

УДК 550.311:517.984.54

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА ТОЧНОГО УПЛОЩЕНИЯ ЗЕМЛИ ДЛЯ P-SV-КОЛЕБАНИЙ К РАЗРЕЗУ ГУТЕНБЕРГА

С.Г. Киселев, А.Н. Кузнецов, В.М. Маркушевич

*Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук, Москва*

В предыдущих публикациях разработана теория, позволяющая осуществлять точное уплощение Земли для P-SV-колебаний. Из нее вытекает, что такое уплощение возможно, вообще говоря, только послойно. Чтобы понять, какая требуется разбивка по слоям и как уплощающая модель зависит от частоты, требовалось провести численный эксперимент. Он описан в данной статье на примере разреза Гутенберга. Разработанная с этой целью программа может быть использована для практического вычисления теоретических сейсмограмм в сферически слоистых средах. Она позволяет вычислять на любой частоте эквивалентную плоскую модель, не зависящую от волнового числа, и оператор преобразования колебаний в плоской среде в колебания в сферической среде, который является кубическим многочленом от волнового числа. При расчете рэлеевских колебаний, проникающих ниже глубины 2000 км на периодах больше 400 с, устранимая при точном уплощении ошибка приближенного уплощения Бисваса оказывается существенной.

APPLICATION OF THE EXACT EARTH FLATTENING TRANSFORMATION FOR P-SV-MOTION TO THE GUTENBERG VELOCITY DISTRIBUTION

S.G. Kiselev, A.N. Kuznetsov, and V.M. Markushevich

*International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow*

A theory has been developed in previous publications which allows to perform the exact Earth flattening transformation for P-SV-vibrations; in general, the transformation can be done only layer by layer. A numerical experiment has to be carried out to find the necessary subdivision of the medium into the stack of layers and the dependence of this subdivision on frequency. The present paper describes such an experiment for Gutenberg velocity distribution. The algorithm and code developed for this purpose can be used for practical computation of synthetic seismograms in spherically layered media. At any frequency, it computes an equivalent flat layered model which does not depend on wavenumber. It computes also an operator that transforms vibrations of a flat layered medium into those in the spherically layered medium; the operator is a cubic polynomial of wavenumber. Compared with approximate flattening by Biswas, the exact flattening transformation substantially improves the accuracy of computing Rayleigh vibrations which penetrate deeper than 2000 km and have periods longer than 400 sec.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение распространения сейсмических волн в Земле проще всего начинать с рассмотрения горизонтально-стратифицированного слоистого полупространства, поскольку Земля, как известно, обладает ярко выраженной слоистой структурой. Для верхних слоев Земли это, вероятно, будет хорошим приближением. С увеличением глубины учет кривизны становится более важным и появляется необходимость перейти к уравнениям, описывающим колебания сферического тела. Но это другие, более сложные уравнения, и опыт, накопленный при решении плоской задачи, может оказаться в этом случае недостаточным.

Однако существует обширная переходная область, когда этим опытом можно воспользоваться в полной мере. Для этого вместо сферической Земли рассматривается плоско-слоистое полупространство со специально подобранными свойствами. Оказывается, что на такой плоской модели Земли можно весьма эффективно изучать распространение сейсмических волн.

Для SH-колебаний известна такая модель, которая полностью отражает все свойства своего прототипа. Это следствие того, что задача уплощения в данном случае, как принято говорить, решена точно. Вообще задача уплощения включает поиск двух преобразований. Первое показывает, как по заданным свойствам сферической модели устанавливаются свойства соответствующей плоской модели; второе – как изученные сейсмические колебания плоской среды отображаются в сейсмические колебания сферической среды.

Метод уплощения для SH-колебаний обеспечивает определение таких свойств плоской модели, при которых уравнения сейсмических колебаний в ней совпадают в точности с уравнениями для сферического прототипа с заданными свойствами. Сферические и плоские уравнения имеют разный вид, а также разные зависимости коэффициентов от глубины, но при подстановке конкретных зависимостей оба эти различия компенсируются и получаются два одинаковых уравнения.

1. ПРИБЛИЖЕННЫЕ УПЛОЩЕНИЯ

• В случае P-SV-колебаний долго не удавалось найти преобразования, которые бы переводили уравнения сферических колебаний в уравнения плоских. Вместо точного уплощения использовались различные приближения.

1.1. Уплощение Альтерман, Яроша и Пекериса. В работе [1] Альтерман, Ярош и Пекерис рассмотрели приближение уплощенной Земли, которое преобразует пространственную метрику таким образом, чтобы поверхность сферы перешла в плоскость, а лучи искривились. Импульс, излученный из некоторой точки земной поверхности, может достичь другой точки этой поверхности быстрее, распространяясь по хорде, чем по соответствующей дуге. Это означает, что скорость должна возрастать с глубиной, величина такого возрастания скорости может быть установлена по виду, который принимают дифференциальные уравнения для сферы при большом порядке n сферической функции [1]. Приближение уплощенной Земли подразумевает замену

$$n(n+1)/r^2 \rightarrow k^2(1+2h/a), \quad (1.1)$$

где r – расстояние от центра сферы до рассматриваемой точки, k – волновое число, a – радиус Земли, $h = a - r$. Решение, удовлетворяющее условиям в источнике и условию излучения, ищется в виде ряда, который быстро сходится везде, кроме окрестностей точек $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ (θ – полярный угол в сферических координатах), где каждый член этого ряда обращается в бесконечность. Предельная форма уравнений получается при $a k \rightarrow \infty$, причем членами порядка $1/a$, кроме тех, которые умножаются на большой множитель k^2 , можно пренебречь. В результате это приводит к линейному возрастанию скорости с глубиной для уплощенной среды.

1.2. Уплотнение Бисваса. В работе [2] Бисвасом предложено также приближенное преобразование. Вместо (1.1) делается замена $n(n+1) \rightarrow k_s^2 a^2 - 1/4$, где k_s – волновое число в сферической среде.

Чтобы преобразовать уравнения движения для плоско-слоистой Земли, для вертикальной u и горизонтальной v компонент смещения и глубины z вводятся преобразования

$$u = -k_f r \tilde{u}(z), \quad v = (r/a) \tilde{v}(z), \quad z = a \log(a/r), \quad (1.2)$$

где k_f – волновое число в плоской среде. При этом отбрасывается член, пропорциональный $1/a$; он появляется в уравнениях после этих подстановок. В результате, если в полученных после подстановок уравнениях положить

$$\lambda_f = \lambda_s, \quad \mu_f = \mu_s, \quad \rho_f = \rho_s (r/a)^2, \\ \alpha_f = \alpha_s (a/r), \quad \beta_f = \beta_s (a/r), \quad k_f = k_s (1 - a^{-2} k_s^{-2} / 4)^{1/2},$$

(где индексы f и s соответственно относятся к плоской и сферической величинам), то эти уравнения совпадают с аналогичными уравнениями для плоской среды. Видно, что в этом случае скорости P- и S-волн также возрастают с глубиной.

1.3. Область применения приближенных уплотнений. Задача распространения рэлеевских волн при использовании уплотняющих аппроксимаций существенно упрощается и дает возможность эффективно производить дисперсионный анализ при помощи быстрого матричного метода [3]. Однако приближенное уплотнение позволяет исследовать колебания, захватывающие только кору и мантию Земли, и не позволяет учесть эффекты проникновения колебаний в ядро.

Мы видим, что в описанных случаях приближенного уплотнения отбрасываются члены вида $1/a$, поэтому очевидно, что эти уплотнения должны хорошо работать только для колебаний, происходящих вблизи поверхности Земли. Они приводят к худшим результатам на низких частотах, при которых колебания затрагивают глубинные области Земли. Сравнение с решениями, полученными полным методом нормальных колебаний, показывает, что в случае, рассмотренном в работе [1], кривые фазовых и групповых скоростей для модели Джеффриса–Буллена начинают отклоняться от точных кривых на периодах $T = 250$ с, а для модели Гутенберга – при $T = 380$ с. Аналогичное сравнение проведено также в работе [2]; оно показало, что для модели Гутенберга–Буллена соответствующее расхождение фазовых скоростей не превышало 1% до периодов $T = 373.8$ с (расчет проводился для частот, соответствующих собственным колебаниям Земли; данный период соответствует моде нормальных колебаний $n = 18$).

Более низкочастотные колебания остаются недоступными для расчетов методами приближенных уплотнений. Такие расчеты можно выполнить с помощью преобразования, при котором сферические уравнения в точности переходят в плоские.

2. ТОЧНОЕ УПЛОЩЕНИЕ

Точное уплощение позволило бы изучить колебания, захватывающие глубокие внутренние части Земли: нижнюю часть мантии, внешнее и внутреннее ядро.

2.1. Формулы преобразования. Точное уплощение включает также два преобразования. Первое – преобразование параметров заданной сферической среды $(r, \mu_s, \lambda_s, \rho_s)$ в соответствующие параметры некоторой плоской среды $(x, \mu_f, \lambda_f, \rho_f)$, где через x обозначена глубина

$$(x, \mu_f, \lambda_f, \rho_f) = T_1(r, \mu_s, \lambda_s, \rho_s),$$

второе – преобразование трансформант плоских смещений u_f и напряжений v_f в трансформанты сферических смещений u_s и напряжений v_s

$$(u_s, v_s) = T_2(u_f, v_f).$$

Здесь трансформантами называются преобразования (задаваемые функциями Бесселя в случае плоской среды и полиномами Лежандра в сферическом случае) от соответствующих функций, которые получаются при разделении переменных в исходных уравнениях в частных производных. Так как в дальнейшем мы будем иметь дело только с трансформантами смещений и напряжений, то для краткости слово "трансформанты" опускается.

Преобразования T_1 и T_2 обладают тем свойством, что применение их к величинам, которые удовлетворяют уравнению сферических колебаний

$$\frac{d}{dr} \begin{pmatrix} u_s \\ v_s \end{pmatrix} = \frac{r}{a} \begin{pmatrix} -B_s^{-1}C_s & B_s^{-1} \\ -\frac{r}{a}C_s^T B_s^{-1}C_s - E_s & -\frac{r}{a}C_s^T B_s^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_s \\ v_s \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где $B_s = \left(\frac{r}{a}\right)^2 \begin{pmatrix} \lambda_s + 2\mu_s & 0 \\ 0 & \mu_s \end{pmatrix}$, $C_s = -\frac{r}{a} \begin{pmatrix} \frac{2}{a}\lambda_s & -\xi\lambda_s \\ \xi\mu_s & -\frac{1}{a}\mu_s \end{pmatrix}$,

$$E_s = \begin{pmatrix} -\frac{4}{a^2}(\lambda_s + \mu_s) - \xi^2\mu_s + \left(\frac{r}{a}\right)^2\omega^2\rho_s & \frac{1}{a}\xi(2\lambda_s + 3\mu_s) \\ \frac{1}{a}\xi(2\lambda_s + 3\mu_s) & \mu_s\frac{1}{a^2}\xi(\lambda_s + 2\mu_s) + \left(\frac{r}{a}\right)^2\omega^2\rho_s \end{pmatrix}$$

(ξ – волновое число, соответствующее k_f в формуле (1.2)), дает в результате величины, которые удовлетворяют уравнению колебаний плоской среды

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} u_f \\ v_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B_f^{-1}C_f & B_f^{-1} \\ -C_f^T B_f^{-1}C_f - E_f & C_f^T B_f^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_f \\ v_f \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где $B_f = \begin{pmatrix} \lambda_f + 2\mu_f & 0 \\ 0 & \mu_f \end{pmatrix}$, $C_f = \xi \begin{pmatrix} 0 & \lambda_f \\ -\mu_f & 0 \end{pmatrix}$,

$$E_f = \begin{pmatrix} -\xi^2\mu_f + \omega^2\rho_f & 0 \\ 0 & -\xi^2(\lambda_f + 2\mu_f) + \omega^2\rho_f \end{pmatrix}.$$

а. Преобразование параметров среды. Преобразование T_1 включает преобразование независимой переменной r в переменную $x = a \ln(a/r)$, преобразование параметра среды $\nu = \lambda + 2\mu$ по формуле

$$\nu_f = \nu_s \exp\left(-\frac{x}{a}\right) \det H, \quad (2.3)$$

где H – матрица размерности 2×2 , являющаяся решением следующей системы дифференциальных уравнений, выведенной в работе [4]:

$$\frac{d}{dx}H = L_s H - H L_f. \quad (2.4)$$

Отметим, что матрицы L_s и L_f в правой части (2.4) содержат параметры только сферической среды

$$L_s = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{2\mu'_s}{\nu_s} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\mu'_s}{\mu_s} & \frac{1}{2}(\frac{\nu_s}{\mu_s} - 1) \\ -\frac{\mu_s^2}{\nu_s}(\frac{1}{\mu_s})'' & \frac{\mu'_s}{\mu_s} - \frac{\nu'_s}{\nu_s} \end{pmatrix},$$

$$L_f = \begin{pmatrix} -K_{11} & -K_{12} - 1 \\ \frac{R_{11} + \det K_s - K_{21}}{-K_{12} - 1} & -2(R_{12} - K_{12}K_{22} - 2K_{22}) \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Входящие в L_f элементы матриц K_{ik} и R_{ik} определяются следующими формулами:

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} = H^{-1}K_s H, \quad \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} = H^{-1}(K'_s + K_s L_s - L_s K_s)H,$$

где $K_s = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2\mu'_s}{\nu_s} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\mu'_s}{\nu_s} & -\frac{1}{2}(\frac{\nu_s}{\mu_s} + 1) \\ \frac{\mu_s^2}{\nu_s}(\frac{1}{\mu_s})'' + \omega^2 e^{-2x} \frac{\rho_s}{\nu_s} & -\frac{\mu'_s}{\mu_s} \end{pmatrix}.$

Следовательно, при заданной сферической среде систему (2.4) можно использовать для нахождения матричной функции H .

Из формулы для ν_f находится λ_f при известном μ_f , которое определяется из

$$\mu_f = -\frac{\nu_f}{1 + 2K_{12}}. \quad (2.6)$$

Для преобразования плотности ρ используется формула

$$\rho_f = \nu_f \omega^{-2} \left(K_{21} - \frac{R_{11} + \det K_s - K_{21}}{K_{12} + 1} \right). \quad (2.7)$$

б. Преобразование смещений и напряжений. Преобразование T_2 смещений и напряжений осуществляется по следующим формулам:

$$u_s = M_s \tilde{u}_s, \quad \tilde{u}_s = H \tilde{u}_f, \quad \tilde{u}_f = M_f^{-1} u_f, \quad (2.8)$$

$$M_s = \begin{pmatrix} -\xi & 0 \\ -\frac{2}{a} + \frac{d}{dx} & 1 \end{pmatrix}, \quad M_f^{-1} = \begin{pmatrix} -\xi^{-1} & 0 \\ \xi^{-1} \frac{d}{dx} & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

$$v_s = B_s u'_s - \exp\left(-\frac{x}{a}\right) C_s u_s. \quad (2.10)$$

2.2. Общая идея вывода формул преобразования. Вывод формул преобразования основывается на фундаментальном факте – уравнения колебаний рэлеевского типа допускают унифицированную трактовку в форме Штурма–Лиувилля для упругих сред различных симметрий, в том числе плоско слоистых и сферически слоистых. В работе [5] показано, что для этих типов слоистых сред рэлеевские уравнения в сферическом случае приводятся к виду

$$\left(\frac{d}{dx} - L_s + K_s\right)\left(\frac{d}{dx} - L_s - K_s\right)\tilde{u}_s - \xi^2\tilde{u}_s = 0$$

и к аналогичному виду (с заменой индексов s на f) в плоском случае. Подстановка $\tilde{u}_s = H\tilde{u}_f$ преобразует операторный сомножитель $\left(\frac{d}{dx} - L_s - K_s\right)$ последнего уравнения следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} - L_s - K_s\right)H\tilde{u}_f &= H'\tilde{u}_f + H\tilde{u}'_f - L_s H\tilde{u}_f - K_s H\tilde{u}_f = \\ &= H\tilde{u}'_f + (H' - L_s H)\tilde{u}_f - K_s H\tilde{u}_f = H\left(\frac{d}{dx} - L_f - K_f\right)\tilde{u}_f, \end{aligned}$$

причем в этом равенстве учтено (2.4) и $K_f = H^{-1}K_s H$. Второй операторный сомножитель преобразуется аналогично, и в результате данная подстановка переводит сферическое уравнение в плоское, т.е. осуществляет процедуру "уплощения".

Следовательно, чтобы найти эту подстановку, необходимо проинтегрировать уравнение (2.4) для H . При этом нужно еще специальным образом "подобрать" параметры пока неизвестной к данному моменту плоской среды, входящие в матрицу L_f . Этот "подбор" заключается в том, чтобы выразить ее элементы не через параметры плоской среды, а через элементы матрицы K_s , определяемые, естественно, через параметры сферической среды. В приведенном выше уравнении (2.5) элементы матрицы L_f уже выражены через элементы матрицы K_s . Подробности этой процедуры изложены в [4].

2.3. Неединственность уплощения. Для получения уплощающей среды решается система уравнений (2.4), в которой матрица L_f считается функцией параметров сферической среды μ_s , λ_s и ρ_s . Очевидно, решение этой задачи неединственно. Решение зависит от начального значения матрицы $H(0) = H_0$. Выбирая различные значения H_0 , можно получить бесконечное количество вариантов плоских сред.

2.4. Зависимость уплощения от частоты. В правую часть (2.4) входит частота ω , которая содержится в матрице L_f . Действительно, матрица L_f выражается через K_s , содержащую ω в явном виде. Таким образом, получаемая в результате интегрирования (2.4) матрица-функция H также зависит от частоты, а это означает, что и параметры плоской среды и оператор T_2 преобразования смещений и напряжений для каждой частоты различны.

2.5. Зависимость преобразования смещений от волнового числа. Хотя свойства плоской среды зависят от частоты ω , они не зависят от волнового числа ξ , что позволяет получить полный в физическом смысле плоский аналог сферической задачи в случае монохроматического источника. При этом оператор преобразования смещений и напряжений остается зависимым от ξ . Однако эту

зависимость удается выразить в весьма простой форме полинома третьей степени по ξ , т.е. имеет место следующее разложение:

$$T_2 = M_{-1}\xi^{-1} + M_0 + M_1\xi + M_2\xi^2, \quad (2.11)$$

где M_{-1} , M_0 , M_1 , M_2 – матрицы размерности 4×4 , не зависящие от ξ . Вычислив эти матрицы для плоской среды при некоторой частоте единой, можно существенно ускорить расчет монохроматического волнового поля в сферической среде, используя выражение (2.11) при различных ξ .

2.6. Аппроксимация сферической среды. Расчет параметров плоской среды и оператора преобразования предполагает численное интегрирование системы нелинейных уравнений (2.4). Правая часть этой системы содержит производные от параметров среды до третьей степени включительно. Следовательно, необходимо обеспечить достаточно гладкую интерполяцию этих параметров, которые по предположению заданы таблично.

Попытка осуществить интерполяцию при помощи кубических сплайнов не дала положительного результата вследствие недостаточной гладкости. Поэтому был разработан оригинальный способ интерполяции. Через каждые три последовательные точки таблично заданной интерполируемой функции проводится гипербола таким образом, что каждый интервал между точками таблицы "покрыт" двумя гиперболами – концом предшествующей и началом последующей. В интервале между точками обеспечивается плавный переход от предыдущей гиперболы к последующей при помощи функции

$$\tilde{\varphi}_n(x) = \varphi_n(x)/\varphi_n(b), \quad \text{где } \varphi_n(x) = \int_a^x (1-t)^n t^n dt,$$

обладающей непрерывной производной n -го порядка и принимающей значения

$$\tilde{\varphi}_n(a) = 0, \quad \tilde{\varphi}_n(b) = 1.$$

Интерполяционная формула на интервале $[a, b]$ имеет вид

$$f_{ab}(x) = \zeta_a(x)(1 - \tilde{\varphi}_n(x)) + \zeta_b(x)\tilde{\varphi}_n(x),$$

где $\zeta_a(x)$ – предшествующая гипербола, $\zeta_b(x)$ – последующая.

Уравнение гиперболы, проходящей через три точки (x_i, y_i) , $i = 0, 1, 2$, использовалось в виде

$$\zeta(x) = p(x - x_0)/h + q + y_1 + c\sqrt{((x - x_0)/h - s)^2 + e^2},$$

где $p = -(q + ce)/s$, $q = t_1 - cr_1$,

$$c = -((1-s)t_1 + st_3)(e - r_1(1-s) - r_2s)^{-1},$$

$$r_1 = \sqrt{e^2 + s^2}, \quad r_2 = \sqrt{e^2 + (1-s)^2}, \quad h = x_2 - x_0,$$

$$s + (x_1 - x_0)/h, \quad t_3 = y_2 - y_1, \quad t_1 = y_0 - y_1,$$

(e – параметр "жесткости" гиперболы). Эта аппроксимация является эвристической. Она может использоваться в случае необходимости не только для интерполяции данных, но и для экстраполяции.

3. АЛГОРИТМ ТОЧНОГО УПЛОЩЕНИЯ

3.1. Исходные данные. Исходными данными алгоритма являются: 1) зависимости свойств сферической среды от глубины и 2) параметры расчетов. Таблица свойств среды имеет стандартный формат, в котором по столбцам задается, соответственно, глубина, плотность, скорость S- и P-волн. Каждая строка, таким образом, соответствует определенной глубине, для которой задаются параметры среды. Если параметры претерпевают на некоторой глубине разрыв, таблица содержит две последовательные строки с этой глубиной, в первой из которых занесены параметры вышележащего слоя, а во второй – нижележащего. К параметрам расчетов относятся пределы глубин, для которых рассчитываются: уплощаемая среда, шаг по глубине, частота монохроматических колебаний, волновое число для рэлеевских волн и начальное значение смещений и напряжений на поверхности сферы.

3.2. Выходные данные. В результате работы программы создаются таблицы, которые содержат параметры эквивалентной плоской среды, полученной, во-первых, методом точного уплощения и, во-вторых, методом уплощения Бисва-са. Для каждого метода рассчитывается таблица смещений и напряжений (для каждой глубины), полученных в результате решения соответствующей плоской задачи и преобразования их в сферические. Для сравнения рассчитывается также соответствующая таблица смещений и напряжений, полученных методом прямого численного интегрирования сферической задачи с теми же начальными данными. Кроме того, программа выдает таблицу матриц преобразования плоских смещений и напряжений в сферические. Для каждой глубины таблица содержит четыре матричных коэффициента M_{-1} , M_0 , M_1 , M_2 , которые входят в формулу (2.11). Эти данные необходимы для использования совместно с какой-либо программой для плоской среды, которая таким образом может применяться для решения сферических задач.

3.3. Реализация алгоритма. Основным структурным понятием данного алгоритма является *интервал уплощения*. Это область исходной сферической среды между точками разрыва, внутри которой среда очень гладко, с непрерывными третьими производными интерполируется описанным выше способом (см. разд. 2, п. 2.6). Уплощаемая среда анализируется на наличие точек разрыва параметров, исходные данные группируются в интервалы уплощения и каждый интервал уплощается. Результаты расчетов на каждом интервале объединяются затем в одну для всего разреза таблицу. При этом, разумеется, на границах интервалов обеспечивается непрерывность смещений и напряжений при помощи выбора значений в начале каждого интервала.

3.4. Основные операции в программе. Главный цикл включает этапы:

- интерполяция исходной сферической среды (т.е. параметров Ламе и плотности) по методу, описанному в разд. 2, п. 2.6;
- численное интегрирование нелинейной системы (2.4) и вычисление параметров эквивалентной плоской среды по формулам (2.3), (2.6) и (2.7);
- вычисление оператора преобразования смещений и напряжений по формулам (2.8), (2.9) и (2.10);
- вычисление начальных (на начало данного интервала уплощения) смещений и напряжений для эквивалентной плоской задачи;

- численное интегрирование уравнений (2.2) для эквивалентной плоской задачи;
- численное интегрирование уравнений (2.1) для сферической задачи и аналогичная последовательность операций уплощения по методу Бисваса.

Численное интегрирование осуществлялось методом Адамса четвертого порядка.

3.5. Особые моменты при разработке программы. Особое внимание должно быть уделено достаточной гладкости аппроксимации исходной сферической среды. При невыполнении этого условия решение системы (2.4) становится численно неустойчивым и приводит к выходу параметров эквивалентной плоской среды за пределы физически допустимых – в частности, плотность может оказаться отрицательной.

Выбор начального значения H_0 при интегрировании системы (2.4) является критическим. Если оно выбрано неудачно, то решение может расти столь быстро, что численная процедура уплощения не может быть завершена до окончания текущего интервала. В этом случае может потребоваться разбиение этого интервала на несколько подинтервалов.

Одним из наиболее эффективных способов выбора начального значения H_0 , как показала практика, является отождествление в начальной точке параметров Ламе и плотности, а также производной модуля сдвига в сферической и уплощающей средах. Мы называем такой выбор гладким уплощением. Это можно сделать не для любой сферической среды, но для однородной сферы такой выбор всегда возможен.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

4.1. Расчет параметров плоской среды. На рис. 1 показаны: исходный сферический разрез Гутенберга и эквивалентная плоская среда точного уплощения.

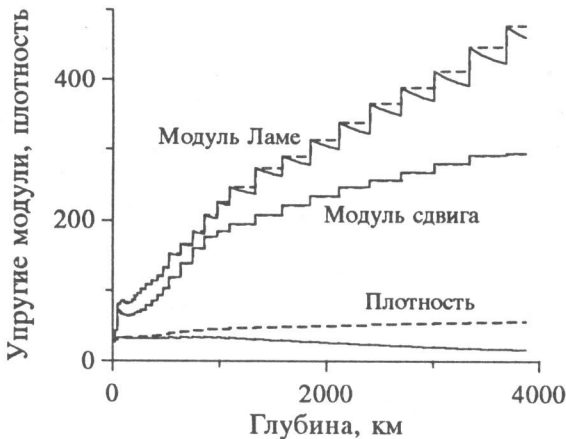


Рис. 1. Эквивалентная плоская модель для разреза Гутенберга.

Штриховые линии – исходный сферический разрез, сплошные – точно уплощенный. График плотности растянут по вертикали в 10 раз

В среде, приближенно-уплощенной по методу Бисваса, модули λ и μ совпадают с соответствующими параметрами исходного разреза, а плотность не отличается от точно-уплощенной в пределах погрешности рисунка. Остановимся на используемых нами единицах. В геофизике удобно выражать плотность в $\text{г}/\text{см}^3$, с другой стороны, скорости обычно выражаются в $\text{км}/\text{с}$.

Это создает трудности при выборе единиц для выражения модуля Ламе, величину которого удобно подсчитывать по формуле $\mu = V_s^2 \rho$. Следовательно, единицы для измерения скорости и единицы для измерения плотности надо согласовать между собой. Для этого используем равенство $\text{г/см}^3 = \text{Гт/км}^3$, где под гигатонной понимается 10^9 тонн. Мы предлагаем измерять плотность в гигатоннах на километр кубический; тогда модуль Ламе измеряется в таких единицах $(\text{км/с})^2 \text{Гт/км}^3 = \text{Гт/с}^2/\text{км}$. Сравнение с модулем Ламе в системе CGS показывает, что величину этого модуля в CGS надо умножить на 10^{-10} , чтобы получить значение этого модуля в предлагаемой нами системе единиц. Для сохранения одной и той же единицы длины приходится вводить необычную единицу массы – гигатонну. Это не так страшно, так как аналогичные единицы – гигабайты – сейчас широко используются в научной литературе.

Точки разрыва соответствуют границам слоев в модели Гутенберга. С уменьшением частоты отклонение λ для точно-уплощенной среды от исходной сферической среды уменьшается, хотя при данной частоте, соответствующей периоду 400 с, оно достаточно заметно.

Легко заметить разницу в поведении μ и ρ , с одной стороны, и модуля λ , с другой. Первые две функции почти совпадают на каждом из подинтервалов в точном уплощении и в приближении Бисваса, если в начале каждого подинтервала они начинаются из одного и того же значения и, кроме того, в начальной точке совпадают производные μ . Функция же λ существенно отклоняется при точном уплощении от того, что дает уплощение Бисваса, хотя обе они и выходят из одной и той же точки в начале каждого подинтервала. Таким образом, уплощение Бисваса является наиболее грубым именно по отношению к параметру λ .

4.2. Скоростные разрезы плоской среды. Скоростные разрезы, которые соответствуют упругим параметрам и плотности, приведенным на рис. 1 изображены на рис. 2. В масштабе рис. 2 скорости при обоих способах уплощения одинаковы. Однако из рис. 1 видно, что параметры Ламе при точном уплощении отличаются от полученных методом Бисваса.

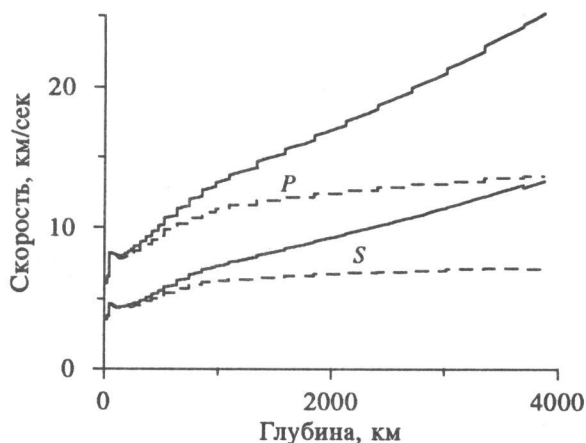


Рис. 2. Скорости P- и S-волн в исходной сферической модели (штриховые линии) и эквивалентной плоской модели (сплошные).

В масштабе рисунка скорости в точно уплощенной и бисвасовой моделях совпадают

Это различие в упругих параметрах и плотности существенно сказывается на точности решений рэлеевских уравнений (рис. 3). Этот результат как раз и обосновывает необходимость применения точного уплощения.

Кажущееся противоречие с рис. 1, состоящее в том, что при двух способах уплощения скорости практически совпадают при несовпадении модулей λ , вызвано тем, что с глубиной изменяется, в основном, плотность. Впрочем, если бы разбиение по глубине было более крупным, чем в разрезе Гутенберга, то различие в модулях λ проявилось бы и на графиках скоростей.

4.3. Расчет смещений и напряжений. На рис. 3 показаны трансформанты смещений и напряжений, рассчитанные для сферической задачи методом непосредственного численного интегрирования и методом точного уплощения, а также методом приближенного уплощения Бисваса.

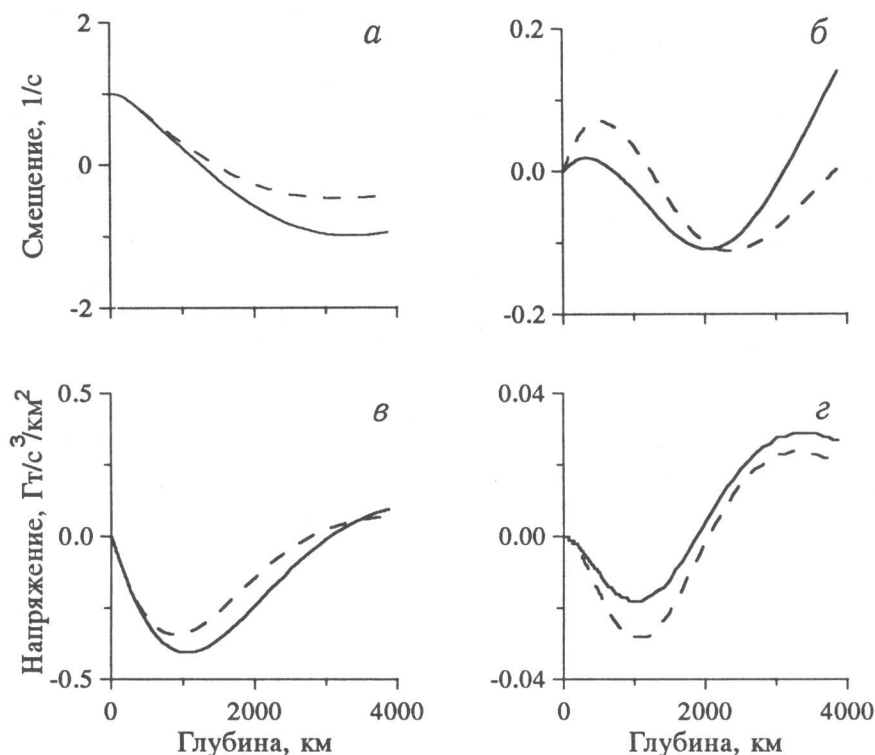


Рис. 3. Трансформанты вертикальной (а) и горизонтальной (б) компонент смещения и вертикальной (в) и горизонтальной (г) компонент напряжения, полученные с помощью точного уплощения (сплошные линии) и уплощения Бисваса (штриховые)

Период $T = 400$ с, волновое число $\xi = 0.001$ км⁻¹

Как видно из рис. 3, ошибка при уплощении Бисваса проявляется по-разному. Для вертикальной компоненты смещения (рис. 3, а) она увеличивается с глубиной монотонно. Для горизонтальной компоненты смещения (рис. 3, б) и нормальной компоненты напряжения (рис. 3, в) характер ошибки осциллирующий.

Для тангенциальной компоненты напряжения (рис. 3,2) наблюдается нечто вроде постоянного смещения приближенного решения относительно точного, т.е. ошибка близка к аддитивной константе. Необязательно, что характер поведения ошибки сохранится при другой частоте рэлеевских колебаний и (или) другой величине спектрального параметра ξ .

Естественно, что кривые, полученные с помощью точного уплощения, абсолютно совпадают с результатом непосредственного решения сферической задачи, что следует из самого названия "точное уплощение".

Может возникнуть вопрос, насколько важны эти расхождения с геофизической точки зрения. Для одних геофизических задач они могут быть важными, а для других нет. Поэтому мы не можем оценить значимость расхождения для любой задачи, а показываем только, что такое расхождение наблюдается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа показывает, что сферические задачи можно рассчитывать, преобразовывая их в плоские, которые являются более простыми в исследовании. Причем, если раньше такое преобразование могло быть лишь приближенным, то представленный метод точного уплощения позволяет решать сферическую задачу с любой заданной точностью. С уменьшением шага интегрирования уплощающей системы отпадают всякие ограничения на толщину уплощаемого сферического слоя, сфера может быть уплощена целиком вплоть до центра. Это уплощение возможно провести для любой частоты, кроме нулевой, и с любой точностью.

Расчет точного уплощения потребует больших затрат. По нашему мнению, анализ параметра "точность/затраты" пока является преждевременным. Расчеты проводились лишь для фиксированных значений частоты и волнового числа. Выигрыш по параметру "точность/затраты" должен проявиться при расчете сейсмограммы, когда требуются вычисления при большом количестве значений частоты и волнового числа.

Свойства полученной в данном исследовании уплощенной сферы, соответствующей модели Гутенберга, таковы, что на отдельных интервалах уплощения скорости Р-волн и плотности растут, а скорости S-волн – убывают. В среднем по множеству интервалов скорости обоих типов волн растут, а плотность убывает и характеристики полученной плоской среды очень близки к бисвасовским.

Необходимо отметить, что имеется большая неоднозначность при построении уплощающей среды. Существует бесконечное континуальное множество возможных преобразований. При каждом преобразовании параметры плоской среды варьируются в больших пределах и можно ставить вопрос об их оптимальном выборе. Такой вопрос может быть полезен при анализе скоростных характеристик программ расчета сейсмограмм для плоских сред.

Авторы приносят благодарность Б.М. Наймарку, замечания которого способствовали улучшению статьи.

Настоящая работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-05-65629) и ИНТАС-РФФИ (грант 95-0865).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Alterman Z., Jarosh H., Pekeris C.L.* Propagation of Rayleigh waves in the Earth // *Geophys. J.* 1961. Vol.4. P.219-241.
2. *Biswas N.N.* Earth-flattening procedure for the propagation of Rayleigh wave // *Pure Appl. Geophys.* 1972. Vol.96. P.61-74.
3. *Gomberg J.S., Masters T.G.* Wave form modelling using locked-mode synthetic and differential seismograms: application to determination of the structure of Mexico // *Geophys. J.* 1988. Vol.4. P.193-218.
4. *Киселев С.Г., Кузнецов А.Н., Маркушевич В.М.* Задача уплощения Земли: происхождение, методы точного решения и разложение в ряд // *Теоретические проблемы в геофизике.* М.: Наука, 1997. С.28-43. (Вычисл. сейсмология; Вып.29).
5. *Киселев С.Г., Кузнецов А.Н., Маркушевич В.М., Цематман А.С.* Разложение на множители и форма Штурма-Лиувилля уравнений для P-SV-колебаний слоистых сред // *Теоретические проблемы в геофизике.* М.: Наука, 1997. С.44-69. (Вычисл. сейсмология; Вып.29).