

УДК 550.311

ТРЕХМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЛЯНОГО ДИАПИРИЗМА: ЧИСЛЕННЫЙ ПОДХОД И АЛГОРИТМ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

А.Т. Исмаил-заде

*Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук, Москва*

И.А. Цепелев

*Институт математики и механики Уральского отделения
Российской академии наук, Екатеринбург*

К. Тэлбот

Департамент наук о Земле, Уппсальский университет, Швеция

П. Остер

*Центр параллельных компьютеров, Королевский институт
технологий, Стокгольм, Швеция*

В работе предлагается метод вычисления трехмерных вязких течений, который можно использовать при анализе движений соли в осадочных бассейнах. Численный подход основан на методе Галеркина и представлении векторного потенциала скорости несжимаемой вязкой жидкости в виде линейной комбинации трикубических сплайнов с неизвестными коэффициентами. Переменные вязкость и плотность представляются в виде линейных комбинаций трilinearных функций с неизвестными коэффициентами, которые находятся из системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), полученных из уравнений переноса вязкости и плотности. Коэффициенты разложений компонент векторного потенциала составляют решение системы линейных алгебраических уравнений (ЛАУ), вытекающих из уравнений Стокса. Предлагается алгоритм параллельных вычислений для решения систем ОДУ и ЛАУ и анализируется исполнение алгоритмической программы. Численный метод и алгоритм расчетов применяются при моделировании соляного диапиризма. Исследуется рост соляного диапира в надсолевых осадках, отложившихся до начала движения соли. Рассмотрены две модели эволюции соляного слоя от его начального положения до зрелых диапировых структур: (1) слой соли на дне модельной области, перекрытый осадками и (2) наклонный слой соли между подсолевыми и надсолевыми осадками. В результате численного моделирования получены такие типичные структуры соляного диапиризма, как глубинные полигоны плавучих хребтов, приповерхностные пологи соляных штоков и другие.

THREE-DIMENSIONAL MODELLING OF SALT DIAPIRISM: A NUMERICAL APPROACH AND PARALLEL ALGORITHM

A.T. Ismail-Zadeh

*International Institute of Earthquake Prediction Theory and
Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow*

I.A. Tsepelev

*Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Branch, Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg*

C. Talbot

Department of Earth Sciences, Uppsala University, Sweden

P. Öster

*Paralleldatorcentrum, Kungl. Tekniska Högskolan,
Stockholm, Sweden*

We present a numerical approach and parallel algorithm for computing three-dimensional viscous flows, which can be useful for the analysis of salt movements in sedimentary basins. We employ the Galerkin method and represent a vector potential for velocity of incompressible viscous flows as a linear combination of tricubic splines with unknown coefficients. Density and viscosity are represented as linear combinations of trilinear functions with unknown coefficients. The unknown coefficients in the representations of density and viscosity are found from sets of ordinary differential equations following from the equation for advection of these variables. The coefficients in spline representations of vector potential entering the right-hand sides of these equations are found from the linear algebraic equations following from Stokes equations. We suggest a parallel algorithm to solve the relevant system of linear algebraic and ordinary differential equations. A performance of the solution algorithms is analyzed. The numerical method and parallel algorithm are designed to model salt diapirism. We simulate the growth of salt diapirs in a sedimentary overburden that was present prior to the movement. Two models of evolution of a salt layer from an immature form into mature upbuilt diapiric structures are considered: (i) salt layer at the bottom of the model region overlain by sediments and (ii) inclined salt layer between subsalt layer and salt overburden. The model phases of salt diapirism show such typical structures as deep polygonal buoyant ridges, shallow salt-stock canopies and others.

ВВЕДЕНИЕ

Соляной диапиризм – хорошо известный геологический процесс, происходящий во многих осадочных бассейнах. Он характеризуется подъемом соли, обладающей пониженной относительно вышележащих осадков плотностью и вязкостью, и деформацией надсолевых осадков. Хотя формы соляных диапиров достаточно разнообразны, их эволюция является следствием физического процесса гравитационной неустойчивости менее плотной соли, лежащей под более плотными осадками. При возмущении границы раздела между солью и вышележащими осадками соль начинает подниматься вверх, а осадки погружаются вниз из-за инверсии плотности.

Скорость роста таких возмущений зависит от разности плотностей и отношения эффективных вязкостей соли и надсолевых осадков, от толщины слоев, а также от граничных условий.

В результате улучшения технических средств для сейсмического зондирования коры и бурения скважин, а также усовершенствования обработки полученных данных появляется возможность детального исследования эволюции соленодных бассейнов. Используемая в последнее время при разведке на нефть и газ трехмерная сейсмика предоставляет уникальные данные о форме соляных структур и деформации надсолевых осадков и, таким образом, указывает на необходимость трехмерного моделирования эволюции соленодных бассейнов.

При изучении соляного диапиризма использовались три основных подхода: аналитические методы, позволяющие изучать рост малых возмущений в среде с инверсией плотности, численные методы моделирования больших деформаций среды и физические эксперименты. Теория гравитационной неустойчивости (или неустойчивости Рэлея-Тейлора) многослойной среды хорошо развита в работах [1-3], где изучался рост малых возмущений вязкой среды при различных усложняющих факторах (например, переменная вязкость, различная толщина слоев, компакция осадков). С помощью аналитических методов в работе [4] исследовалась форма соляных диапиров, выдавленных на поверхность. Гравитационная неустойчивость геологической среды с максвелловской вязкоупругой реологией анализировалась в работах [5,6]. Заметим, что аналитические методы позволяют изучать начальную линейную стадию развития неустойчивости, однако они неприменимы для исследований более поздних стадий нелинейного роста диапира.

Первые численные эксперименты по моделированию соляного диапиризма были представлены в работе [7], где изучалось влияние отношения вязкостей соли и надсолевых осадков на форму и скорость роста диапира. В работе [8] было установлено, что доминантная (необязательно характеристическая) длина волны возмущения и геометрия самих диапиров зависят от формы начального возмущения границы раздела между солью и вышележащими осадками. Численные результаты моделирования диапиризма в многослойной среде были представлены в работе [9]. В работах [10, 11] предлагались численные алгоритмы решения задач соляного диапиризма, а в [12, 13] – численные модели роста диапиров с учетом седиментации и переотложения осадков. Влияние реологических свойств соли и надсолевых осадков изучалось в работах [14-16]. Численный метод решения задач гравитационной неустойчивости многослойной среды, позволяющий точно отслеживать границы раздела между слоями, был предложен в работе [17] и применен при моделировании соляного диапиризма в случае равномерного и неравномерного осадконакопления. Все указанные модели, являясь двумерными, не позволяют изучать сложные формы зрелых диапиров типа соляных штоков или соляных глетчеров: очевидно, что двумерное моделирование не может выявить трехмерную форму диапиров [18]. Таким образом, возникает необходимость в трехмерном численном моделировании соляного диапиризма.

Физические эксперименты, которые проводились в тектонических лабораториях, позволяют моделировать сложные трехмерные формы соляных диапиров [19-23]. Хотя основные качественные черты диапирового роста могут быть выявлены в таких экспериментах, лабораторные методы не способны дать точную количественную характеристику диапиризма.

Численное моделирование трехмерных нестационарных вязких течений относится к области геофизической вычислительной гидродинамики и требует большого объема вычислений. В настоящей работе предлагается численный метод и алгоритм параллельных вычислений для моделирования трехмерных медленных вязких течений среды, вызванных гравитационной неустойчивостью. Дана математическая постановка задачи, описывается численный подход к решению уравнений Стокса и переноса плотности и вязкости. Данный подход основан на представлении компонент векторного потенциала скорости в виде линейной комбинации базисных трикубических сплайнов, определенных на малых носителях, и на методе Галеркина для определения ее коэффициентов. Переменные плотность и вязкость представляются в виде линейной комбинации трilinearных функций, также определенных на малых носителях. В работе описывается алгоритм параллельных вычислений для решения полученных систем ЛАУ и ОДУ и приводятся результаты тестирования производительности этого алгоритма. Результатом расчетов являются распределения плотности, вязкости и потенциала скоростей в модельной области для последовательных моментов времени. Алгоритм применяется при моделировании соляного диапиризма. В заключении обсуждаются достоинства и недостатки предложенного алгоритма расчетов и анализируются численные результаты.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Мы изучаем медленные течения несжимаемой вязкой жидкости с переменными плотностью ρ и вязкостью μ в поле силы тяжести в области:

$$\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2) \times (0, l_3) \subset R^3.$$

Уравнения движения жидкости состоят из уравнений сохранения момента количества движений, неразрывности и переноса плотности и вязкости потоком жидкости [24, 25]. В терминах векторного потенциала $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ ($u = \text{rot } \psi$ – вектор скорости жидкости) эти уравнения выписываются в следующей форме:

$$\begin{aligned} D_{2i}(\mu e_{i3}) - D_{3i}(\mu e_{i2}) &= g D_2 \rho, \\ D_{3i}(\mu e_{i1}) - D_{1i}(\mu e_{i3}) &= -g D_1 \rho, \\ D_{1i}(\mu e_{i2}) - D_{2i}(\mu e_{i1}) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} e_{ii} &= 2(D_{ij}\psi_k - D_{ik}\psi_j), \quad (i, j, k) \leftarrow (1, 2, 3), \\ e_{ij} &= D_{jj}\psi_k - D_{jk}\psi_j + D_{ik}\psi_i - D_{ii}\psi_k, \quad (i, j, k) \leftarrow (1, 2, 3). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь приняты следующие обозначения: x_1, x_2, x_3 – декартовы координаты; $D_i = \partial/\partial x_i$, $D_{ij} = \partial^2/\partial x_i \partial x_j$, $D_t = \partial/\partial t$; $(i, j, k) \leftarrow (1, 2, 3)$ означает все тройки индексов (i, j, k) , полученных из $(1, 2, 3)$ круговой перестановкой; g – ускорение силы тяжести. В уравнениях (1) предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

На всех границах задаются условия непротекания и идеального скольжения, которые имеют следующий вид:

$$\psi_i = \psi_j = \psi_k = D_i \psi_i = D_{ii} \psi_j = D_{ii} \psi_k = 0 \quad \text{на } x_i = 0 \quad \text{и } x_i = L_i, \quad (3)$$

$$(i, j, k) \leftarrow (1, 2, 3).$$

Начальные условия задаются в виде

$$\rho(x_1, x_2, x_3, t)|_{t=0} = \rho_0(x_1, x_2, x_3), \quad \mu(x_1, x_2, x_3, t)|_{t=0} = \mu_0(x_1, x_2, x_3). \quad (4)$$

Решением поставленной задачи называется набор функций $\rho(x_1, x_2, x_3, t)$, $\mu(x_1, x_2, x_3, t)$ и $\psi_i(x_1, x_2, x_3, t)$, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяющих уравнениям (1), (2), граничным условиям (3) и начальным условиям (4).

Применяя метод Галеркина к поставленной задаче (1)–(4) и представляя компоненты векторного потенциала в виде линейной комбинации трикубических сплайнов (см. Приложение к работе [25]), а плотность и вязкость в виде линейной комбинации трилинейных функций, получим две системы ОДУ относительно $\rho_{ijk}(t)$ и $\mu_{ijk}(t)$ и систему ЛАУ относительно $\psi_{ijk}^p(t)$, где неизвестные $\rho_{ijk}(t)$, $\mu_{ijk}(t)$ и $\psi_{ijk}^p(t)$, $p = 1, 2, 3$ – коэффициенты разложений функций ρ , μ и ψ по трикубическим сплайнам (предполагается суммирование по повторяющимся индексам):

$$\psi_{ijk}^s C_{sijk}^{lmn} = g \rho_{ijk} F_{ijk}^{lmn}, \quad (5)$$

$$G_{ijk}^{lmn} D_t \rho_{ijk} = \rho_{ijk} E_{ijk}^{lmn}, \quad G_{ijk}^{lmn} D_t \mu_{ijk} = \mu_{ijk} E_{ijk}^{lmn}. \quad (6)$$

Коэффициенты C_{sijk} , F_{ijk} , G_{ijk} и E_{ijk} в уравнениях (5) и (6) являются интегралами от произведений кубических сплайнов и их производных [25].

Для решения уравнений (5) и (6) рассчитываются значения переменных $\rho_{ijk}(t + \Delta t)$, $\mu_{ijk}(t + \Delta t)$ и $\psi_{ijk}^s(t + \Delta t)$ в момент времени $t + \Delta t$, когда значения этих переменных в момент t уже известны. Чтобы решить уравнение (5), рассчитывается матрица C_{sijk}^{lmn} , затем вычисляется правая часть $\rho_{ijk}(t) F_{ijk}^{lmn}$ и решается система ЛАУ. Найденные значения $\psi_{ijk}^s(t)$ подставляются в (6) и находятся правые части системы ОДУ. Решая обе системы ОДУ, находим $\rho_{ijk}(t + \Delta t)$ и $\mu_{ijk}(t + \Delta t)$. Начальные значения $\rho_{ijk}(0)$ и $\mu_{ijk}(0)$ получаются с помощью разложения начальных функций по базисным сплайнам.

АЛГОРИТМ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Коэффициенты системы ЛАУ (5) могут быть вычислены аналитически и рассчитываются заранее. Уравнения линейной системы формируются независимо друг от друга, и поэтому процесс формирования матрицы системы и вектора правой части может быть распараллелен. Введем следующую линейную нумерацию уравнений и неизвестных: объекту с индексом (p, i, j, k) , где $1 \leq p \leq 3$, $1 \leq i \leq n_1$, $1 \leq j \leq n_2$, $1 \leq k \leq n_3$, присвоим номер

$$1 + (p - 1) + (i - 1) \times 3 + (j - 1) \times 3 \times (n_1 + 1) + (k - 1) \\ + (k - 1) \times 3 \times (n_1 + 1) \times (n_2 + 1) \\ = p + 3 \times (i - 1 + (n_1 + 1)(j - 1 + (k - 1)(n_2 + 1))).$$

При такой нумерации матрица системы ЛАУ будет ленточной, симметричной и положительно определенной. Учитывая симметрию и положительную определенность матрицы, для решения линейной системы можно применить метод Холесского (метод квадратного корня), суть которого состоит в представлении исходной линейной системы в виде [26]

$$Av = LL^T v = b. \quad (7)$$

Здесь A – матрица системы ЛАУ (5); L – нижнетреугольная фактор-матрица, ширина ленты которой совпадает с шириной ленты исходной матрицы; L^T – сопряженная к L матрица; v – вектор неизвестных коэффициентов ψ_{ijk}^p ; b – вектор правых частей системы ЛАУ (5). Для положительно определенных симметричных матриц представление (7) единственно [27]. Алгоритм решения уравнения (7) с помощью метода Холесского сводится к трем основным шагам: (1) факторизации исходной матрицы, т.е. к построению матрицы L ; (2) решению линейной системы с нижнетреугольной матрицей $Ly = b$; и (3) решению линейной системы с верхнетреугольной матрицей $L^T v = y$.

Оценим компьютерные ресурсы, необходимые для реализации метода Холесского. Для сетки $n_1 \times n_2 \times n_3$ получается линейная система с $N = 3n_1 n_2 n_3$ неизвестных и с шириной ленты $W_1 = 3(r+1)(2r+1)^2$, где r – радиус соседства ($r = 3$ в случае кубических сплайнов). Для хранения матрицы A необходимо 8 байтов (с двойной точностью) $\times N \times W_1 = 14112 n_1 n_2 n_3$ байтов. Ширина ленты матрицы L определяется формулой $W_2 = 3r[\max(n_1, n_2, n_3)]^2$, и для хранения фактор-матрицы необходимо 8 байтов $\times N \times W_2 = 216 n_1 n_2 n_3 [\max(n_1, n_2, n_3)]^2$ байтов. Если $n_1 = n_2 = n_3 = 25$, то для хранения матрицы A и фактор-матрицы L необходимо 210 мегабайтов и 1.9 гигабайтов, соответственно. Кроме того, количество операций, необходимых для получения решений, оценивается величиной $O(N^3)$. Это создает трудности при решении задач большой размерности. Однако применение современных параллельных компьютеров позволяет преодолеть эти трудности.

Опишем модификацию метода Холесского для параллельных компьютеров с распределенной памятью для P процессоров. Матрица линейной системы хранится по столбцам, но, учитывая симметрию, достаточно хранить только ее нижний треугольник. Для простоты рассмотрим случай, когда $N = kP$. Процессор j хранит $j, P+j, \dots, (k-1)P+j$ столбцов исходной матрицы системы. При такой организации хранения матрицы, оперативная память и нагрузка распределяются между процессорами равномерно. Общее время расчета элементов матрицы и расход памяти сокращается в P раз.

В соответствии с выбранной схемой хранения матрицы для факторизации матрицы A предлагается следующий алгоритм:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}^T \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11}^T & L_{21}^T \\ 0 & L_{22}^T \end{pmatrix}.$$

Он состоит из трех последовательных шагов:

- шаг 1. $A_{11} \rightarrow L_{11} L_{11}^T$, т.е. факторизация матрицы A_{11} ;
- шаг 2. $A_{21} (L_{11}^T)^{-1} \rightarrow L_{21}$, т.е. факторизация матрицы A_{21} ;
- шаг 3. $A_{22} - L_{21} L_{21}^T \rightarrow \hat{A}_{22}$, т.е. модификация матрицы A_{22} .

В то время как один процессор выполняет факторизацию k -го столбца исходной матрицы (шаги 1 и 2), остальные процессоры простаивают. Вычисленный столбец пересылается остальным процессорам, и на каждом процессоре происходит пересчет хранящихся на нем столбцов с номерами $k+1, \dots, N$ (шаг 3). В процессе работы алгоритма фактор-матрица будет храниться на месте матрицы исходной системы. Степень параллельности этапа факторизации довольно большая. Чтобы

уменьшить время простоя, можно организовать передачу данных, не дожидаясь окончания расчета k -го столбца. Однако при увеличении количества процессоров время на выполнение обменов возрастает. В этом случае возрастает количество передач и возникает задача выбора разумного компромисса между временем ожидания и временем на передачи.

Алгоритм решения систем ЛАУ с треугольными матрицами определяется способом хранения фактор-матрицы. Количество действий, необходимое для решения системы ЛАУ с треугольной матрицей, оценивается величиной $O(N^2)$. Решение фактически сводится к ряду действий, которые делаются последовательно на P процессорах. Эффективность такого использования многопроцессорного комплекса невелика. Проблему в этом случае удается решить, если осуществлять пересылку вычисленных значений вектора правой части системы, не дожидаясь окончания его пересчета. Но для решения системы ЛАУ наиболее эффективным представляется включение решения системы с нижнетреугольной матрицей в процедуру факторизации. Накладные расходы для получения решения незначительны, а главное, не требуют дополнительных обменов между процессорами. Заметим, что если бы исходная матрица хранилась по строкам, то проблемы, связанные с решением линейных систем с треугольными матрицами, не исчезли бы, поскольку пришлось бы решать как линейную систему с нижнетреугольной матрицей, так и линейную систему с верхнетреугольной матрицей, которая также хранилась бы по столбцам.

Предложенный алгоритм был реализован на многопроцессорном компьютере IBM SP-2 с распределенной памятью. Эффективность работы алгоритма решения систем ЛАУ методом Холесского проверялась на следующем тестовом примере. Размерность линейной системы составляла 3000 неизвестных (для сетки $10 \times 10 \times 10$). Результаты показывают, что совмещение факторизации исходной матрицы системы ЛАУ с решением системы с нижнетреугольной матрицей позволяет оптимизировать общее время вычислений. Производительность (или эффективность) параллельных вычислений характеризуется величиной $S_P = T_1/T_P$, называемой ускорением расчета, где T_1 и T_P – времена расчетов на одном и P процессорах, соответственно. Кривая зависимости ускорения расчета от количества процессоров представлена на рис. 1.

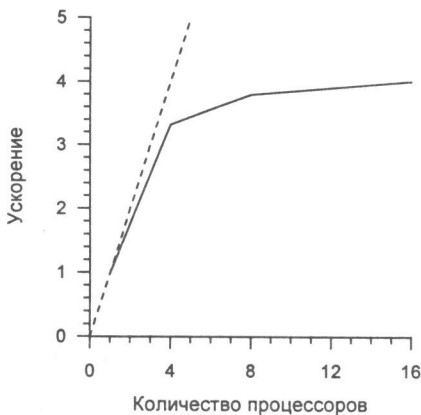


Рис. 1. Эффективность параллельных вычислений

В идеальном случае величина ускорения расчета на P процессорах равна количеству процессоров, т.е. $S_P = P$ (пунктирная линия). Как видно из рис. 1, эффективность параллельного расчета падает с увеличением количества процессоров. Это связано с увеличением времени на пересылки данных между процессорами. Максимальная производительность достигается на 4 процессорах в случае сетки $10 \times 10 \times 10$ (см. рис. 1). Для более мелкой сетки время вычислений больше времени межпроцессорных передач и наилучшая производительность достигается на большем количестве процессоров. Тестовые расчеты показали, что для сетки $25 \times 25 \times 25$ максимальная эффективность расчетов достигается на 16 процессорах.

Система ОДУ (6) решается методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Коэффициенты уравнений могут вычисляться независимо друг от друга и поэтому вычисления могут быть распараллелены. Так как плотность аппроксимируется линейными функциями, то для того чтобы получить решение задачи с высокой точностью, функция ρ представляется на сетке с шагом более мелким, чем в сетке для функций μ и ψ .

Алгоритм решения уравнения (6) состоит в следующем. Коэффициенты разложений функций ρ и μ по трilinearным функциям однородно распределяются между всеми процессорами, и новые значения этих коэффициентов вычисляются соответствующими процессорами. После завершения этих вычислений новые значения коэффициентов пересылаются главному процессору, где соответствующим образом модифицируются и затем пересылаются всем остальным процессорам. При таком алгоритме расчетов время вычислений уменьшается приблизительно в P раз по сравнению с расчетами на одном процессоре.

Для того чтобы избежать появления паразитных колебаний, возникающих из-за аппроксимации быстроизменяющихся функций кубическими полиномами, мы использовали метод обратного хода по траекториям [28]. Суть метода заключается в том, что по вычисленным траекториям материальных точек среды и известным начальным распределениям плотности и вязкости рассчитываются значения плотности и вязкости в любой точке в любой момент времени. Для этого необходимо провести через эту точку траекторию в направлении уменьшения времени и рассчитать значения плотности и вязкости в начальной точке такой траектории.

Точность метода проверялась двумя тестами: (1) сохранение массы на каждом шаге по времени и (2) точность определения векторного потенциала ψ . Мы получили относительное изменение полной массы порядка 0.1% после 100 шагов по времени, что является вполне приемлемым. Задавая в уравнениях (1) правые части в виде комбинаций тригонометрических функций, мы установили, что в зависимости от количества периодов этих функций в модельной области точность вычислений составляла около 0.5% при аппроксимации неизвестных на сетке $25 \times 25 \times 25$.

МОДЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ

Опишем результаты применения предложенного выше алгоритма параллельных вычислений для расчетов эволюции соляных диапиров. Расчеты проводились на 16 процессорах суперкомпьютера IBM SP2; были использованы безразмерные переменные, хотя при интерпретации результатов мы переходили к размерным величинам. Модельная прямоугольная область Ω со сторонами $l_1 = 3$, $l_2 = 3$ и

$l_3 = 1$ была разделена на $25 \times 25 \times 25$ прямоугольных элемента. Плотность ρ представлялась на сетке $73 \times 73 \times 73$ в три раза плотнее, чем сетка для μ и ψ . Шаг по времени Δt определялся так, чтобы максимальные смещения не превышали достаточно малого заданного значения h , т.е. $\Delta t = h/u_{max}$, где u_{max} — значение максимальной скорости. Один шаг по времени вычислялся приблизительно за 12 мин на 16 процессорах.

При модельных расчетах было принято: за единицу измерения длины величина 4 км; для надсолевых осадков $\mu = 4 \times 10^{20}$ Па с, $\rho = 2.3 \times 10^3$ кг м⁻³; для соли $\mu = 4 \times 10^{18}$ Па с, $\rho = 2.2 \times 10^3$ кг м⁻³; для подсолевых осадков $\mu = 4 \times 10^{20}$ Па с, $\rho = 2.4 \times 10^3$ кг м⁻³; характерное время $T^* = \mu^*/(\rho^*gH) = 1520$ лет, где $\mu^* = 4 \times 10^{18}$ Па с, $\rho^* = 2.2 \times 10^3$ кг м⁻³, $H = 4$ км.

Мы моделировали рост диапира в надсолевом комплексе, который отложился до начала движения соли. В моделях была использована ньютоновская реология как для соли, так и для надсолевых осадков. Хотя в последнее время специалисты по деформациям горных пород считают надсолевые осадки достаточно хрупкими, существуют наблюдения в пользу вязких течений надсолевого комплекса (например, в Афгано-Таджикском или Иранских солеродных бассейнах).

Модель I. В начальный момент времени $t = 0$ слой соли толщиной 0.2 (0.8) км находился на дне модельной области и был перекрыт осадочной толщей мощностью 0.8 (3.2) км. Верхний слой в модели представлял докинематические осадки, т.е. осадки, отложенные до начала движения соли [29]. Граница раздела слоев была возмущена экспоненциальной функцией

$$x_3 = 0.2 + 0.05 \exp[-30(x_1 - x_1^0)^2 - 30(x_2 - x_2^0)^2],$$

где $0 \leq x_1 \leq l_1$, $0 \leq x_2 \leq l_2$, $x_1^0 = 0.5l_1$, $x_2^0 = 0.5l_2$.

Эволюция соляного диапира за 22 млн. лет показана на рис. 2. Каждый временной фрагмент рисунка (А–Е) изображает поверхность раздела между солью и осадками и скорости течений в модельной области. На рис. 2 отчетливо видны несколько стадий диапиризма: начальная, которая ведет к развитию соляной подушки (А–Б); развитая, в результате которой появляется грибовидный диапир (В–Д), и зрелая, когда появляется соляной карниз, т.е. соль стремится заполнить верхние слои модели (Е). Эти результаты согласуются с результатами линейного анализа и двумерного моделирования неустойчивости Рэлея–Тейлора в случае тонкого нижнего слоя и высоковязкого верхнего.

Надо заметить, что компоненты вектора скорости равны нулю на ребрах модельной области. Условия скольжения на границах области ведут к условиям прилипания на ребрах модели (см. Приложение).

Модель II. В начальный момент времени наклонный слой соли ($-0.05x_1 + 0.15 < x_3 < -0.05x_1 + 0.35$, $0 \leq x_1 \leq l_1$) толщиной 0.2 (0.8) км находился между двумя более вязкими и тяжелыми слоями (надсолевые и подсолевые осадки). Поверхность раздела соль/надсоль была возмущена синусоидальной функцией $0.03 \sin 2\pi x_1 \sin 2\pi x_2$. Рис. 3 иллюстрирует развитие возмущений наклонного слоя соли от начальной стадии диапиризма до зрелой за 28 млн. лет. Эволюция отдельных диапиров внутри модели протекает по-разному, так как слой соли является наклонным и начальное возмущение асимметрично.

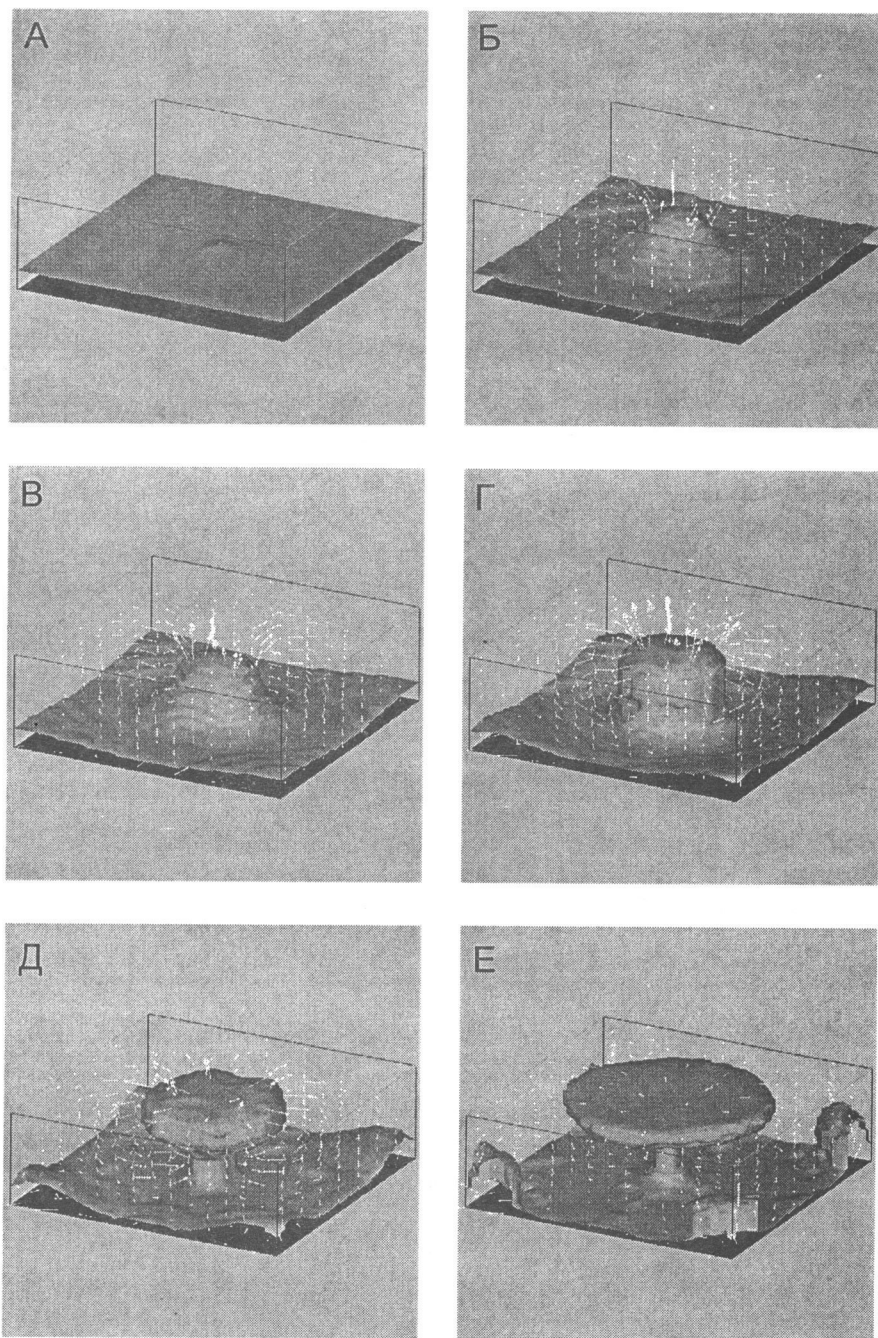


Рис. 2. Этапы эволюции соляного диапира (модель I): начальный (А), через 10.8 млн. лет (Б), 12.0 млн. лет (В), 13.2 млн. лет (Г), 15.6 млн. лет (Д), 22 млн. лет (Е).

Размеры модельной области: длина $l_1 = 12$ км, ширина $l_2 = 12$ км и глубина $l_3 = 4$ км. Стрелки – вектора скорости, длина стрелки – величина скорости

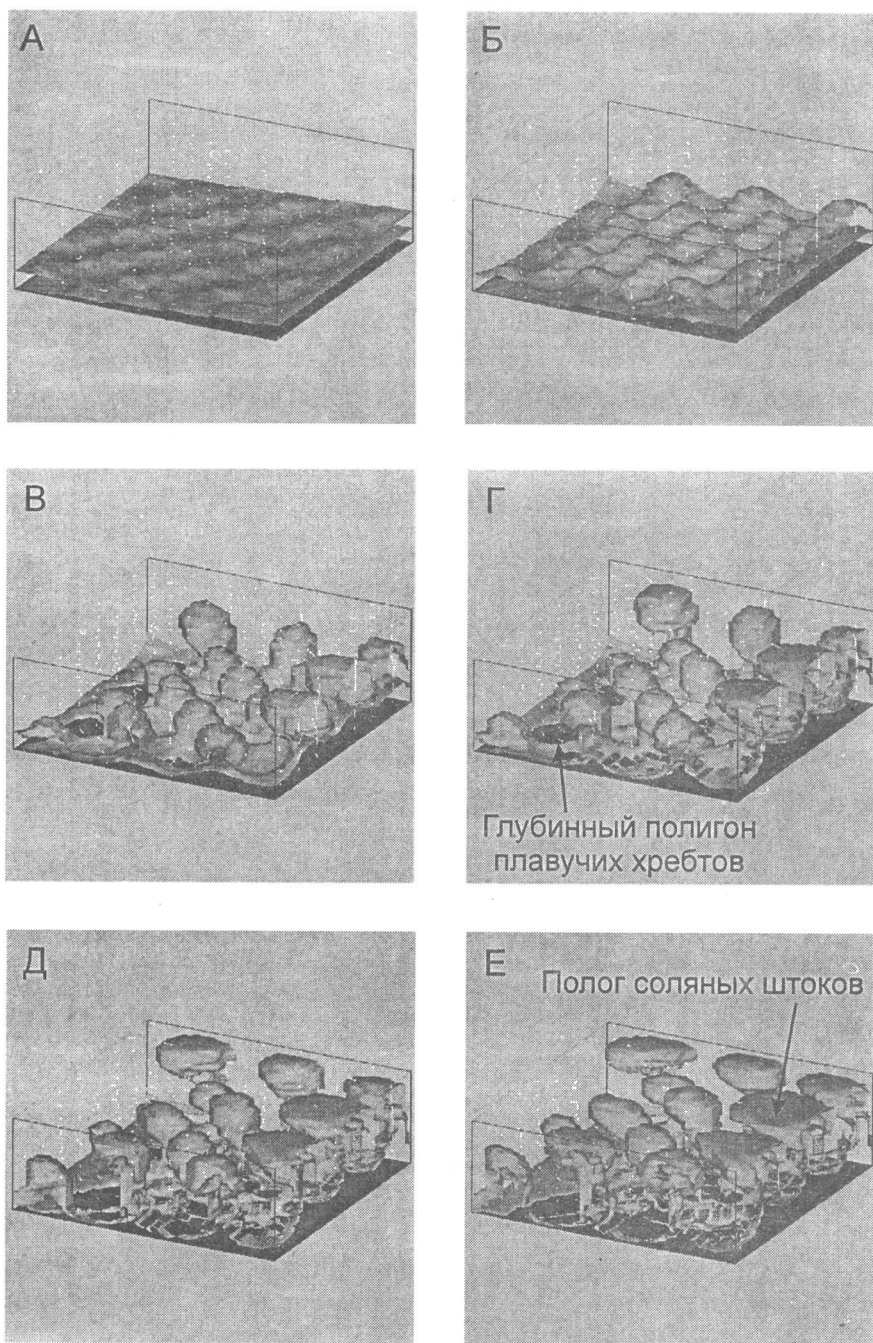


Рис. 3. Этапы эволюции наклонного слоя соли (модель II): начальный (А), через 8 млн. лет (Б), 12.8 млн. лет (В), 18 млн. лет (Г), 22.8 млн. лет (Д), 28 млн. лет (Е).

Геометрические размеры модельной области такие же, как в модели I

На рис. 3 видны типичные стадии развития соляного диапиризма, такие как глубинные полигоны плавучих хребтов [18] и приповерхностные пологи соляных штоков [29]. Сцепление растекающихся соляных пологов предсказывается процессом гравитационной неустойчивости: в результате диапиризма нижележащий плавучий слой соли стремится занять приповерхностные слои. Достигая поверхности, отдельные грибовидные диапиры распространяются латерально, образуя соляные карнизы. Они, в свою очередь, сцепляются друг с другом и формируют единый слой гравитационно-устойчивый по отношению к более плотным осадкам. Эти осадки, находящиеся вначале над солевым слоем, в процессе диапиризма погружаются вниз. В модели приповерхностные соляные структуры остаются соединенными с глубинным источником соли тонкими "ножками", образуя так называемую структуру "шар на веревке". Такое объединение соляных структур в кластеры наблюдается в бассейне Большого Кавира в Иране [30].

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе был предложен численный подход к решению задачи о медленных течениях вязкой жидкости с переменной плотностью (ρ) и вязкостью (μ). Этот подход основан на методе Галеркина и представлении векторного потенциала скорости несжимаемой вязкой жидкости в виде линейной комбинации трикубических сплайнов с неизвестными коэффициентами. Переменные вязкость и плотность представляются в виде линейных комбинаций трилинейных функций с неизвестными коэффициентами. Использование трикубических сплайнов дает решение задачи с высокой точностью по сравнению с другими конечно-разностными или конечно-элементными методами. Чтобы уменьшить ошибки, функцию ρ можно представить на более плотной сетке, т.е. с шагом более мелким, чем в сетке для компонент векторного потенциала и вязкости (этот подход использовался и ранее, см., например, [31]). При моделировании сетка для ρ бралась в 3 раза мельче сетки для компонент векторного потенциала и вязкости, хотя можно использовать и более мелкую сетку; при этом время расчетов существенно не увеличивается, так как используется многопроцессорный компьютер.

Ранее в работах [24, 25] был предложен численный подход к решению задачи о вязких течениях, когда вязкость постоянна или зависит от глубины. В таких случаях модельная область, уравнения движения и граничные условия обладают свойствами симметрии относительно плоскостей $x_i = l_i/2$ ($i = 1, 2, 3$), которые отражаются в строении матрицы ЛАУ и позволяют разбить краевую и соответствующую вариационную задачи на несколько подзадач. В результате дискретная задача разбивается на 2^m независимых подзадач меньшей размерности (при постоянной вязкости $m = 3$; при вязкости, зависящей от глубины, $m = 2$). Такое разбиение задачи на ряд подзадач сокращает время вычислений и уменьшает размеры памяти для хранения данных в 2^{3m} и 2^{2m} раз, соответственно. Для случая переменной вязкости задача не обладает таким свойством симметрии и не может быть разбита на несколько независимых подзадач, поэтому и был разработан алгоритм параллельных вычислений для решения задачи с переменной вязкостью.

Алгоритм параллельных вычислений состоит из двух частей: решение системы ЛАУ и решение системы ОДУ. Большая часть вычислений приходится на реше-

ние системы ЛАУ. Алгоритм такого решения состоит из факторизации матрицы линейной системы и решения линейных систем с ниже- и верхнетреугольной фактор-матрицами. Преимуществом метода Холесского является то, что решение задачи получается с машинной точностью. Его недостатки, по сравнению с другими методами, – большая компьютерная память и большее время вычислений. Итерационные методы (например, метод Зейделя или Шварца) требуют гораздо меньшей памяти, но, как показало тестирование, итерации сходятся слишком медленно. Необходимо помнить, что высокая точность расчетов крайне важна в задачах об эволюции гравитационно-неустойчивой среды, чувствительной к незначительным возмущениям (например, возникающих в результате неточных численных решений). Вот почему мы предлагаем использовать высокоточный метод Холесского для решения системы ЛАУ, который позволяет моделировать рост диапиров вплоть до зрелых их форм, таких, как соляные карнизы и пологи.

В работе было экспериментально установлено, что объединение факторизации матрицы с решением системы с нижнетреугольной фактор-матрицей оптимизирует время выполнения алгоритма при параллельных вычислениях, которое увеличивается с увеличением числа процессоров. Поэтому ведется поиск альтернативных алгоритмов с целью сокращения времени межпроцессорных обменов.

Алгоритм параллельных вычислений был применен при моделировании соляного диапиризма, хотя он может быть также использован при моделировании диапиризма других пород (глины, гранита, серпентинитов). Модели соляных структур, представленные в данной работе, являются изотермическими и развиваются под действием галокинеза; в настоящее время авторы работают над термической моделью диапиризма [32] и моделью с приложенными латеральными усилиями [33].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Условия на ребрах модельной области

Не теряя общности, рассмотрим ребро модельной области $x_1 = x_2 = 0$. Напомним, что на границах области были использованы условия непротекания и идеального скольжения. В качестве граничных базисных сплайнов были выбраны α -сплайны для того, чтобы удовлетворить условиям на границах $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$. Используя представление векторного потенциала трикубическими сплайнами, найдем, что следующие выражения при $i = j = 0$

$$D_1\psi_2(t, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3) = \sum_{k=0}^{n_3} \psi_{11k}^2(t) D_1 \eta_1^2(x_1 = 0) \zeta_1^2(x_2 = 0) \vartheta_k^2(x_3),$$

$$D_2\psi_1(t, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3) = \sum_{k=0}^{n_3} \psi_{11k}^1(t) \eta_1^1(x_1 = 0) D_2 \zeta_1^1(x_2 = 0) \vartheta_k^1(x_3)$$

обращаются в нуль, так как $\eta_1^1(x_1 = 0) = \zeta_1^2(x_2 = 0) = 0$ для α -сплайнов. Следовательно, $u_3 = D_1\psi_2 - D_2\psi_1$ равно нулю на ребре $x_1 = x_2 = 0$. Таким образом, условие непротекания и идеального скольжения на границах модельной области приводит к условию прилипания на ребрах этой области.

Авторы выражают благодарность Б.М. Наймарку и А.И. Короткому за ценные обсуждения результатов работы, С. Клутингу и анонимному рецензенту работы за конструктивную критику начальной версии статьи.

Данная работа была выполнена при поддержке Шведской Королевской Академии наук (грант 1325), Российского фонда фундаментальных исследований (грант 99-05-65050), гранта Президента РФ "Молодые доктора наук" (грант 99-15-96085) и Международного научно-технического центра (грант 1293-99). Данное исследование было также поддержано грантами Национального Научного Фонда США (EAR 9804859) и Министерства иностранных дел Италии, выделенных одному из авторов (А.Т.И.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, 2nd edn. Oxford: Oxford University Press. 1961. 654 p.
2. Biot M.A., Odé H. Theory of gravity instability with variable overburden and compaction // Geophysics. 1965. Vol. 30(2). P.213-227.
3. Ramberg H. Instability of layered system in the field of gravity. I and II // Phys. Earth and Planet. Int. 1968. Vol.1. P.427-474.
4. Talbot C.J., Jarvis R.J. Age, budget and dynamics of an active salt extrusion in Iran // J. Struct. Geol. 1984. Vol. 6. P.521-524.
5. Наймарк Б.М., Исмаил-заде А.Т. Гравитационная устойчивость вертикально-неоднородной среды с максвелловской реологией // Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука, 1989. С.71-80. (Вычисл. сейсмология; Вып. 22).
6. Исмаил-заде А.Т. Гравитационная неустойчивость и распространение тектонических волн в двухслойной модели верхней мантии Земли // Современные методы интерпретации сейсмологических данных. М.: Наука, 1991. С.218-226. (Вычисл. сейсмология; Вып. 24).
7. Wooldt W.-D. 1978. Finite element calculations applied to salt dome analysis // Tectonophysics. 1978. Vol. 50. P.369-386.
8. Schmeling H. On the relation between initial conditions and late stages of Rayleigh-Taylor instabilities // Tectonophysics. 1987. Vol. 133. P.65-80.
9. Römer M.-M., Neugebauer H.J. The salt dome problem: A multilayered approach // J. Geophys. Res. 1991. Vol. 96. P.2389-2396.
10. Zaleski S., Julien P. Numerical simulation of Rayleigh-Taylor instability for single and multiple salt diapirs // Tectonophysics. 1992. Vol. 206. P.55-69.
11. Poliakov A., Podladchikov Yu. Diapirism and topography // Geophys. J. Int. 1992. Vol. 109. P.553-564.
12. Poliakov A.N.B., van Balen R., Podladchikov Yu., Daudré B., Cloetingh S., Talbot C. Numerical analysis of how sedimentation and redistribution of surficial sediments affects salt diapirism // Tectonophysics. 1993. Vol. 226. P.199-216.
13. Podladchikov Yu., Talbot C., Poliakov A.N.B. Numerical models of complex diapirs // Tectonophysics. 1993. Vol. 228. P.189-198.
14. van Keken P.E., Spiers C.J., van den Berg A.P., Muzyert E.J. The effective viscosity of rock salt: implementation of steady-state creep laws in numerical models of salt diapirism // Tectonophysics. 1993. Vol. 225. P.457-476.

15. *Poliakov A.N.B., Podladchikov Yu., Talbot C.* Initiation of salt diapirs with frictional overburdens: numerical experiments // *Tectonophysics*. 1993. Vol. 228. P.199–210.
16. *Daudré B., Cloetingh S.* Numerical modelling of salt diapirism: influence of the tectonic regime // *Tectonophysics*. 1994. Vol. 240. P.59–79.
17. *Naimark B.M., Ismail-Zadeh A.T., Jacoby W.R.* Numerical approach to problems of gravitational instability of geostructures with advected material boundaries // *Geophys. J. Int.* 1998. Vol. 134. P.473–483.
18. *Talbot C.J., Rönnlund P., Schmeling H., Koyi H., Jackson M.P.A.* Diapiric spoke patterns // *Tectonophysics*. 1991. Vol. 188. P.187–201.
19. *Talbot C.J.* Inclined and asymmetric upward-moving gravity structures // *Tectonophysics* 1977. Vol. 42. P.159–181.
20. *Talbot C.J., Jackson M.P.A.* Internal dynamics and kinematics of salt structures // *Amer. Assoc. Petrol. Geol.* 1987. Vol. 71. P.1068–1093.
21. *Jackson M.P.A., Talbot C.J., Cornelius R.R.* Centrifuge modelling of the effects of aggradation and progradation on syndepositional salt structures // *Report of Investigations No. 173, Bureau of Economic Geology, University of Texas at Austin*. 1988. 93 p.
22. *Talbot C.J.* Centrifuged models of Gulf of Mexico profiles // *Mar. Petrol. Geol.* 1992. Vol. 9. P.412–432.
23. *Koyi H.* Analogue modelling; From a qualitative to a quantitative technique, a historical outline // *J. Petrol. Geol.* 1997. Vol. 20(2). P.223–238.
24. *Исмаил-заде А.Т., Короткий А.И., Наймарк Б.М., Суетов А.П., Цепелев И.А.* Реализация трехмерной гидродинамической модели эволюции осадочных бассейнов // *ЖВМиМФ*. 1998. Т.38, N 7. С.1190–1203.
25. *Наймарк Б.М., Исмаил-заде А.Т., Короткий А.И., Суетов А.П., Цепелев И.А.* Моделирование трехмерных вязких течений в верхних слоях мантии // *Вопросы геодинамики и сейсмологии*. М.: ГЕОС, 1998. С.4–15. (Вычисл. сейсмология; Вып. 30).
26. *Golub G.H., Van Loan C.F.* *Matrix Computations*, 2nd edn. Baltimore: Johns Hopkins, 1989. 476 p.
27. *Ortega J.M.* *Introduction to Parallel and Vector Solution of Linear Systems*. New York: Plenum Press, 1988. 305 p.
28. *Наймарк Б.М., Малевский А.В.* Приближенный метод расчета развития гравитационной неустойчивости // *Изв. АН СССР. Физика Земли*. 1986. N 2. С.44–53.
29. *Jackson M.P.A., Talbot C.J.* *Advances in salt tectonics* // *Continental Deformation*. Oxford: Pergamon Press, 1994. P.159–179.
30. *Jackson M.P.A., Cornelius R.R., Craig C.H., Gansser A., Stöcklin J., Talbot C.J.* Salt diapirs of the Great Kavir, central Iran // *Geol. Soc. Amer. Memoir*. 1990. Vol.177. 139 p.
31. *Ten A., Yuen D.A., Larsen T.B., Malevsky A.V.* The evolution of material surfaces in convection with variable viscosity as monitored by a characteristics-based method // *Geophys. Res. Lett.* 1996. Vol. 23. P.2001–2004.
32. *Talbot C. J.* Halokinesis and thermal convection // *Nature*. 1978. Vol. 273. P.739–741.
33. *Cloetingh S., Kooi H.* Intraplate stresses and dynamical aspects of rifted basins // *Tectonophysics*. 1992. Vol. 215. P.167–185.