

II. ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ГЕОФИЗИКИ

УДК 532.5+514.83

МЕТОД РИТЦА В ЗАДАЧЕ О СФЕРОИДАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СЛОИСТОЙ МОДЕЛИ ЗЕМЛИ

Э.Н. Бессонова, Е.Л. Резников

*Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук, Москва*

А.М. Ильин

*Институт математики и механики
Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург*

В работе изучаются возможности применения метода Ритца к задаче о собственных сфероидальных колебаниях сферической Земли для однородных слоистых моделей, имитирующих наличие жидкого ядра.

PERFORMANCE OF THE RITZ METHOD IN THE PROBLEM OF FREE OSCILLATIONS IN LAYERED EARTH MODELS

E.N. Bessonova and E.L. Reznikov

*International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow*

A.M. Il'in

*Institute of Mathematic and Mechanics,
Ural Division, Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg*

We study the numerical performance of the Ritz method used to compute free spheroidal oscillations of layered spherical Earth models. The discussed models simulate the Earth with a liquid core.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В продолжение исследований, связанных с методом Ритца в задачах о собственных колебаниях сферической Земли, которые начаты в работе [1], авторы этой статьи провели численные эксперименты для более сложных, чем однородная сфера, моделей. При этом мы старались понять возможности этого метода (точность, скорость сходимости, устойчивость) для моделей, имитирующих наличие жидкого ядра в Земле. Математическая постановка задачи приведена в [1], здесь мы будем заниматься только сфероидальными собственными колебаниями. При использовании метода Ритца после выбора конечномерного галеркинского подпространства возникает спектральная задача

$$Ax = \omega^2 Bx, \quad (1)$$

где A – матрица квадратичной формы (потенциальной энергии), B – матрица кинетической энергии, ω – собственная частота. Если пара ω^2, x – решение системы (1), то ω^2 есть приближение квадрата собственной частоты, а x – вектор коэффициентов разложения собственного колебания по заданному галеркинскому базису.

Рассмотрим задачу о собственных колебаниях, описываемых уравнением

$$Au + \rho\omega^2 u = 0, \quad \text{где } A = -\nabla(\lambda \operatorname{div}) + \operatorname{rot}(\mu \operatorname{rot}) + 2\mu\Delta + 2(\nabla\mu\nabla),$$

при заданных граничных условиях (λ, μ – коэффициенты Ламе, ρ – плотность).

Эту же задачу можно сформулировать иначе, как принято в теории дифференциальных уравнений на языке слабых решений. Именно, требуется найти такой вектор u , что для всех допустимых v

$$\int_G (Au, v) dG = \omega^2 \int_G (u, v) \rho dG \quad \text{или} \quad 2 \int_G W(u, v) dG = \omega^2 \int_G (u, v) \rho dG,$$

где $W(u, v)$ – симметричная билинейная форма от деформаций $\varepsilon(u), \varepsilon(v)$; соответственно квадратичная форма $W(u, u)$ – плотность упругого потенциала.

Будем рассматривать колебания сферически симметричной Земли с параметрами, зависящими только от радиуса. Наличие такой симметрии приводит к тому, что оператор задачи о собственных колебаниях распадается на оператор крутильных колебаний и оператор сфероидальных колебаний. Последний в свою очередь распадается на последовательность операторов K_n , где n – нижний индекс (порядок) сферических функций Y_n^m , $n = 1, 2, \dots$

В слабой постановке билинейная форма $W_n(u, v)$ в задаче о сфероидальных колебаниях выглядит так

$$\begin{aligned} W(u, v) = & \int_0^1 r^2 dr \left\{ \lambda \left(\frac{du^{(1)}}{dr} + \frac{2}{r} u^{(1)} - \frac{Nu^{(2)}}{r} \right) \left(\frac{dv^{(1)}}{dr} + \frac{2}{r} v^{(1)} - \frac{Nv^{(2)}}{r} \right) + \right. \\ & + 2\mu \frac{du^{(1)}}{dr} \frac{dv^{(1)}}{dr} + 2\mu \frac{u^{(1)}v^{(1)}}{r^2} + 2\mu \frac{(u^{(1)} - Nu^{(2)})(v^{(1)} - Nv^{(2)})}{r^2} + \\ & \left. + \mu \left(\frac{du^{(2)}}{dr} - \frac{u^{(2)}}{r} + \frac{Nu^{(1)}}{r} \right) \left(\frac{dv^{(2)}}{dr} - \frac{v^{(2)}}{r} + \frac{Nv^{(1)}}{r} \right) - \frac{2\mu}{r^2} u^{(2)}v^{(2)} \right\} dr, \end{aligned}$$

где $N = \sqrt{n(n+1)}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix}$.

Будем решать задачу методом Ритца, а там, где этот метод не работает, применим другой подход. Он связан с принципом минимакса, основанном на теореме Куранта о свойствах отношения Релея [2]

$$\omega^2 = \frac{\int_G W(\mathbf{u}, \mathbf{u}) dG}{\int_G (\mathbf{u}, \mathbf{u}) \rho dG}.$$

Опишем практическую реализацию решения поставленной задачи. Выберем ортонормированный базис в соответствующем гильбертовом пространстве; в задаче со сферической симметрией наиболее удобный базис – сферические функции Бесселя. Для каких-то моделей это функции только первого рода, для других – линейная комбинация функций первого и второго рода.

В работе рассматриваются:

модель 1 – два сферических слоя со свободными границами,

модель 2 – сферический слой, со свободной внешней границей, лежащий на сфере.

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ

Напишем дисперсионное уравнение для расчета частот собственных колебаний произвольной среды, состоящей из конечного числа слоев с параметрами λ , μ и ρ , постоянными в каждом слое.

Нетрудно показать, что оператор K_n для слоя с этими параметрами имеет вид

$$K_n \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho} \times \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)d^2/dr^2 + 2((\lambda + 2\mu)/r)d/dr - & (-N(\lambda + \mu)/r)d/dr + \\ -2(\lambda + \mu(4 + N^2))/r^2 & +N(\lambda + 3\mu)/r^2 \\ (N(\lambda + \mu)/r)d/dr + & \mu d^2/dr^2 + (2\mu/r)d/dr - \\ +2N(\lambda + 2\mu)/r^2 & -N^2(\lambda + 2\mu)/r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Его собственную функцию можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(1)}N^2 j_n(k_\beta^l r)/(k_\beta^l r) + \\ + A^{(2)}(N j_n(k_\alpha^l r)/(k_\alpha^l r) - j_{n+1}(k_\alpha^l r)) + \\ + A^{(3)}N^2 y_n(k_\beta^l r)/(k_\beta^l r) + \\ + A^{(4)}(n y_n(k_\alpha^l r)/(k_\alpha^l r) - y_{n+1}(k_\alpha^l r)) \\ A^{(1)}N((n+1)j_n(k_\beta^l r)/(k_\beta^l r) - j_{n+1}(k_\beta^l r)) + \\ + A^{(2)}N j_n(k_\alpha^l r)/(k_\alpha^l r) + \\ + A^{(3)}N((n+1)y_n(k_\beta^l r)/(k_\beta^l r) - y_{n+1}(k_\beta^l r)) + \\ + A^{(4)}N y_n(k_\alpha^l r)/(k_\alpha^l r) \end{pmatrix};$$

а для однородной сферы в виде

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(5)} N^2 j_n(k_\beta^s r)/(k_\beta^s r) + \\ + A^{(6)} (n j_n(k_\alpha^s r)/(k_\alpha^s r) - j_{n+1}(k_\alpha^s r)) \\ A^{(5)} N ((n+1) j_n(k_\beta^s r)/(k_\beta^s r) - j_{n+1}(k_\beta^s r)) + \\ + A^{(6)} N j_n(k_\alpha^s r)/(k_\alpha^s r) \end{pmatrix}.$$

Здесь $k_\beta^l = \omega/v_\beta^l$, $k_\beta^s = \omega/v_\beta^s$, $k_\alpha^l = \omega/v_\alpha^l$, $k_\alpha^s = \omega/v_\alpha^s$, v_β^l – скорость поперечных волн в слое, v_α^l – скорость продольных волн в слое, v_β^s и v_α^s – соответствующие скорости в сфере, ω – собственная частота, j_n и y_n – сферические функции Бесселя соответственно первого и второго рода, коэффициенты $A^{(i)}$ – произвольные постоянные.

Смещения и напряжения на границе соседних слоев непрерывны. Внешняя граница верхнего слоя свободна. Если рассматривается пачка слоев, не лежащая на сфере, то нижняя граница последнего слоя тоже свободна.

Граничные условия задают систему алгебраических уравнений с нулевой правой частью относительно коэффициентов $A^{(i)}$. Дисперсионное уравнение получается из условия равенства нулю определителя этой системы. Для модели, состоящей из слоя, лежащего на сфере, – этот определитель шестого порядка, для двух слоев со свободными верхней и нижней границами – восьмого.

ОПИСАНИЕ МОДЕЛЕЙ

Модель 1. Эта модель, состоящая из двух сферических слоев, приведена на рис. 1. Радиусы границ слоев обозначены: внешней границы – $R_{\text{вн}}$, границы раздела – $R_{\text{разд}}$, внутренней границы – $R_{\text{вн}}$. Во всех расчетах приняты: $R_{\text{вн}} = 1$, $R_{\text{разд}} = 0.75$ и $R_{\text{вн}} = 0.5$.

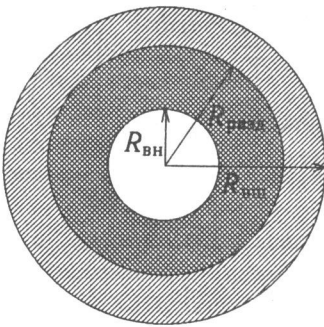


Рис. 1. Модель 1

Вначале нами исследована зависимость спектра от отношения упругих параметров слоев. Для простоты в каждом слое положили $\rho = 1$, $\lambda = \mu$ и изменяли значение \mathcal{O} , равное отношению μ наружного слоя к μ внутреннего слоя; в такой модели спектр задачи зависит только от этого отношения. Мы проводили расчеты спектров для отношения \mathcal{O} , изменяющегося в диапазоне от 100 до 0.01. В качестве примера можно было бы привести результаты расчетов, представленные точно в таком же виде, как в работе [1], но, чтобы не загромождать статью, приведем их для модели, состоящей тоже из двух слоев, но с различными параметрами:

во внешнем слое: $\lambda = 154.4$ кбар, $\mu = 114.5$ кбар, $\rho = 3.7 \times 10^3$ кг м⁻³,

во внутреннем слое: $\lambda = 374.4$ кбар, $\mu = 252.5$ кбар, $\rho = 5.18 \times 10^3$ кг м⁻³.

Эта модель – некое усреднение модели 1066В в [3].

Для этой конкретной модели сходимость в методе Ритца примерно такая же, как для однородной сферы. В табл. 1 показана сходимость приближенных собственных

ТАБЛИЦА 1. Сходимость галеркинских приближений к собственным значениям для различных размерностей матриц, модель 1

Порядок матрицы	Номер собственного числа									
	1	2	5	10	15	20	25	30	35	40
1	35.67									
5	14.02	30.51	155.29							
10	13.59	29.82	99.73	306.44						
15	13.40	29.64	98.88	216.64	530.92					
20	13.26	29.53	98.74	216.02	357.30	687.04				
25	13.22	29.47	98.54	215.70	352.12	503.19	933.59			
30	13.19	29.45	98.45	215.49	351.65	470.89	651.15	1092.73		
35	13.17	29.42	98.41	215.38	351.56	467.22	607.67	860.16	1323.07	
40	13.14	29.40	98.34	215.31	351.50	466.12	590.61	735.31	1003.54	1483.80
45	13.13	29.38	98.32	215.22	351.48	465.84	589.50	717.64	883.62	1227.84
50	13.12	29.37	98.28	215.19	351.47	465.57	588.75	717.32	858.34	1017.18
55	13.11	29.36	98.25	215.15	351.46	465.45	588.50	717.03	857.85	1002.32
60	13.10	29.35	98.24	215.12	351.45	465.31	588.32	716.89	857.66	973.91
Истинное собственное число	13.01	29.27	98.02	214.78	351.41	464.48	587.06	715.28	856.31	971.25

чисел к истинным в зависимости от размерности галеркинских пространств (во всех таблицах 1–5 порядок сферических функций $n = 2$). Отметим, что в качестве координатных функций в этой модели мы использовали другой базис, чем в статье [1]. При выборе этого базиса было учтено наличие в точном решении сферических функций второго рода. Продолжая численные эксперименты, начатые в работе [1], мы старались использовать те же критерии оценки сходимости приближенных результатов к истинным, чтобы сравнивать модели. Можно сказать, что с усложнением модели сходимость к точным значениям становится более медленной.

Из табл. 1 видно, что собственные числа “устанавливаются” довольно быстро, но для выбранных размерностей расхождение с истинными собственными числами наблюдается, как правило, во втором знаке после запятой. В табл. 2 приведены приближения собственных чисел, полученные из матрицы 60-го порядка и их абсолютные и относительные невязки.

ТАБЛИЦА 2. Точные и приближенные собственные значения и ошибки аппроксимации для матриц 60×60

Номер собст- венного числа	Приближение, полученное из матрицы 60-го порядка	Истинное собствен- ное число	Абсолютная ошибка приближения	Относительная ошибка приближения, %
1	13.10	13.01	0.08	0.65
5	98.24	98.02	0.22	0.22
10	215.12	214.78	0.35	0.16
15	351.45	351.41	0.69	0.22
20	465.31	464.48	0.83	0.18
25	588.32	587.06	1.26	0.21
30	716.89	715.28	1.61	0.22
35	857.66	856.31	1.35	0.16
40	973.91	971.25	2.66	0.27
45	1149.61	1088.14	61.47	5.65
50	1363.59	1219.90	143.70	11.78
55	1736.72	1359.66	377.05	27.73
60	2291.39	1481.51	809.87	54.67

Помимо собственных чисел мы изучали поведение приближенных собственных функций. Качество сходимости приближений к истинным собственным функциям проиллюстрировано графиками поведения невязки и интегральной ее оценкой. На рис. 2, 3 приведены невязки приближений для первой и девятой ($n = 2$) собственных функций для галеркинских подпространств некоторых размерностей. Собственные функции имеют две составляющие, на рис. 2, а и 3, а приведены результаты, относящиеся к первой составляющей, на рис. 2, б и 3, б – ко второй составляющей.

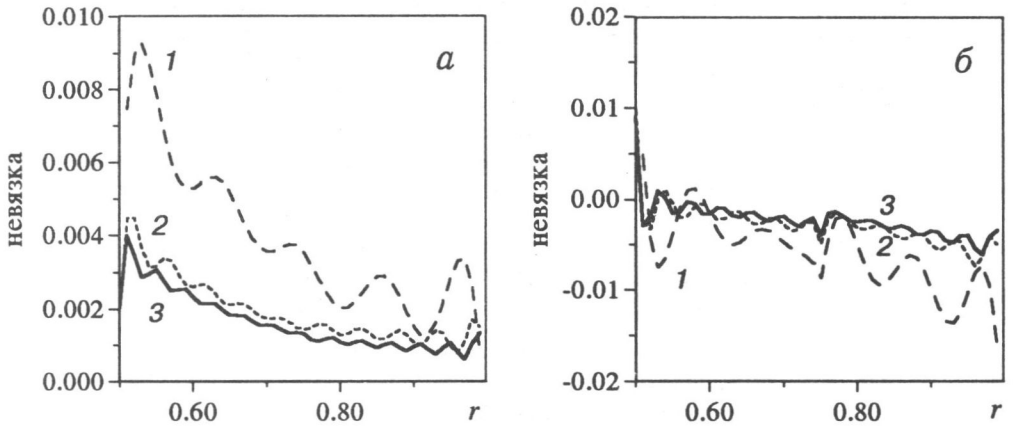


Рис. 2. Невязка для первого собственного вектора при $n = 2$:
 а - первая составляющая, б - вторая составляющая. Цифры у кривых - различные размерности галеркинских пространств: 1 - 20, 2 - 40, 3 - 60

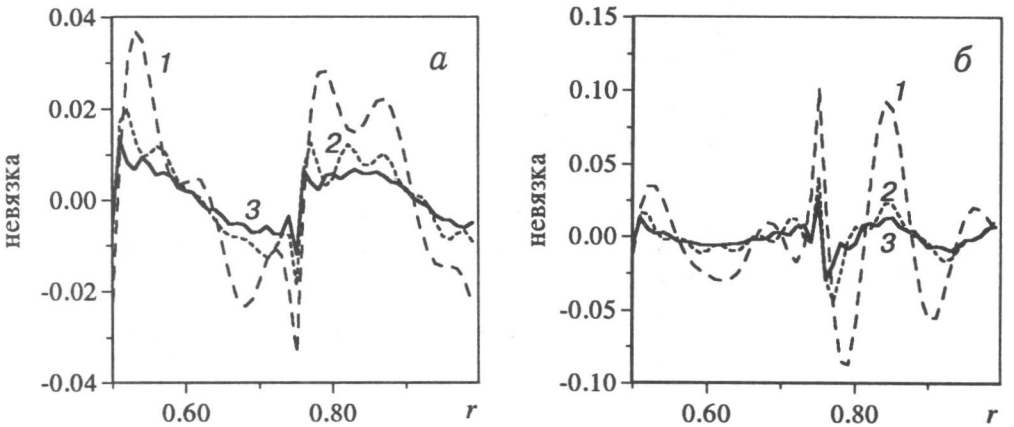


Рис. 3. Невязка для девятого собственного вектора при $n = 2$:
 а - первая составляющая, б - вторая составляющая. Цифры у кривых - различные размерности галеркинских пространств: 1 - 20, 2 - 40, 3 - 60

В качестве интегральной невязки мы рассматривали угол между вектором точного и вектором приближенного решения. В табл. 3 приведены косинусы и синусы этих углов в двух метриках: в метрике L_2 с весом ρ (пространство со скалярным произведением $\int_G(\mathbf{u}, \mathbf{v})\rho dG$ мы называем пространством B) и в энергетической метрике (пространство со скалярным произведением $\int_G(A\mathbf{u}, \mathbf{v})dG$ мы называем пространством A). Из табл. 3 видно, что с увеличением размерности подпространства невязки монотонно уменьшаются.

ТАБЛИЦА 3. Интегральные невязки в двух пространствах, $n = 2$

Порядок матрицы	Пространство В		Пространство А	
	cos	sin	cos	sin
Собственный вектор 1				
10	-0.999666	0.025816	-0.978086	0.208198
20	-0.999947	0.010250	-0.990439	0.137948
30	-0.999975	0.006964	-0.993301	0.115553
40	-0.999988	0.004864	-0.995060	0.099266
50	-0.999992	0.003979	-0.995937	0.090051
60	-0.999994	0.003227	-0.996750	0.080553
Собственный вектор 3				
10	-0.998834	0.048258	-0.990444	0.137909
20	-0.999847	0.017462	-0.996373	0.085082
30	-0.999956	0.009277	-0.997886	0.064978
40	-0.999974	0.007140	-0.998337	0.057637
50	-0.999982	0.005939	-0.998650	0.051941
60	-0.999989	0.004675	-0.998897	0.046944
Собственный вектор 5				
10	0.997708	0.067654	0.989142	0.146962
20	0.999697	0.024600	0.996056	0.088719
30	0.999926	0.012090	0.997771	0.066728
40	0.999958	0.009066	0.998321	0.057914
50	0.999974	0.007157	0.998650	0.051930
60	0.999983	0.005823	0.998860	0.047188
Собственный вектор 7				
10	0.997310	0.073285	0.995066	0.099214
20	0.999683	0.025169	0.999133	0.041619
30	0.999847	0.017491	0.999514	0.031166
40	0.999931	0.011671	0.999706	0.024232
50	0.999959	0.009002	0.999779	0.020977
60	0.999969	0.007806	0.999818	0.019076
Собственный вектор 9				
10	-0.056221	0.998418	-0.052859	0.998601
20	-0.998837	0.048194	-0.996687	0.081325
30	-0.999728	0.023317	-0.998526	0.054274
40	-0.999861	0.016651	-0.998994	0.044834
50	-0.999922	0.012448	-0.999256	0.038544
60	-0.999947	0.010254	-0.999402	0.034562

Модель 2. Такая модель – простейшая аналогия Земли с жидким ядром. Геометрически это сферический слой, лежащий на однородной сфере (рис. 4), $R_{\text{вн}} = 1$, а для $R_{\text{разд}}$ рассмотрены три варианта: $R_{\text{разд}}$ равно 0.2, 0.545 и 0.9. Помимо исследования сходимости метода Ритца для этой модели мы хотели понять, как зависит спектр и точность его вычисления методом Ритца от степени “разжижения” внутренней сферы, т.е. при уменьшении μ во внутреннем шаре.

В качестве модели использована модель Т. Матумото и У. Сато [4]. Параметры Ламе и плотность в слое во всех трех вариантах были одинаковы: $\lambda = \mu = 190.5$ кбар, $\rho = 4.5$ г/см³. Во внутренней сфере $\lambda = 934.1$ кбар, $\rho = 10.8 \times 10^3$ кг м⁻³, μ менялось: $500 \leq \mu \leq 0.5$ кбар для случая с $R_{\text{разд}} = 0.2$; $500 \leq \mu \leq 0.003$ кбар для случая с $R_{\text{разд}} = 0.545$; $500 \leq \mu \leq 0.00001$ кбар для случая с $R_{\text{разд}} = 0.9$. В табл.4 приведены относительные ошибки вычисления по методу Ритца собственных чисел в зависимости от μ во внутреннем шаре.

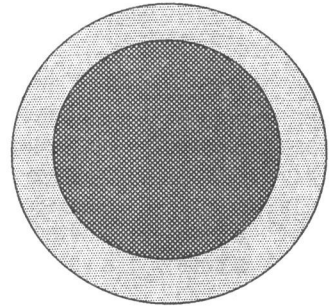


Рис. 4. Модель 2

ТАБЛИЦА 4. Относительная ошибка (в %) приближенных собственных чисел, полученных методом Ритца при разных значениях μ в сфере, модель 2

Номер собственного числа	Модуль сдвига μ в сфере							
	500	100	20	10	5	1	0.5	0.05
1	0.56	0.58	1.01	1.15	2.22	3.27	3.81	5.22
2	0.43	0.10	1.04	1.55	1.02	3.34	3.84	5.16
3	0.60	0.19	0.53	1.63	2.19	3.43	4.01	5.49
4	0.09	0.24	0.44	1.17	2.15	1.90	4.05	5.36
5	0.32	0.24	1.06	0.20	2.23	2.69	4.33	5.88
6	0.34	0.12	0.53	1.69	1.40	3.66	3.43	5.67
7	0.45	0.17	0.64	1.69	0.46	3.85	1.97	6.44
8	0.29	0.11	1.32	1.06	2.44	4.06	4.77	6.01
9	0.19	0.22	1.17	0.69	2.56	4.29	4.84	7.29
10	0.29	0.12	0.48	1.95	2.75	4.62	5.51	5.21

Номер собственного числа	Модуль сдвига μ в сфере							
	0.01	0.009	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003
1	6.37	6.46	6.56	6.68	6.80	6.94	7.06	7.09
2	6.39	6.50	6.62	6.75	6.91	7.10	7.32	7.58
3	6.67	6.76	6.87	6.98	7.09	7.21	7.28	7.12
4	6.66	6.77	6.90	7.05	7.23	7.43	7.69	7.99
5	7.12	7.21	7.31	7.41	7.49	7.54	7.42	6.55
6	7.01	7.14	7.28	7.44	7.64	7.87	8.15	8.47
7	7.79	7.87	7.94	7.97	7.91	7.59	6.45	2.04
8	7.03	7.11	7.19	7.27	7.30	7.16	6.34	4.02
9	8.31	7.89	7.18	6.13	4.69	2.79	0.73	-0.37
10	1.41	1.36	1.46	1.72	2.12	2.70	3.49	4.53

Остальные параметры в сфере: $0 < r < 0.545$, $\rho = 10.8$, $\lambda = 934.092$.
 Параметры в слое: $\mu = 190.125$, $0.545 < r < 1.0$, $\rho = 4.5$, $\lambda = 190.125$.

ТАБЛИЦА 5. Асимптотика малых собственных значений в модели 2 для $\mu \rightarrow 0$

Первое собственное число			Второе собственное число			Третье собственное число		
ω	μ	$\mu = \omega^2/15$	ω	μ	$\mu = \omega^2/33$	ω	μ	$\mu = \omega^2/56$
0.370	0.0090	0.00913	0.552	0.0090	0.00923	0.726	0.0090	0.00941
0.360	0.0086	0.00864	0.536	0.0085	0.00871	0.705	0.0085	0.00888
0.349	0.0080	0.00812	0.520	0.0080	0.00819	0.684	0.0080	0.00835
0.338	0.0076	0.00762	0.504	0.0075	0.00770	0.662	0.0075	0.00783
0.326	0.0070	0.00709	0.487	0.0070	0.00719	0.640	0.0070	0.00731
0.315	0.0066	0.00662	0.469	0.0065	0.00667	0.617	0.0065	0.00680
0.302	0.0060	0.00608	0.451	0.0060	0.00616	0.592	0.0060	0.00626
0.289	0.0056	0.00557	0.431	0.0055	0.00563	0.567	0.0055	0.00574
0.276	0.0050	0.00508	0.411	0.0050	0.00512	0.541	0.0050	0.00523
0.262	0.0046	0.00458	0.390	0.0045	0.00461	0.513	0.0045	0.00470
0.247	0.0040	0.00407	0.368	0.0040	0.00410	0.484	0.0040	0.00418
0.231	0.0036	0.00356	0.344	0.0035	0.00359	0.452	0.0035	0.00365
0.214	0.0030	0.00305	0.319	0.0030	0.00308	0.419	0.0030	0.00314
0.195	0.0025	0.00254	0.291	0.0025	0.00257	0.382	0.0025	0.00261
0.174	0.0020	0.00202	0.260	0.0020	0.00205	0.342	0.0020	0.00209
0.151	0.0015	0.00152	0.225	0.0015	0.00153	0.296	0.0015	0.00156
0.123	0.0010	0.00101	0.184	0.0010	0.00103	0.242	0.0010	0.00105
0.117	0.0009	0.00091	0.174	0.0009	0.00092	0.229	0.0009	0.00094
0.110	0.0008	0.00081	0.165	0.0008	0.00083	0.216	0.0008	0.00083
0.103	0.0007	0.00071	0.154	0.0007	0.00072	0.202	0.0007	0.00073
0.096	0.0006	0.00061	0.142	0.0006	0.00061	0.187	0.0006	0.00062
0.087	0.0005	0.00050	0.130	0.0005	0.00051	0.171	0.0005	0.00052
0.078	0.0004	0.00041	0.116	0.0004	0.00041	0.153	0.0004	0.00042
0.068	0.0003	0.00031	0.101	0.0003	0.00031	0.132	0.0003	0.00031
0.055	0.0002	0.00020	0.082	0.0002	0.00020	0.108	0.0002	0.00021
0.039	0.0001	0.00010	0.058	0.0001	0.00010	0.076	0.0001	0.00010
0.028	0.00005	0.00005	0.041	0.00005	0.00005	0.054	0.00005	0.00005
0.012	0.00001	0.00001						

Примечание. Таблица составлена для модели: сфера $r = 0.545$, окруженная слоем; упругие параметры слоя: $\lambda = 190.125$, $\rho = 4.5$, $\mu = 190.125$; параметры сферы: $\lambda = 934.092$, $\rho = 10.8$, μ – переменное

В процессе изучения зависимости собственных частот от “разжижения” внутренней сферы обнаружено, что первые, точные собственные частоты убывают как $C\mu^{1/2}$. Табл. 5 демонстрирует этот факт для первых трех собственных чисел в модели с нижней границей $R_{\text{разд}} = 0.545$. По-видимому, такое убывание является указанием на то, что при построении асимптотики при $\mu \rightarrow 0$ главный член первых частот должен быть пропорционален $\mu^{1/2}$.

Таким образом, из вычислений собственных чисел и собственных функций следует, что для двухслойной модели метод Ритца работает удовлетворительно. Но результаты ухудшаются по мере того, как один из слоев “разжижается”, т.е. отношение \mathcal{O} становится либо очень большим, либо очень маленьким (в наших расчетах \mathcal{O} равняется либо 100, либо 0.01 для модели из двух слоев, для однородной модели \mathcal{O} равно 1).

Для модели с внутренней сферой при очень малых μ вообще не удается считать по методу Ритца приближения наименьших собственных чисел (влияние ошибок счета приводит к неверным результатам), и мы воспользовались отношением Релея. Подставляя в него экстраполяцию собственных функций для малых μ , для которых метод Ритца еще работает, мы получили оценки собственных частот для меньших μ . Совпадение этих оценок со значениями собственных частот, полученными из дисперсионного уравнения, было удовлетворительным.

Настоящая работа выполнена при поддержке Международного научно-технического центра (грант 1293-99).

ЛИТЕРАТУРА

1. Розенкноп Л.М., Бессонова Э.Н., Резников Е.Л. Вариационный подход к задаче о собственных колебаниях Земли // Вопросы геодинамики и сейсмологии. М.: ГЕОС, 1998. С. 133-167. (Вычисл. сейсмология; Вып. 30).
2. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 589 с.
3. Gilbert F., Dziewonski A.M. An application of normal mode theory to the retrieval of structural parameters and source mechanisms from seismic spectra // Phil. Trans. Roy. Soc., A. 1975. Vol.278, N 1280. P.187-269.
4. Matumoto T., Sato Y. On the vibration of an elastic Globe with one layer. The vibration of the first class // Bull. Earth. Res. Inst. 1954. Vol. 32. P. 247-258.