q}{\rho m_1 c_p (C_0 - C + Ste)}.$$

Аналогичным образом второй критический уровень стоксовой скорости, обеспечивающий условие $j > 1$ во всем интервале (C_e, C_0) при $C_1 = C_e$, достигается при $j_0 = 4.791$ (при $C_0 = 0.6$, $C_e = 0.3$, общее выражение громоздко, но получается тривиально). Мы имеем

$$S_2 = \frac{4.791Q}{\rho m_1 c_p \left(C_0 - C_e + \text{Ste} \frac{(1-C_e)}{(1-C_0)} \right)}.$$

Таким образом, при значениях скорости осаждения $S \in (0, S_1)$ все кристаллы фазы А захватываются фронтом затвердевания. В этом режиме скорость фронта затвердевания достигает своего максимального значения, равного $U_b = S_1$. При увеличении S происходит частичное осаждение кристаллов, сопровождающееся падением скорости фронта до уровня $S_2/4.791$. При $S > S_2$ появляется стационарное решение с осаждением всей надэвтектической фазы А. Смена режима от полного захвата до полного осаждения происходит при изменении скорости осаждения от уровня S_1 до $S_2 = 2.9 S_1$ (при $\text{Ste} = 2$, $C_0 = 0.6$, $C_e = 0.3$). Эффективный размер кристаллов при этом изменяется примерно в два раза. При $S > S_1$ возможно множество стационарных состояний с различными значениями C_g . Максимальное осаждение кристаллов обеспечивает C_g , максимально приближенное к C_e .

4. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Упрощенная форма балансовых уравнений для энтальпии и полного содержания компонента А компенсируется необходимостью разрешать в общем виде нелинейные неявные выражения $T(H, C_A)$ и $\varepsilon(H, C_A)$. Но для этого требуются итерационные методы. Успешное применение этого подхода для моделирования геохимической эволюции магматических систем продемонстрировано Френкелем [3]. В нашем случае для нахождения объемной доли твердой фазы требуется решить квадратное уравнение. Мы используем эту формулировку для численного исследования случая скорости осаждения с учетом противотока. Дифференциальные уравнения баланса для H и C_A имеют вид

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + S(1 - 2\varepsilon)\text{Ste} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + U_b \frac{\partial H}{\partial z},$$

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = -S(1 - 2\varepsilon)(1 - T - C_e) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - S(1 - \varepsilon)\varepsilon \frac{\partial T}{\partial z} + U_b \frac{\partial C_A}{\partial z}.$$

В качестве начального принимается состояние расплава с постоянной температурой $T(z, 0)$ и с нулевым содержанием кристаллов $\varepsilon(z, 0) = 0$.

Результаты численного расчета эволюции распределения содержания кристаллов $\varepsilon(z, t)$ представлены на рис. 6, 7 и 8 для различных величин стоксовой скорости оседания кристаллов S ; величина S/U_b равна, соответственно, 1/25, 4.0 и 0.5. Во всех случаях на малых временах реализуется переходной режим, когда происходит установление решения $\varepsilon(z, t)$, и характер этого режима зависит от скорости осаждения S .

Рис. 6 показывает, что ближний к фронту затвердевания склон $d\varepsilon/dt > 0$ неустойчив (напомним, что задача решается в системе координат, движущейся вместе с фронтом, для которого $z = 0$). Причина этой неустойчивости состоит в следующем. Благодаря эффекту противотока, скорость осаждения убывает с приближением к максимуму распределения, т.е. $dU_s/dz < 0$. На распределении начинает образовываться складка, что приводит к решению типа ударной волны. Эта складка постепенно мигрирует по направлению к фронту затвердевания со скоростью, определяемой уравнением (1.8). В результате на больших временах возникает распределение $\varepsilon(z, t)$ с внутренней границей, разделяющей пограничный слой на две части: в верхней части кристаллы поглощаются фронтом, а в нижней – они падают на дно.

Участки численного решения справа от пика (см. рис. 6, б, 7, б и 8, б) хорошо согласуются с аналитическим решением, которое было получено авторами для стационарного случая [15–17].

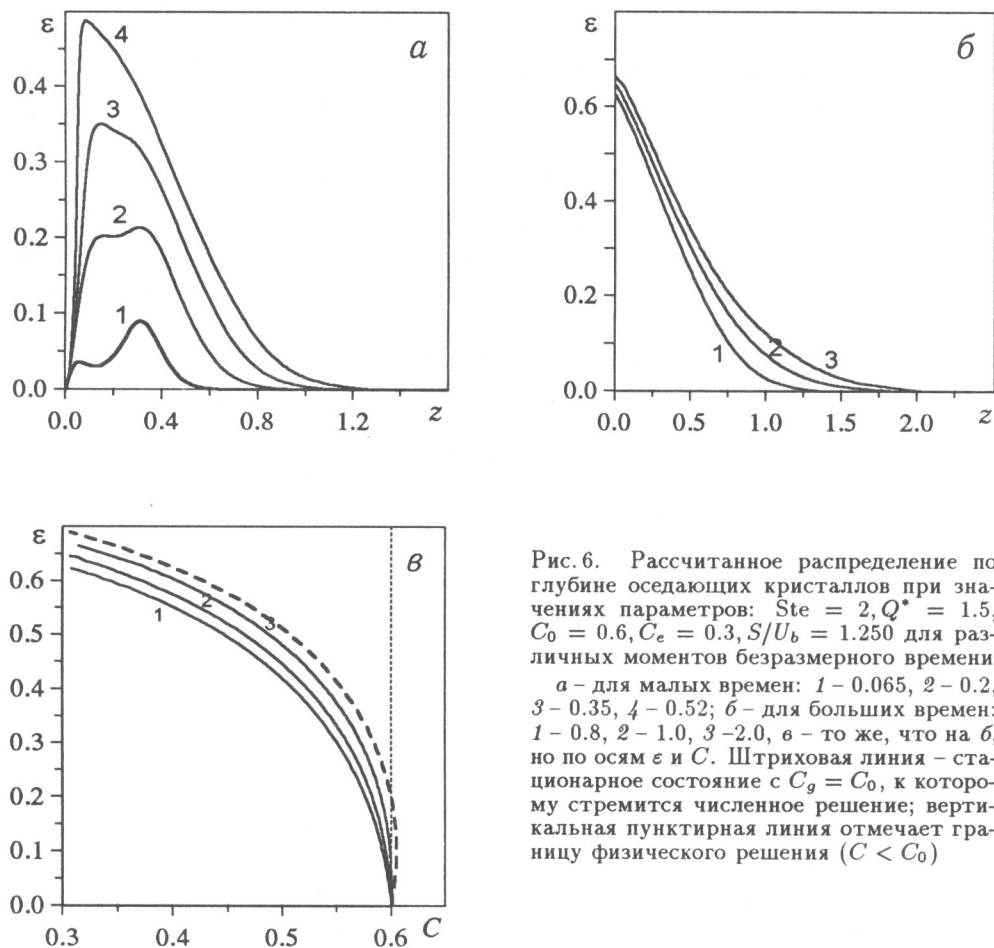


Рис. 6. Рассчитанное распределение по глубине оседающих кристаллов при значениях параметров: $Ste = 2, Q^* = 1.5, C_0 = 0.6, C_e = 0.3, S/U_b = 1.250$ для различных моментов безразмерного времени:

а – для малых времен: 1 – 0.065, 2 – 0.2, 3 – 0.35, 4 – 0.52; б – для больших времен: 1 – 0.8, 2 – 1.0, 3 – 2.0, в – то же, что на б, но по осям ε и C . Штриховая линия – стационарное состояние с $C_g = C_0$, к которому стремится численное решение; вертикальная пунктирная линия отмечает границу физического решения ($C < C_0$)

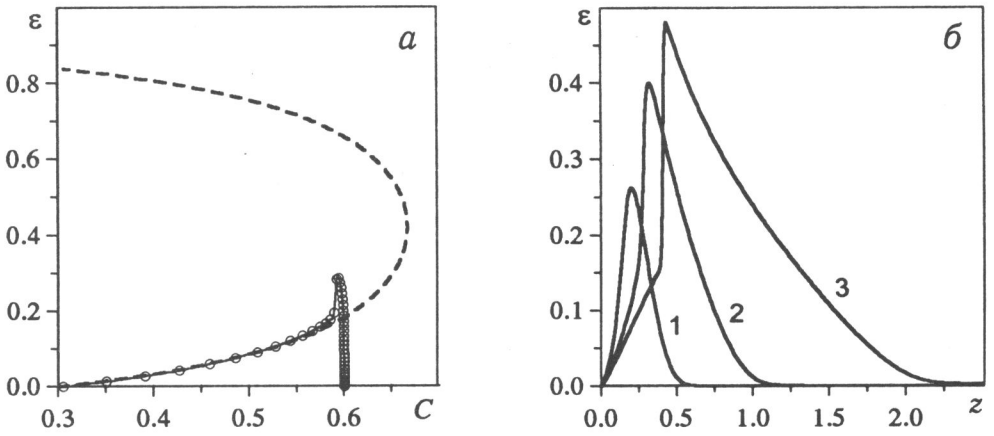


Рис. 7. Рассчитанное распределение кристаллов в пограничном слое при большой скорости осаждения кристаллов $S/U_b = 4.0$ для тех же значений параметров Ste, Q^*, C_0, C_e , что и на рис. 6:

а – зависимость содержания кристаллов от концентрации компонента в расплаве $\epsilon(C)$, пунктиром показано стационарное решение, полученное полуаналитическим методом, символами – полученное численным методом для безразмерного времени $t = 0.5$; б – распределение кристаллов по глубине $\epsilon(z)$ для 3-х значений безразмерного времени, асимметричный пик со временем движется от фронта затвердевания

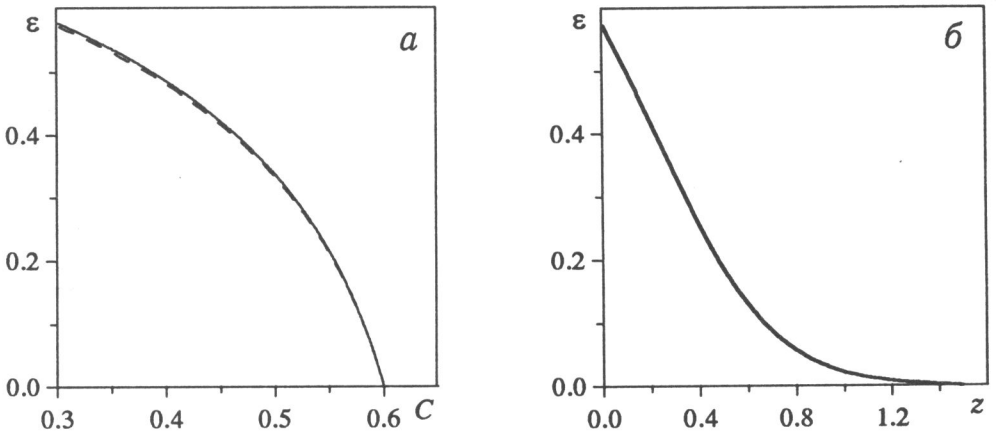


Рис. 8. Распределение кристаллов в пограничном слое, рассчитанное для малой скорости осаждения $S/U_b = 0.5$ в момент безразмерного времени $t = 1$. Значения параметров Ste, Q^*, C_0, C_e те же, что и на рис. 6:

а – зависимость содержания кристаллов от концентрации компонента в расплаве $\epsilon(C)$, штриховой линией показано стационарное решение $t \rightarrow \infty$; б – распределение кристаллов по глубине $\epsilon(z)$

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Отмеченные выше разрывные распределения оседающих кристаллов по природе подобны разрывам в распределении всплывающего в кристаллической матрице расплава [18]. В обоих случаях гиперболический характер уравнения переноса предопределяет возможность появления складок и решений типа ударных волн. В нашем случае необходимым условием появления разрывов является инверсия в распределении содержания кристаллов $d\varepsilon(z)/dz > 0$, что соответствует условию возникновения уединенных волн при миграции расплава с компакцией вмещающей среды $df(z)/dz > 0$ (где f – доля расплава). Аналогичные явления наблюдаются и при всплывании пузырей [19]. Однако следует отметить, что образование горизонтальных полос всплывающих пузырей может происходить также за счет эффекта противотока, а не только от возрастания эффективной вязкости расплава при повышении концентрации пузырей, как предполагает Манга [19]. Эксперименты указывают на то, что эффективная вязкость смеси расплава и пузырей может слегка падать при росте их содержания [20] в отличие от роста вязкости при увеличении содержания кристаллов в расплаве [4].

Полученные результаты свидетельствуют о том, что при отсутствии конвекции пограничный слой с оседающими кристаллами обладает способностью аккумулировать почти все оседающие кристаллы в соответствии с выводами работы [21] о слабой степени гравитационной дифференциации в интрузивах малого и среднего размера. При этом следует отметить, что поскольку кристаллы, как правило, тяжелее расплава, верхний пограничный слой конвективно неустойчив. Стабилизировать его может лишь происходящая параллельно с кристаллизацией дегазация расплава. Контраст плотности пузырей и расплава значительно превосходит контраст плотности кристаллов и расплава. Поэтому даже незначительная объемная доля пузырей способна стабилизировать пограничный слой [22]. Исследование содержания пузырей и кристаллов в застывшей корке лавовых озер показало, что вкрапленники захватываются фронтом вместе с пузырями [23]. Данные систематических измерений вариаций кристаллов и пузырей в апикальной части пикритового пластообразного интрузива (силла) приводятся в работе Торамару и др. [24]. Авторы этой работы выделяют волнообразное распределение пузырей и кристаллов вкрапленников в продуктах кристаллизации. В то же время можно ожидать, что часть кристаллов будет покидать стабилизированный пузырями пограничный слой и участвовать в седиментационной конвекции [5].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено направленное (сверху) затвердевание двухкомпонентного расплава с объемным ростом и осаждением надэвтектической фазы. В ранней публикации авторы предложили использовать замкнутую систему уравнений для описания тепло- и массообмена при равновесной кристаллизации осаждающихся кристаллов до полного застывания эвтектики. В данной работе эта система обобщена с учетом эффектов противотока расплава, вызванного осаждением кристаллов, и течения, вызванного разностью плотностей растущих кристаллов и расплава. При осаждении кристаллов локальное противотечение расплава уменьшает абсолют-

ную скорость осаждения до $U_s = S(1 - \varepsilon)$. В результате кристаллы из менее концентрированных областей будут догонять кристаллы с большим числом соседей. Это ведет к образованию разрывов в распределении концентрации твердой фазы.

Другим проявлением противотока расплава является расщепление сингулярности, появляющейся при решении линеаризованного уравнения (при $U_s = S$). Сингулярность в виде бесконечного роста содержания кристаллов появляется, когда величина стоксовой скорости осаждения S приближается к значению скорости перемещения фронта полного затвердевания (U_b). Кристаллы, оседающие со скоростями меньше, чем U_b , захватываются фронтом, а с большими скоростями успевают упасть на дно. При $S = U_b$ кристаллы становятся неподвижными относительно фронта, а их объемное содержание растет бесконечно вследствие объемной кристаллизации. При учете изменения стоксовой скорости осаждения сингулярность пропадает, так как появляются множества новых решений. В связи с увеличением объемного содержания кристаллов около фронта полного затвердевания их скорость осаждения становится меньше, чем U_b . В то же время во внешней части погранслоя $U_s > U_b$ и внутренняя граница разбивает пограничный слой на две части. Этот эффект ведет к уменьшению потока твердой фазы от верхней границы при быстром охлаждении лавовых озер и силлов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Главные переменные для описания системы

- C_i – концентрация i -го компонента
- C_g – концентрация компонента А в точке, где скорость оседания U_s равна скорости фронта U_b на верхней ветви параболы $\varepsilon(C)$
- H – энтальпия
- n – число кристаллов в единице объема расплава
- R – радиус кристалла
- t – время
- T – температура
- T_m^i – температура плавления чистого i -го компонента
- T_l – температура ликвидуса кристаллической фазы
- z – вертикальная координата, расстояние от движущегося фронта после преобразования координат
- Γ – функция источника компонента А в объемном исчислении
- ε – объемное содержание твердой фазы в расплаве
- ε^- – содержание кристаллической фазы А за (по движению) разрывом в распределении
- ε^+ – содержание кристаллической фазы А перед скачком
- ε_0 – содержание кристаллической фазы в расплаве на бесконечном удалении от фронта затвердевания
- ε_e – содержание кристаллической фазы в расплаве на фронте затвердевания (при эвтектической температуре)
- ε_g – содержание кристаллической фазы в точке, где скорость оседания U_s равна скорости фронта U_b на верхней ветви параболы $\varepsilon(C)$
- Ω – поверхность кристаллов

Различные скорости

- S – относительная скорость движения кристаллов по Стоксу
 U_s – скорость перемещения твердой фазы
 U_l – скорость течения жидкости
 U_b – скорость перемещения фронта полного затвердевания
 U_d – скорость перемещения разрыва
 V – линейная скорость роста кристаллов

Физические параметры

- c_p – теплоемкость
 λ – теплопроводность
 k_T – коэффициент температуропроводности
 L – теплота плавления
 m_l – ликвидусный склон, равный понижению ликвидусной температуры при добавлении 1% компонента в расплав
 Q – поток тепла
 η – вязкость расплава
 ρ – плотность

Безразмерные параметры и масштабы

- j – скорость оседания кристаллов, нормированная на скорость движения фронта затвердевания (U_s/U_b)
 l_0 – линейный масштаб задачи, равный k_T/U_b
 Q_0 – масштаб теплового потока, равный $\lambda m_l/l_0$
 Q^* – тепловой поток, нормированный на Q_0
 Ste – число Стефана, равное $L/(m_l c_p)$
 γ – отношение плотностей расплава и кристаллической фазы (ρ_l/ρ_s)

Настоящая работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 98-05-64112).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Solomatov V., Stevenson D.* Kinetics of crystal growth in a terrestrial magma ocean // *J. Geophys. Res.* 1993. Vol.98. P.5407-5418.
2. *Ghiorso M.* Chemical mass transfer in magmatic processes II: application to equilibrium crystallization, fractionation and assimilation // *Contrib. Mineral. Petrol.* 1985. Vol.90. P.121-141.
3. *Френкель М.Я.* Термическая и химическая динамика дифференциации основной магмы. М.: Наука, 1995. 239 с.
4. *Rudman M.* Two-phase natural convection: implications for crystal settling in magma chambers // *Phys. Earth and Planet. Int.* 1992. Vol.72. P.153-172.
5. *Simakin A.G., Schmeling H., Trubitsyn V.P.* Convection in melts due to sedimentative crystal flux from above // *Phys. Earth and Planet. Int.* 1997. Vol.102. P.185-200.
6. *Brandeis G., Jaupart C., Allegre C.* Nucleation, crystal growth and thermal regime of cooling magmas // *J. Geophys. Res.* 1984. Vol.89, N B12. P.10161-10177.

7. *Jarvis R., Woods A.* The nucleation, growth and settling of crystals from turbulently convecting fluid // *J. Fluid Mech.* 1994. Vol.213. P.83-107.
8. *Worster G., Huppert H.* The crystallization of lava lakes // *J. Geophys. Res.* 1993. Vol.98, N B9. P.15891-15900.
9. *Hort M.* Cooling and crystallization in sheet-like magma bodies revisited // *EPSL.* 1997. Vol.76. P.297-317.
10. *Brandeis G., Jaupart C.* On the interaction between convection and crystallization in cooling magma chambers // *Earth and Planet. Sci. Lett.* 1986. Vol.77. P.345-361.
11. *Marsh B.D.* Magma chambers // *Ann. Rev. Earth and Planet. Sci.* 1989. Vol.17. P.439-474.
12. *Mangan M., Marsh B.* Solidification front fractionation in phenocryst-free sheet-like magma bodies // *J. Geology.* 1992. Vol.100. P.605-620.
13. *Koyaguchi T., Hallwarth H., Huppert H.* An experimental study on the effects of phenocrysts on convection in magmas // *J. Volcan. Geotherm. Res.* 1993. Vol.55. P.15-32.
14. *Simakin A., Trubitsyn V., Schmeling H.* Structure of the upper boundary layer of a solidifying intrusion with crystal sedimentation // *Earth and Planet. Sci. Lett.* 1994. Vol.126. P.333-349.
15. *Симакин А.Г., Трубицын В.П., Харыбин Е.В.* Распределение по размерам и глубине для кристаллов, осаждающихся в застывающей магматической камере // *Физика Земли.* 1998. N 8. С.30-37.
16. *Симакин А.Г., Трубицын В.П.* Эволюция структуры остывающей магматической камеры // *Физика Земли.* 1995. N 2. С.1-13.
17. *Симакин А.Г., Трубицын В.П.* Захват фронтом застывания растущих и оседающих в магматической камере кристаллов // *Физика Земли.* 1997. N 10. С.3-13.
18. *Khodakovskii G., Rabinovitz M., Ceuleneer G., Trubitsyn V.* Melt percolation in a partially molten mantle mush: Effect of a variable viscosity // *EPSL.* 1995. Vol.134. P.267-281.
19. *Manga M.* Waves of bubbles in basaltic magmas and lavas // *J. Geophys. Res.* 1996. Vol.101, N B8. P.17.457-17.465.
20. *Bagdassarov N.S., Dingwell D.B.* A rheological investigation of vesicular rhyolite // *J. Volcan. Geotherm. Res.* 1992. Vol.50. P.307-322.
21. *Gibb F.G.F., Henderson C.M.B.* Convection and crystal settling in sills // *Mineralogy and Petrology.* 1992. Vol.11. P.540-545.
22. *Wallance P., Anderson A.T., Davis A.* Quantification of preeruptive exsolved gas contents in silicic magmas // *Nature.* 1995. Vol.377. P.612-616.
23. *Helz R.T.* Differentiation behavior of Kilauea Iki lava lake, Kilauea Volcano, Hawaii: An overview of past and current work // *In Magmatic processes Physicochemical Principles.* Geoch. Soc. / Ed. Mysen. B.O. Special Publ. N 1. 1987. P.241-257.
24. *Toramaru A., Ishiwatarai A, Matsuzawa M., Nakamura N., Arai S.* Vesicle layering in solidified intrusive magma bodies: a newly recognized type of igneous structure // *Bull. Volcanol.* 1996. N.58. P.393-400.