УДК 550.310:517.984 54

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РЭЛЕЯ В МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

С.Г. Киселев, В.М. Маркушевич
Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, Москва

Рассматривается краевая задача для колебаний рэлеевского типа, или P-SV-колебаний в упругих слоистых средах четырех типов: в плоско слоистом полупространстве, сферически слоистом шаре, цилиндрически слоистом круговом цилиндре и в плоском центрально симметричном диске. В предыдущих работах группы исследователей, в которую входят и авторы этой статьи, уравнения колебаний были преобразованы к матричной форме Штурма–Лиувилля с несимметричным потенциалом. Краевые условия задаются на поверхности тела и дополняются условием убывания смещений на бесконечности в случае полупространства и ограниченности смещений на оси цилиндра и в центре шара и диска. В настоящей работе краевое условие на свободной поверхности записывается как линейная связь между векторным решением и его первой производной на этой поверхности. Связь между ними задается некоторой матрицей. В статье доказывается, что между этой матрицей и потенциалом уравнения Штурма–Лиувилля существует некоторая зависимость. Из нее вытекает, что в любой точке решения матричного уравнения сохраняется постоянным детерминант разности матричного импеданса решения и матричной функции, производная и квадрат которой в сумме дают потенциал матричного уравнения Штурма–Лиувилля, эквивалентного уравнению Рэлея. Эта разность является более гладкой, чем импеданс и потенциал уравнения Рэлея. Элементы ее, как доказывается в статье, определяются с помощью решения уравнения Вольтерра второго рода с ядром, зависящим от матричного потенциала. Уравнения колебаний и краевые условия в телах с различной симметрией имеют общую структуру, поэтому их можно рассматривать как частные случаи общей матричной краевой задачи.

THE RAYLEIGH BOUNDARY VALUE PROBLEM IN THE MATRIX STURM–LIOUVILLE FORM

S.G. Kiselev and V.M. Markushevich
International Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow

The paper treats a boundary value problem for Rayleigh, or P-SV, vibrations of four types of elastic layered media: flat layered half space, spherically layered sphere, cylindrically layered circular cylinder and flat centrally symmetric disc. In the previous works of a group of researchers that includes authors of this paper the vibration equations are written down in the form of a matrix Sturm-Liouville equation with a nonsymmetric matrix potential Boundary conditions are given at the surface of the body; besides, it is assumed that displacements tend to zero at infinity in the half space and are limited at the axis of the cylinder and also at the center of the sphere and disc. In this paper the boundary condition at the free surface is written as a linear combination of a vector solution and the first derivative at the surface. The combination is determined by a matrix. We prove that the matrix and matrix potential of the Sturm–Liouville equation are interrelated. This relation implies the conservation of determinant of some function at any point of the solution. The function is matrix impedance of the solution minus a matrix function the dervative of which plus its square are equal to the potential of the the Rayleigh equation in the matrix Sturm–Liouville form. The function is smoother than the impedance and the matrix potential. We show that its elements can be found from solution of an integral Volterra equation of the second kind whose kernel depends on the matrix potential. The vibration equations and the boundary conditions for bodies with different symmetries have a common structure; hence, they can be treated as particular cases of a general matrix boundary value problem.

ВВЕДЕНИЕ

Данная статья тесно связана с работой [1]. В ней формулируется краевая задача, и затем преобразуются только уравнения, которые приводятся к матричной форме Штурма–Лиувилля. К краевым же условиям преобразования не применяются. Мы восполняем этот пробел.

В разд. 1 приводится сводка матричных уравнений Штурма–Лиувилля и краевых условий для четырех типов упругих слоистых сред: плоско слоистого полупространства, сферически слоистого шара, цилиндрически слоистого кругового цилиндра и плоского центрально симметричного диска. Преобразование краевых условий описано в Приложении 1. Оказывается, что две матрицы, одна из которых входит в краевое условие, а другая определяет потенциал матричного уравнения Штурма–Лиувилля (а именно, сумма производной и ее квадрата равны этому потенциалу), связаны соотношением, которое одинаково для любого из рассматриваемых типов слоистых сред. Это свойство выявило неточность в описании потенциала цилиндрической среды в статье [1]. Вообще, мы постоянно используем результаты работ [1] и [2], поэтому с течением времени в них выявилось несколько неточностей и описок. Мы решили, что список этих неточностей полезно поместить в Приложении 2. Отметим, что некоторые из них исправлены в английской версии этих статей, которые появятся в сборнике *"Computational seismology and geodynamics"*, vol. 4.

В разд. 2 описана краевая задача, которая является обобщением задачи Рэлея. В ней не упоминаются параметры упругой среды и частота, а участвует лишь матрица Q с нулевым следом, которая определяет потенциал U по формуле $U = Q' + Q^2$, и матрица Θ, входящая в краевое условие на свободной поверхности $F' - \Theta F = 0$, где F – векторное решение матричного уравнения Штурма–Лиувилля, а $()' = d()/dx$. Матрицы Q и Θ связаны соотношением $\det(\Theta - Q) = \xi^2$. Все краевые задачи, приведенные в разд. 1, являются частными случаями этой общей задачи. Возможно, что существуют и другие, неизвестные нам конкретизации такой задачи. Ситуация, когда от частных случаев переходят к более общей задаче, погружая или вкладывая в нее частные (английский термин embedding), обычно облегчает исследование свойств задачи.

В разд. 3 преобразуется уравнение Штурма–Лиувилля в уравнение относительно матричной величины $W = F'F^{-1} - Q$. Эта величина оказывается более гладко зависящей от аргумента x, чем импеданс $V = F'F^{-1}$ и Θ по отдельности. Кроме того, оказывается, что из соотношения $\det(\Theta - Q) = \xi^2$ при $x = x_0$ вытекает, что $\det(F'F^{-1} - Q) = \xi^2$ при произвольном значении x.

В разд. 4 выводится интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно следа матрицы $F'F^{-1} - Q$ и доказывается, что любой элемент матричного импеданса $F'F^{-1}$ выражается через это решение. Так как ряд Неймана для уравнения Вольтерра второго рода всегда сходится и скорость сходимости, как правило, высока, то этот результат может оказаться полезным при численном исследовании спектра краевой задачи Рэлея.

1. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ЧЕТЫРЕХ ТИПОВ СЛОИСТЫХ СРЕД

Краевая задача Рэлея (см.ниже уравнения (1) и (2)) формулируется следующим образом [1]:

$$Pu = 0, \qquad \text{где } P = \partial(B\partial + C) - C^T\partial + E. \tag{1}$$

Здесь вектор $u = (v_1, v_2)$, P – симметрический оператор, т.е. $B^T = B$, $E^T = E$, $\partial^T = -\partial$, $\xi^T = \xi$; B, C, E – (2×2)-матрицы; $\partial = \dfrac{d}{dx}$; произведение ∂A для произвольной матрицы или функции A всюду в этой статье понимается как композиция операторов, т.е. $\partial A = A\partial + A'$, $(\,)' \equiv \dfrac{d(\,)}{dx}$. По другому операторная запись может пониматься как $\partial A f = A\partial f + A'f$, где f – произвольная функция; затем эта функция продолжает подразумеваться, но в записи для краткости не обозначается.

Условие равенства нулю напряжений на границе представится в виде

$$(B\partial + C)u|_{x=x_0} = 0, \tag{2}$$

где $x = x_0$ – уравнение свободной границы.

Не будем касаться здесь того, как получаются эти уравнения из исходных уравнений в частных производных с помощью разделения переменных. Такой вывод приведен в [3].

Приведем явные выражения для матриц B, C и E.

1. В плоско слоистом осесимметричном случае

$$B = \operatorname{diag}(\nu, \mu) \equiv \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

$$C = \xi \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\mu & 0 \end{pmatrix},$$

$$E = \operatorname{diag}(\omega^2\rho - \xi^2\mu,\ \omega^2\rho - \xi^2\nu).$$

Здесь и далее $\nu = \lambda + 2\mu$.

2. В сферически слоистом случае $x = r$ – координата-радиус в сферической системе координат

$$
\begin{aligned}
&B = r^2 \operatorname{diag}(\nu, \mu),\\
&C = r\begin{pmatrix} 2\lambda & -\xi\lambda \\ \xi\mu & -\mu \end{pmatrix},\\
&E = \begin{pmatrix} -4(\lambda+\mu) - \xi^2\mu + \omega^2 r^2 \rho & 2\xi\lambda + 3\xi\mu \\ 2\xi\lambda + 3\xi\mu & \mu - \xi^2\nu + \omega^2 r^2\rho \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

3. В цилиндрически слоистом случае $x = r$ – координата-радиус в цилндрической системе координат

$$
\begin{aligned}
&B = r\, \operatorname{diag}(\nu, \mu),\\
&C = \begin{pmatrix} \lambda & -\xi r\lambda \\ \xi r\mu & 0 \end{pmatrix},\\
&E = \begin{pmatrix} -r^{-1}\nu - \xi^2 r\mu + \omega^2 r\rho & \xi\lambda \\ \xi\lambda & -\xi^2 r\nu + \omega^2 r\rho \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

4. В случае плоского диска

$$
\begin{aligned}
&B = r\, \operatorname{diag}(\nu, \mu),\\
&C = \begin{pmatrix} \lambda & -\xi\lambda \\ \xi\mu & -\mu \end{pmatrix},\\
&E = \begin{pmatrix} -r^{-1}\nu - \xi^2 r^{-1}\mu + \omega^2 r\rho & \xi r^{-1}(\lambda+3\mu) \\ \xi r^{-1}(\lambda+3\mu) & -r^{-1}\mu - \xi^2 r^{-1}\nu + \omega^2 r\rho \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Заметим, что в [1] последний случай называется сдвигово симметричным цилиндрическим. Мы выбрали здесь более наглядное, с нашей точки зрения, название. Надо только учесть, что в случае плоского диска [4] нужно считать, что вместо λ в этих уравнениях стоит $\widehat{\lambda} = 2\mu\lambda\nu^{-1}$.

С помощью серии подстановок, которые подробно описаны в [1], оператор P приводится к виду P_1

$$
P_1 \overset{\text{def}}{=} (\partial + Q)(\partial - Q) - \xi^2 = \partial^2 - \xi^2 - U, \tag{3}
$$

где матрица G является решением уравнения

$$
\begin{aligned}
&G' = LG, \quad G(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\\
&Q \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Int}_G(K), \quad U = Q' + Q^2 = ID' - \det D, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\\
&D \overset{\text{def}}{=} -IQ = G^{\mathrm{T}} S G (\det G)^{-1}, \quad S \overset{\text{def}}{=} -IK.
\end{aligned}
$$

Здесь $\operatorname{Int}_G(K) \overset{\text{def}}{=} G^{-1}KG$. Оказывается, что матрицы S и D симметрические, след матрицы Q равен нулю, $\det G = 1$.

Такая же серия подстановок, которая используется при выводе (3), приводит краевое условие к виду

$$F' - \Theta F = 0, \tag{4}$$

где F – вектор-столбец, на который действует оператор P_1 в (3).

Приведение краевого условия к виду (4) подробно описано в Приложении 1. Ясно, что преобразование оператора P осуществлялось последовательностью преобразований подобия, в то время как преобразование краевого условия – это последовательность замен переменных.

Выпишем выражения для матриц K, L и Θ а также для независимой переменной в различных слоистых телах. Матрица Θ во всех случаях рассматривается на поверхности среды, т.е. при $x = 0$ или при $r = r_0$. Заметим, что независимую переменную для плоского диска мы выбираем не так, как в [1]. Такое же изменение независимой переменной было сделано в [2] в сферическом случае по сравнению с рассмотрением этого случая в [1]. По аналогии с этим переходом легко внести в [1] те небольшие изменения, которые вызваны другим выбором независимой переменной и для плоского диска.

1. В плоско слоистом осесимметричном случае переменная x – глубина

$$K = \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mu' & -\frac{1}{2}\varkappa^{-1}\mu\nu^{-1}(\lambda+3\mu) \\ \varkappa(\mu^{-2}\omega^2\rho + (\mu^{-1})'') & -\mu^{-1}\mu' \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\varkappa^{-1}\mu\nu^{-1}(\lambda+\mu) \\ -\varkappa(\mu^{-1})'' & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mu' & -\frac{1}{2}\varkappa^{-1}\mu^2\nu^{-1} \\ \varkappa\mu^{-1}(-2\xi^2 + \mu^{-1}\omega^2\rho + \mu(\mu^{-1})'') & 0 \end{pmatrix}.$$

2. В сферически слоистом случае x связана с r соотношением $r = r_0 \exp(-\dfrac{x}{r_0})$, где r_0 – внешний радиус сферы

$$K = \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mu' + \frac{1}{2}r_0^{-1} & -\frac{1}{2}\varkappa^{-1}r_0^{-2}r^2\mu(\lambda+3\mu)\nu^{-1} \\ K_{21} & -\mu^{-1}\mu' - \frac{1}{2}r_0^{-1} \end{pmatrix},$$

здесь $K_{21} = \varkappa r_0^2 r^{-2}((\mu^{-1})'' - 2r_0^{-1}(\mu^{-1})' + \omega^2\rho r^2 r_0^{-2}\mu^{-2})$,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\varkappa^{-1}r_0^{-2}r^2\mu(\lambda+\mu)\nu^{-1} \\ -\varkappa r_0^2 r^{-2}((\mu^{-1})'' + 2r_0^{-1}(\mu^{-1})') & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mu' - \frac{3}{2}r_0^{-1} & -\frac{1}{2}\varkappa^{-1}\mu^2\nu^{-1} \\ \Theta_{21} & -\frac{3}{2}r_0^{-1} \end{pmatrix},$$

где $\Theta_{21} = \varkappa\mu^{-1}(-2(\xi^2 - 2r_0^{-2}) + \mu(\mu^{-1})'' + 2r_0^{-1}\mu(\mu^{-1})' + \omega^2\rho\mu^{-1})$.

3. В цилиндрически слоистом случае $x = r$

$$K = \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mu' - \frac{1}{2}r^{-1} & -\frac{1}{2}\varkappa^{-1}\mu\nu^{-1}(\lambda+3\mu) \\ \varkappa((\mu^{-1})'' + 2r^{-1}(\mu^{-1})' + \omega^2\rho\mu^{-2}) & -\mu^{-1}\mu' + \frac{1}{2}r^{-1} \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\varkappa^{-1}\mu\nu^{-1}(\lambda+\mu) \\ -\varkappa(\mu^{-1})'' & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mu' + \frac{1}{2}r_0^{-1} & -\frac{1}{2}\varkappa^{-1}\mu^2\nu^{-1} \\ \varkappa\mu^{-1}(-2\xi^2 + \mu(\mu^{-1})'' + \omega^2\rho\mu^{-1}) & \frac{1}{2}r_0^{-1} \end{pmatrix}.$$

4. В случае плоского диска, как и в сферическом, переменная x связана с r соотношением $r = r_0 \exp(-\frac{x}{r_0})$, где r_0 – внешний радиус диска,

$$K = \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mu' & -\frac{1}{2}\varkappa^{-1}r_0^{-2}r^2\mu(\lambda+3\mu)\nu^{-1} \\ \varkappa r_0^2 r^{-2}((\mu^{-1})'' + \omega^2\rho r^2 r_0^{-2}\mu^{-2}) & -\mu^{-1}\mu' \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\varkappa^{-1}r_0^{-2}r^2\mu(\lambda+\mu)\nu^{-1} \\ -\varkappa r_0^2 r^{-2}((\mu^{-1})'' + 2r_0^{-1}(\mu^{-1})') & 0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mu' - r_0^{-1} & -\frac{1}{2}\varkappa^{-1}\mu^2\nu^{-1} \\ \Theta_{21} & -r_0^{-1} \end{pmatrix},$$

здесь $\Theta_{21} = \varkappa\mu^{-1}(-2(\xi^2 - r_0^{-2}) + \mu(\mu^{-1})'' + 2r_0^{-1}\mu(\mu^{-1})' + \omega^2\rho\mu^{-1})$.

Сделаем очень важное замечание: *для всех четырех случаев слоистых тел выполняется соотношение* $\det(\Theta - Q) = \xi^2$ *на поверхности среды.*

Действительно, так как по условию G(0) является единичной матрицей, то на поверхности $Q = K$. Равенство $\det(\Theta - K) = \xi^2$ при $x = 0$ или $r = r_0$ проверяется непосредственно для всех четырех случаев.

2. ОБОБЩЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РЭЛЕЯ

Мы видим, что во всех четырех случаях (5)–(8), можно описать краевую задачу Рэлея как следующую матричную краевую задачу Штурма–Лиувилля:
задано матричное уравнение Штурма–Лиувилля

$$F'' - \xi^2 F = UF, \tag{9}$$

где потенциал U определяется некоторой матрицей Q, по формуле

$$U = Q' + Q^2; \tag{10}$$

в начале области определения при $x = 0$ задано краевое условие

$$F' - \Theta F = 0, \tag{11}$$

причем

$$\det(\Theta - Q) = \xi^2. \tag{12}$$

Так как Q зависит только от x, то из равенства (12) следует, что Θ зависит от ξ.

Как уже отмечалось ранее, мы рассматриваем уравнения для трансформированных смещений в исходных трехмерных задачах Рэлея; эти трансформанты удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Области определения для четырех рассматриваемых трансформированных задач Рэлея различны: для трех из них задача рассматривается на полуоси, а для цилиндрической – на конечном интервале $[0, r_0]$. При достаточно гладкой зависимости упругих параметров от x потенциалы в трех случаях ограничены. В цилиндрическом же случае потенциал стремится к бесконечности при $r \to 0$.

Поэтому, скорее всего, цилиндрический случай заслуживает отдельного рассмотрения. В дальнейшем мы постулируем, что

1) задача рассматривается на полуоси $x \in [0, \infty)$ и

2) матрица Q и ее производная Q' равномерно ограничены на этой полуоси и быстро убывают при $x \to \infty$.

Возможно, что второе условие можно существенно ослабить, но мы не будем останавливаться на этом.

Теперь второе граничное условие задачи (9)–(12) сформулируем так:

$$F \to 0 \quad \text{при} \;\; x \to \infty. \tag{13}$$

Таким образом, мы имеем задачу (9)–(13), которая обобщает три случая краевой задачи Рэлея: плоско слоистый, сферический и случай плоского диска. Эти три задачи волновой механики вложены, погружены в абстрактную задачу (9)–(13). Вложение дает большую свободу при исследовании свойств задачи. Отвлекаясь от конкретных механических параметров, мы можем сосредоточиться на свойствах, которые определяются тремя различными функциями, задающими Q (в силу условия $\mathrm{tr}Q = 0$), и четырьмя элементами матрицы Θ.

3. МАТРИЧНОЕ УРАВНЕНИЕ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ В ДРУГОЙ ФОРМЕ

Рассмотрим уравнения (9)–(10) в форме

$$\begin{aligned} &F'' - \xi^2 F = (Q' + Q^2)F, \\ &\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & -q_4 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{14}$$

Пусть импеданс равен

$$V = F'F^{-1}, \tag{15}$$

тогда $V' = F''F^{-1} - V^2$.

Уравнение (14) с помощью (15) можно переписать в виде

$$V' + V^2 = \xi^2 + Q' + Q^2 \quad \text{или} \quad (V - Q)' = \xi^2 + Q^2 - V^2.$$

Положим

$$W = V - Q, \tag{16}$$

тогда

$$W' + W^2 + (WQ + QW) = \xi^2. \tag{17}$$

Полагая $W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix}$,

получаем, что матричное уравнение (17) переписывается в виде системы

$$\begin{aligned} &w_1' + (w_1^2 + w_2 w_3) + (2q_1 w_1 + w_2 q_3 + w_3 q_2) - \xi^2 = 0, \\ &w_4' + (w_4^2 + w_2 w_3) + (-2q_1 w_4 + w_2 q_3 + w_3 q_2) - \xi^2 = 0, \\ &w_2' + (w_2 + q_2)(w_1 + w_4) = 0, \\ &w_3' + (w_3 + q_3)(w_1 + w_4) = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Пусть

$$\begin{aligned} &w_1 + w_4 = tr\, w = s, \quad p = \exp\left(\int\limits_0^x s(t)dt\right), \\ &\sigma = s(x)p(x), \quad w_1 - w_4 = u. \end{aligned} \tag{19}$$

Тогда (18) с учетом (19) принимает вид

$$\begin{aligned} &\sigma' + 2q_1\tilde{u} + 2(q_3\tilde{w}_2 + q_2\tilde{w}_3) - 2p(\xi^2 + \det W) = 0, \\ &\tilde{u}' + 2q_1\sigma = 0, \\ &\tilde{w}_2' + q_2\sigma = 0, \\ &\tilde{w}_3' + q_3\sigma = 0, \\ &p' = \sigma, \quad \text{где } \tilde{f} = fp. \end{aligned} \tag{20}$$

Из системы (20) получаем
Предложение.

$$\xi^2 - \det W = C\exp\left(-\int\limits_0^x s(t)dt\right), \quad C = \text{const}. \tag{21}$$

Доказательство. Умножая первое уравнение в (20) на σ, получаем с учетом остальных уравнений а также того, что $p' = \sigma$

$$\left(\frac{1}{2}\sigma^2\right)' = \left(\frac{\tilde{u}^2}{2}\right)' + 2(\tilde{w}_2\tilde{w}_3)' + (\xi^2 + \det W)(p^2)'$$

или

$$2(p^2 \det W)' = (\xi^2 + \det W)(p^2)', \quad \text{т.е.} \quad 2p^2(\det W)' = (\xi^2 - \det W)(p^2)',$$

откуда и следует (21)

$$\xi^2 - \det W = C\exp\left(-\int\limits_0^x s(t)dt\right), \quad C = \text{const}.$$

Следствие. Пусть $\det W = \xi^2$ *при* $x = 0$. *Тогда* $\det W = \xi^2$ *при любом* x.

Заметим, что так как для уравнения Риккати (17) краевое условие (11) превращается в $V = F'F^{-1} = \Theta$ при $x = 0$, то равенство $\det W = \xi^2$ выполняется при всех x для трех рассматриваемых видов слоистых сред и при всех r для цилиндрически слоистых сред.

Заметим также, что для плоско слоистых сред сохранение величины $\det W = \xi^2$ в любой точке решения уравнения Рэлея было установлено в [5] в несколько другой форме.

4. УРАВНЕНИЕ РЭЛЕЯ В ФОРМЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО РОДА

Пусть $\det W = \xi^2$ при $x = 0$. Тогда из только что установленного следствия вытекает, что система (20) переписывается в виде

$$\begin{aligned}
&\sigma' = -2q_1\tilde{u} - 2q_3\tilde{w}_2 - 2q_2\tilde{w}_3 + 4\xi^2 p,\\
&\tilde{u}' = -2q_1\sigma,\\
&\tilde{w}_2' = -q_2\sigma,\\
&\tilde{w}_3' = -q_3\sigma,\\
&p' = \sigma.
\end{aligned} \tag{22}$$

Проинтегрировав четыре последние уравнения системы (22) и подставив в первое, получаем

$$\begin{aligned}
&\sigma'(v) = 2\int_0^v (2q_1(v)q_1(t) + q_3(v)q_2(t) + q_2(v)q_3(t) + 2\xi^2)\sigma(t)dt -\\
&-2(q_1(v)\tilde{u}(0) + q_3(v)\tilde{w}_2(0) + q_2(v)\tilde{w}_3(0) - 2\xi^2 p(0)).
\end{aligned}$$

Интегрируя это соотношение и изменяя последовательность интегрирования, имеем

$$\begin{aligned}
&\sigma(x) = \int_0^x \sigma'(v)dv + \sigma(0) = 2\int_0^x \left(2q_1(t)\int_t^x q_1(v)dv + q_2(t)\int_t^x q_3(v)dv +\right.\\
&\left.+q_3(t)\int_t^x q_2(v)dv + 2\xi^2(x-t)\right)\sigma(t)dt - 2\left(\tilde{u}(0)\int_0^x q_1(v)dv +\right.\\
&\left.+\tilde{w}_2(0)\int_0^x q_3(v)dv + \tilde{w}_3(0)\int_0^x q_2(v)dv - 2\xi^2 p(0)x\right) + \sigma(0).
\end{aligned} \tag{23}$$

Таким образом, уравнение (23) имеет стандартный вид уравнения Вольтерра второго рода

$$\sigma(x) = \int_0^x K(x,t)\sigma(t)dt + \varphi(x),$$

где выражения для ядра $K(x,t)$ и свободного члена ясны из сравнения с (23). Эти уравнения обычно решаются последовательными итерациями и скорость сходимости, как правило, достаточно велика.

Заметим, что в нашем случае ядро хотя и имеет вырожденный вид

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^n h_i(x)g_i(t),$$

но на самом деле вырожденным не является в силу условия вольтерровости:

$$K(x,t) = 0 \qquad \text{при} \quad t > x.$$

После того как $\sigma(x)$ найдено, элементы матрицы $W(x)$ получаются интегрированием последних четырех уравнений системы (22). Так как матрица $Q(x)$ задана, то с помощью (16) находим матричный импеданс $V = F'F^{-1}$.

Коротко опишем возможное применение полученного интегрального уравнения при исследовании спектра рэлеевской задачи. Как следует из краевого условия на свободной поверхности, дискретный спектр определяется нулями выражения

$$\det(F'F^{-1} - \Theta) = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Учитывая, что $\det W = \det(F'F^{-1} - Q) = \xi^2$ при всех x и, в частности, при $x = 0$, а элементы матрицы W вычисляются с помощью решения интегрального уравнения Вольтерра, получаем

$$\begin{aligned}\det(F'F^{-1} - \Theta) &= \xi^2 + w_1(q_4 - \theta_4) + w_4(q_1 - \theta_1) - w_3(q_2 - \theta_2) - w_2(q_3 - \theta_3) = \\ &= \xi^2 - w_1(q_1 + \theta_4) + w_4(q_1 - \theta_1) - w_3(q_2 - \theta_2) - w_2(q_3 - \theta_3)\end{aligned}$$

при $x = 0$. Здесь использовано то, что $q_1 = -q_4$.

Решать интегральное уравнение нужно, используя асимптотическое условие убывания решения $F(x)$ на бесконечности и пересчитывая это решение из области больших x на поверхность. Для этого можно поступить следующим образом. В некоторой окрестности бесконечности, при $x > X$, аппроксимировать Q аналитически и найти такое решение матричного уравнения Штурма–Лиувилля, чтобы

$$F \to \begin{pmatrix} e^{-\xi x} & 0 \\ 0 & e^{-\xi x} \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad x \to \infty,$$

и затем с помощью интегрального уравнения Вольтерра, двигаясь по оси x вспять, нужно пересчитать это решение из точки X на поверхность $x = 0$.

Надеемся, что описанный способ окажется удобным для исследования спектра краевой задачи Рэлея. Одним из его достоинств, на наш взгляд, является то, что он опирается на матричный импеданс, который вычисляется более устойчиво, чем само решение матричного уравнения. Однако окончательную оценку предлагаемого метода может дать только вычислительная практика.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Вывод матрицы Θ для четырех типов симметрий

В этом приложении выводятся выражения для матрицы Θ, которая участвует в краевом условии на свободной поверхности $F' - \Theta F = 0$.

Плоско слоистый осесимметрический случай. Граничные условия задаются следующим уравнением:

$$(B\partial + C)u|_{x=x_0} = 0. \tag{1.1}$$

После подстановки матриц B и C уравнение (1.1) записывается в виде системы

$$\begin{aligned}&\lambda\xi u_2 + \nu u_1' = 0, \\ &-\xi u_1 + u_2' = 0.\end{aligned} \tag{1.2}$$

Сначала в системе (1.2) делается замена переменных $u = Qv$, где $Q = \begin{pmatrix} -\xi & 0 \\ \partial & 1 \end{pmatrix}$, после чего она приобретает вид

$$\begin{aligned} &\lambda v_2 - 2\mu v_1' = 0, \\ &\xi^2 v_1 + v_2' + v_1'' = 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Чтобы исключить вторую производную v_1'', выражаем ее из первого уравнения рэлеевской системы, в котором сделана замена переменных $u = Qv$ (ср. также с первым уравнением в формуле (11) в работе [1]), и подставляем во второе уравнение системы (1.3)

$$\begin{aligned} &\lambda v_2 - 2\mu v_1' = 0, \\ &\mu(2\mu\xi^2 - \rho\omega^2)v_1 - \lambda v_2 \mu' + \mu(v_2\lambda' + \nu v_2') = 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Заменим в (1.4) переменную V на W по формуле $v = M_4 w$, где $M_4 = \begin{pmatrix} \frac{\varkappa}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{\nu} \end{pmatrix}$.

После этой замены (1.4) приобретает вид

$$\begin{aligned} &\tfrac{\lambda\mu w_2}{\nu} + \tfrac{2\varkappa w_1 \mu'}{\mu} - 2\varkappa w_1' = 0, \\ &\left(2\varkappa\xi^2 - \tfrac{\varkappa\rho\omega^2}{\mu}\right) w_1 + \mu w_2' = 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Следующая подстановка $w = Gz$, где $G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$ – матрица, определяемая свойствами

$$G|_{x=x_0} = 1, G'|_{x=x_0} = L; \tag{1.6}$$

здесь $L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu(\nu-\mu)}{2\varkappa\nu} \\ -\varkappa\left(\frac{1}{\mu}\right)'' & 0 \end{pmatrix}$.

После подстановки $w = Gz$ уравнения (1.5) переходят в

$$\begin{aligned} &\tfrac{\lambda\mu(g_{21}z_1 + g_{22}z_2)}{\nu} + \\ &+ \tfrac{2\varkappa(g_{11}z_1 + g_{12}z_2)\mu'}{\mu} - 2\varkappa(z_1 g_{11}' + z_2 g_{12}' + g_{11}z_1' + g_{12}z_2') = 0, \\ &\left(2\varkappa\xi^2 - \tfrac{\varkappa\rho\omega^2}{\mu}\right)(g_{11}z_1 + g_{12}z_2) + \mu(z_1 g_{21}' + z_2 g_{22}' + g_{21}z_1' + g_{22}z_2') = 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Учитывая в (1.7) свойства (1.6), получаем

$$\begin{aligned} &-\tfrac{\mu^2 z_2}{\nu} + \tfrac{2\varkappa z_1 \mu'}{\mu} - 2\varkappa z_1' = 0, \\ &\mu^2 z_2' + \varkappa z_1 \left(2\mu\xi^2 - \rho\omega^2 - \mu^2\left(\tfrac{1}{\mu}\right)''\right) = 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Если выделить в (1.8) матричные коэффициенты при z' и z, то (1.8) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} -2\varkappa & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix} z' + \begin{pmatrix} \frac{2\varkappa\mu'}{\mu} & -\frac{\mu^2}{\nu} \\ -\varkappa\left(\left(\frac{1}{\mu}\right)''\mu^2 - 2\xi^2\mu + \rho\omega^2\right) & 0 \end{pmatrix} z = 0. \tag{1.9}$$

Умножим (1.9) слева на такую матрицу, чтобы коэффициент при z' обратился в единицу. Получившийся матричный коэффициент при z обозначим через Θ:

$$z' - \Theta z = 0,$$

где $\Theta = \begin{pmatrix} \frac{\mu'}{\mu} & -\frac{\mu^2}{2\varkappa\nu} \\ -\frac{2\varkappa\xi^2}{\mu} + \frac{\varkappa\rho\omega^2}{\mu^2} + \varkappa\left(\frac{1}{\mu}\right)'' & 0 \end{pmatrix}$.

Непосредственным вычислением можно убедиться, что выполняется тождество

$$\det(\Theta - K|_{x=x_0}) = \xi^2, \tag{1.10}$$

где $K = \begin{pmatrix} \frac{\mu'}{\mu} & -\frac{\mu(\mu+\nu)}{2\varkappa\nu} \\ \varkappa\left(\frac{\rho\omega^2}{\mu^2} + \left(\frac{1}{\mu}\right)''\right) & -\frac{\mu'}{\mu} \end{pmatrix}$.

В самом деле,

$$\Theta - K = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu}{2\varkappa} \\ -\frac{2\varkappa\xi^2}{\mu} & \frac{\mu'}{\mu} \end{pmatrix},$$

откуда очевидно следует тождество (1.10).

Сферически слоистый случай. Уравнение (1.1) в сферически слоистом случае имеет вид

$$2\lambda_s u_{s,1} - \lambda_s\xi_s u_{s,2} + r\nu_s u'_{s,1} = 0,$$
$$\xi_s u_{s,1} - u_{s,2} + r u'_{s,2} = 0,$$

причем независимой переменной в этом случае является радиус r.

Переходим к новой независимой переменной x, которая связана с радиусом формулой $r = \exp(-x\varepsilon)/\varepsilon$, где ε^{-1} – радиус Земли. Вводим также новое волновое число ξ, которое связано со старым ξ_s по формуле $\xi_s = \xi/\varepsilon$.

$$\begin{aligned} -2\varepsilon u_1\lambda_s + \xi u_2\lambda_s + \nu_s u_1' &= 0, \\ \xi u_1 - \varepsilon u_2 - u_2' &= 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

После первой замены переменных $u = Qv$, где в сферическом случае матрица

$$Q = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1}\xi & 0 \\ -\varepsilon^{-1}\partial & 1 \end{pmatrix},$$

система (1.11) переходит в

$$\begin{aligned} -2\varepsilon v_1\lambda_s + \varepsilon v_2\lambda_s + 2\mu_s v_1' &= 0, \\ \frac{\xi^2 v_1}{\varepsilon} - \varepsilon v_2 + v_1' - v_2' + \frac{v_1''}{\varepsilon} &= 0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Для исключения второй производной v_1'' снова выражаем ее из первого уравнения рэлеевской системы, в котором сделана замена переменных $r = \varepsilon^{-1}e^{-x\varepsilon}, u = Qv$ (ср. также со вторым уравнением в формуле (16) в работе [1]), и подставляем во второе уравнение (1.12):

$$\begin{aligned}&(-2\varepsilon v_1\lambda_s + \varepsilon v_2\lambda_s + 2\mu_s v_1' = 0,\\ &2\varepsilon\mu_s v_1' + 2\varepsilon\nu_s v_1' - 2\mu_s' v_1' - \varepsilon\nu_s v_2' - \varepsilon v_2(2\varepsilon\mu_s + \varepsilon\nu_s + \lambda_s')+\\ &+v_1(2\nu_s\varepsilon^2 + 2\lambda_s'\varepsilon + 2\xi^2\mu_s - e^{-2x\varepsilon}\omega^2\rho_s) = 0).\end{aligned} \tag{1.13}$$

Следующая подстановка $v = M_4 w$, где M_4 в сферическом случае имеет вид

$$M_4 = \begin{pmatrix} -\frac{\varkappa}{r^{3/2}\varepsilon\mu_s} & 0\\ -\frac{2\varkappa}{r^{3/2}\varepsilon\mu_s} & \frac{\sqrt{r}\mu_s}{\nu_s}\end{pmatrix},$$

приводит уравнения (1.13) к виду

$$\begin{aligned}&(e^{2x\varepsilon}\varkappa\nu_s(2\mu_s w_1' + w_1(3\varepsilon\mu_s - 2\mu_s')) - w_2\lambda_s\mu_s^2 = 0,\\ &2\nu_s(\varkappa w_1(e^{2x\varepsilon}(\varepsilon^2 - 2\xi^2)\mu_s^2 + (\rho_s\omega^2 + 5e^{2x\varepsilon}\varepsilon\mu_s')\mu_s - 2e^{2x\varepsilon}(\mu_s')^2)-\\ &-\mu_s(w_2'\mu_s^2 + 2e^{2x\varepsilon}\varepsilon\varkappa w_1'\mu_s - 2e^{2x\varepsilon}\varkappa w_1'\mu_s'))-\\ &-w_2\mu_s^2(4\varepsilon\mu_s^2 + (\varepsilon\nu_s - 4\mu_s')\mu_s + 2\nu_s\mu_s') = 0).\end{aligned} \tag{1.14}$$

Далее, как и в плоском случае, к уравнениям (1.14) применяется подстановка $w = Gz$, где матрица G также обладает свойствами (1.6), причем в данном случае

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{e^{-2x\varepsilon}\mu_s(\nu_s-\mu_s)}{2\varkappa\nu_s}\\ -e^{2x\varepsilon}\varkappa\left(\frac{2(\mu_s')^2}{\mu_s^3} - \frac{2\varepsilon\mu_s'}{\mu_s^2} - \frac{\mu_s''}{\mu_s^2}\right) & 0\end{pmatrix}.$$

После подстановки $w = Gz$ и учета равенств (1.6) уравнения (1.14) в матричной форме имеют вид

$$z' - \Theta z = 0,$$

где $$\Theta = \begin{pmatrix} \frac{\mu_s'}{\mu_s} - \frac{3\varepsilon}{2} & -\frac{\mu_s^2}{2\varkappa\nu_s}\\ \frac{\varkappa\left(\rho_s\omega^2+2\left(2\varepsilon^2-\xi^2\right)\mu_s-2\varepsilon\mu_s'+\mu_s^2\left(\frac{1}{\mu_s}\right)''\right)}{\mu_s^2} & -\frac{3\varepsilon}{2}\end{pmatrix}.$$

Снова непосредственной проверкой убеждаемся, что выполняется тождество (1.10), где матрица K в данном случае имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\mu_s'}{\mu_s} & -\frac{r^2\varepsilon^2\mu_s(\mu_s+\nu_s)}{2\varkappa\nu_s}\\ \frac{\varkappa((\frac{1}{\mu_s})''\mu_s^2+\varepsilon(r^2\varepsilon\rho_s\omega^2+2\mu_s'))}{r^2\varepsilon^2\mu_s^2} & -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\mu_s'}{\mu_s}\end{pmatrix}.$$

Действительно,

$$\Theta - K(0) = \begin{pmatrix} -2\epsilon & \frac{\mu}{2\varkappa}\\ \varkappa(-4\epsilon\frac{\mu'}{\mu^2} + 2(2\epsilon^2 - \xi^2)\mu^{-1}) & -\epsilon + \frac{\mu'}{\mu}\end{pmatrix}.$$

Цилиндрически слоистый случай. Уравнение (1.1) в цилиндрически слоистом случае имеет вид

$$\begin{aligned} &u_1\lambda_s - x\xi u_2\lambda_s + x\nu_s u_1' = 0,\\ &\xi u_1 + u_2' = 0. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Независимая переменная x в этом уравнении совпадает с радиусом r в цилиндрической системе координат. Применяем первую подстановку $u = Qv$, где

$$Q = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ \partial & 1 \end{pmatrix},$$

тогда уравнение (1.15) принимает вид

$$\begin{aligned} &v_1\lambda_s + x(-v_2\lambda_s + 2\mu_s v_1') = 0,\\ &\xi^2 v_1 + v_2' + v_1'' = 0. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Далее исключаем вторую производную v_1'' во втором уравнении (1.16), для чего выражаем ее из первого уравнения рэлеевской системы, в котором сделан переход к новым функциям v_1 и v_2 (ср. также с первым уравнением в формуле (18) работы [1]), и подставляем во второе уравнение (1.16)

$$\begin{aligned} &v_1\lambda_s + x(-v_2\lambda_s + 2\mu_s v_1') = 0,\\ &x^2\nu_s v_2' + x^2 v_2\lambda_s' + v_1(2x^2\xi^2\mu_s + \nu_s -\\ &-x(x\omega^2\rho_s + \lambda_s')) - xv_1'(\nu_s + 2x\mu_s') = 0. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Следующая подстановка $v = M_4 w$, где M_4 в цилиндрическом случае имеет вид

$$M_4 = \begin{pmatrix} \frac{\varkappa}{\sqrt{x\mu_s}} & 0 \\ \frac{\varkappa}{x^{3/2}\mu_s} & \frac{\mu_s}{\sqrt{x\nu_s}} \end{pmatrix},$$

а система (1.17) принимает вид

$$\begin{aligned} &-xw_2\lambda_s\mu_s^2 - \varkappa\nu_s(-2x\mu_s w_1' + w_1(\mu_s + 2x\mu_s')) = 0,\\ &2x\mu_s^3\nu_s w_2' - 4x\varkappa\mu_s\nu_s w_1'\mu_s' + 2\varkappa w_1\nu_s(2x\xi^2\mu_s^2 + 2x(\mu_s')^2 +\\ &+\mu_s(-x\omega^2\rho_s + \mu_s')) - w_2\mu_s^2(-2x\nu_s\mu_s' + \mu_s(\nu_s + 4x\mu_s')) = 0. \end{aligned} \tag{1.18}$$

После подстановки $w = Gz$ в систему (1.18) и учета равенств (1.6), в которых для цилиндрического случая

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu_s(\nu_s - \mu_s)}{2\varkappa\nu_s} \\ -\varkappa\left(\frac{1}{\mu_s}\right)'' & 0 \end{pmatrix},$$

уравнения (1.18) в матричной форме имеют вид

$$z' - \Theta z = 0,$$

где $\Theta = \begin{pmatrix} \frac{\mu_s'}{\mu_s} + \frac{1}{2x_0} & -\frac{\mu_s^2}{2\varkappa\nu_s} \\ \varkappa\left(\frac{\omega^2\rho_s - 2\xi^2\mu_s}{\mu_s^2} + \left(\frac{1}{\mu_s}\right)''\right) & \frac{1}{2x_0} \end{pmatrix}$.

Снова непосредственной проверкой убеждаемся, что выполняется тождество (1.10), где матрица K в данном случае имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} \frac{\mu_s'}{\mu_s} - \frac{1}{2x} & -\frac{\mu_s(\mu_s+\nu_s)}{2\varkappa\nu_s} \\ \frac{\varkappa(x\rho_s\omega^2 - 2\mu_s' + x\mu_s^2(\frac{1}{\mu_s})'')}{x\mu_s^2} & \frac{1}{2x} - \frac{\mu_s'}{\mu_s} \end{pmatrix}.$$

Действительно,

$$\Theta - K(x_0) = \begin{pmatrix} x_0^{-1} & \frac{\mu}{2\varkappa} \\ \varkappa(-2\xi^2\mu^{-1} + 2x_0^{-1}\frac{\mu'}{\mu^2}) & \frac{\mu'}{\mu} \end{pmatrix}.$$

Случай плоского диска. В случае плоского диска уравнение (1.1) имеет вид

$$\begin{aligned} &u_1\lambda_s - u_2\lambda_s\xi_s + r\nu_s u_1' = 0, \\ &-u_2 + u_1\xi_s + r u_2' = 0. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Независимая координата в уравнении (1.19) – радиус r в цилиндрической системе кординат. Как и в сферически симметричном случае, переходим к новой независимой переменной – глубине x, которая связана с радиусом по формуле $r = \exp(-x\varepsilon)/\varepsilon$, где ε^{-1} – радиус диска. Также вводится новое волновое число $\xi = \varepsilon\,\xi_s$. Тогда система (1.19) будет иметь вид

$$\begin{aligned} &\varepsilon u_1\lambda_s - \xi u_2\lambda_s - \nu_s u_1' = 0, \\ &\xi u_1 - \varepsilon u_2 - u_2' = 0. \end{aligned} \tag{1.20}$$

После первой замены переменных $u = Qv$, где в случае плоского диска матрица

$$Q = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1}\xi & 0 \\ -\varepsilon^{-1}\partial & 1 \end{pmatrix},$$

система (1.20) становится таковой

$$\begin{aligned} &\varepsilon v_1\lambda_s - \varepsilon v_2\lambda_s - 2\mu_s v_1' = 0, \\ &\frac{\xi^2 v_1}{\varepsilon} - \varepsilon v_2 + v_1' - v_2' + \frac{v_1''}{\varepsilon} = 0. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Для исключения второй производной v_1'' выражаем ее из первого уравнения рэлеевской системы, в котором сделана замена переменных $r = \varepsilon^{-1}e^{-x\varepsilon}, u = Qv$ (ср. также с первым уравнением в формуле (19) в работе [1]), и подставляем ее во второе уравнение (1.21), что дает

$$\begin{aligned}&\varepsilon v_1\lambda_s-\varepsilon v_2\lambda_s-2\mu_s v_1'=0,\\&2\varepsilon\mu_s v_1'+\varepsilon\nu_s v_1'-\varepsilon\nu_s v_2'-2v_1'\mu_s'-\varepsilon v_2(2\varepsilon\mu_s+\varepsilon\nu_s-\\&-2\mu_s'+\nu_s')+v_1(2\xi^2\mu_s+\varepsilon^2\nu_s-e^{-2x\varepsilon}\omega^2\rho_s-2\varepsilon\mu_s'+\varepsilon\nu_s')=0.\end{aligned}\tag{1.22}$$

После подстановки $v=M_4w$, где в случае плоского диска

$$M_4=\begin{pmatrix}\frac{e^{x\varepsilon}\varkappa}{\mu_s}&0\\\frac{e^{x\varepsilon}\varkappa}{\mu_s}&-\frac{e^{-x\varepsilon}\mu_s}{\varepsilon\nu_s}\end{pmatrix},$$

система (1.22) становится следующей:

$$\begin{aligned}&2e^{2x\varepsilon}\varkappa\nu_s(\mu_s w_1'+w_1(\varepsilon\mu_s-\mu_s'))-w_2\lambda_s\mu_s^2=0,\\&\nu_s w_2'\mu_s^3+w_2(2\varepsilon\mu_s^2+\lambda_s\mu_s')\mu_s^2+2e^{2x\varepsilon}\varkappa\nu_s w_1'(\varepsilon\mu_s-\mu_s')\mu_s+\\&+\varkappa w_1\nu_s(2e^{2x\varepsilon}\xi^2\mu_s^2-(\rho_s\omega^2+4e^{2x\varepsilon}\varepsilon\mu_s')\mu_s+2e^{2x\varepsilon}(\mu_s')^2)=0.\end{aligned}\tag{1.23}$$

А после подстановки $w=Gz$ и учета (1.6), где

$$L=\begin{pmatrix}0&\frac{e^{-2x\varepsilon}\mu_s(\lambda_s+\mu_s)}{2\varkappa\nu_s}\\e^{2x\varepsilon}\varkappa\left(\frac{2\varepsilon(\mu_s)'}{\mu_s{}^2}-\left(\frac{1}{\mu_s}\right)''\right)&0\end{pmatrix},$$

уравнения (1.23) приводятся к матричному виду

$$z'-\Theta z=0,$$

где $\Theta=\begin{pmatrix}\frac{\mu_s'}{\mu_s}-\varepsilon&-\frac{\mu_s^2}{2\varkappa\nu_s}\\\frac{\varkappa(\rho_s\omega^2+2(\varepsilon^2-\xi^2)\mu_s-2\varepsilon\mu_s'+\mu_s^2(\frac{1}{\mu_s})'')}{\mu_s^2}&-\varepsilon\end{pmatrix}.$

Как и во всех предыдущих случаях, выполняется равенство (1.10), где матрица K имеет вид

$$K=\begin{pmatrix}\frac{\mu_s'}{\mu_s}&-\frac{e^{-2x\varepsilon}\mu_s(\lambda_s+3\mu_s)}{2\varkappa\nu_s}\\\frac{\varkappa\rho_s\omega^2}{\mu_s^2}+e^{2x\varepsilon}\varkappa\left(\frac{1}{\mu_s}\right)''&-\frac{\mu_s'}{\mu_s}\end{pmatrix}.$$

Действительно,

$$\Theta-K(0)=\begin{pmatrix}-\epsilon&\frac{\mu}{2\varkappa}\\\varkappa(-2\epsilon\frac{\mu'}{\mu^2}+2(\epsilon^2-\xi^2)\mu^{-1})&-\epsilon+\frac{\mu'}{\mu}\end{pmatrix}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Неточности, замеченные в работах [1] и [2]

В работе [1] обнаружены следующие неточности:

1. Оператор Q_1 в сферически-слоистой среде (стр. 55).

Напечатано: $Q_1 = r\hat{Q}_1 r^{-1}$. Должно быть: $Q_1 = r^{-1}\hat{Q}_1 r$.

2. В формуле для P_2 и для K в цилиндрически осесимметрическом случае (стр. 58) надо поменять знаки.

Напечатано:

$$
\begin{aligned}
P_2 &= \mathrm{Int}_{M_6}(P_4) = \\
&= \left(\partial + \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mu' - \frac{1}{2}r^{-1} & -\varkappa^{-1}\mu \\ \varkappa(2(\mu^{-1})'' - 2r^{-1}(\mu^{-1})' + \omega^2\rho\mu^{-2}) & -\mu^{-1}\mu' + \frac{1}{2}r^{-1} \end{pmatrix}\right) \times \\
&\times \left(\partial + \begin{pmatrix} -\mu^{-1}\mu' + \frac{1}{2}r^{-1} & \varkappa^{-1}\mu^2\nu^{-1} \\ \varkappa(2r^{-1}(\mu^{-1})' - \omega^2\rho\mu^{-2}) & \mu^{-1}\mu' - \frac{1}{2}r^{-1} \end{pmatrix}\right) - \xi^2 = \\
&= (\partial - L + K)(\partial - L - K) - \xi^2,
\end{aligned}
$$

$$
K = \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mu' - \frac{1}{2}r^{-1} & -\frac{1}{2}\varkappa^{-1}\mu\nu^{-1}(\lambda + 3\mu) \\ \varkappa((\mu^{-1})'' - 2r^{-1}(\mu^{-1})' + \omega^2\rho\mu^{-2}) & -\mu^{-1}\mu' + \frac{1}{2}r^{-1} \end{pmatrix}.
$$

Должно быть

$$
\begin{aligned}
P_2 &= \mathrm{Int}_{M_6}(P_4) = \\
&= \left(\partial + \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mu' - \frac{1}{2}r^{-1} & -\varkappa^{-1}\mu \\ \varkappa(2(\mu^{-1})'' + 2r^{-1}(\mu^{-1})' + \omega^2\rho\mu^{-2}) & -\mu^{-1}\mu' + \frac{1}{2}r^{-1} \end{pmatrix}\right) \times \\
&\times \left(\partial + \begin{pmatrix} -\mu^{-1}\mu' + \frac{1}{2}r^{-1} & \varkappa^{-1}\mu^2\nu^{-1} \\ \varkappa(-2r^{-1}(\mu^{-1})' - \omega^2\rho\mu^{-2}) & \mu^{-1}\mu' - \frac{1}{2}r^{-1} \end{pmatrix}\right) - \xi^2 = \\
&= (\partial - L + K)(\partial - L - K) - \xi^2,
\end{aligned}
$$

$$
K = \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mu' - \frac{1}{2}r^{-1} & -\frac{1}{2}\varkappa^{-1}\mu\nu^{-1}(\lambda + 3\mu) \\ \varkappa((\mu^{-1})'' + 2r^{-1}(\mu^{-1})' + \omega^2\rho\mu^{-2}) & -\mu^{-1}\mu' + \frac{1}{2}r^{-1} \end{pmatrix}.
$$

3. Напечатано (стр. 60):

$$
L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\varkappa^{-1}r^2\mu\nu^{-1}(\lambda + \mu) \\ -\varkappa r^{-2}((\mu^{-1})'' + 2(\mu^{-1})') & 0 \end{pmatrix}.
$$

Должно быть:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\varkappa^{-1}r^2\mu\nu^{-1}(\lambda+\mu) \\ -\varkappa r^{-2}((\mu^{-1})'' - 2(\mu^{-1})') & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Напечатано (стр. 65):

$$\begin{pmatrix} K_{11}-V_{11} & -V_{21} & K_{12} & 0 \\ -V_{12} & K_{11}+V_{11} & 0 & K_{12} \\ K_{21} & 0 & -K_{11}-V_{11} & -V_{12} \\ 0 & K_{21} & -V_{12} & -K_{11}+V_{11} \end{pmatrix}.$$

Должно быть:

$$\begin{pmatrix} K_{11}-V_{11} & -V_{21} & K_{12} & 0 \\ -V_{12} & K_{11}+V_{11} & 0 & K_{12} \\ K_{21} & 0 & -K_{11}-V_{11} & -V_{21} \\ 0 & K_{21} & -V_{12} & -K_{11}+V_{11} \end{pmatrix}$$

В работе [2] в Предложении 1 (стр. 34) напечатано:
Предложение 1. 1) Справедливо тождество

$$P_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Int}_{M_1}(M_2^{-1}\mathrm{Int}_Q(P)) = (\partial - \tilde{L} + \tilde{K})(\partial - \tilde{L} - \tilde{K}) - \xi^2. \tag{11}$$

Здесь в плоском случае

$$M_{1f} = 1, \quad M_{2f} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ -2\mu' & \nu \end{pmatrix}, \quad Q_f = \begin{pmatrix} -\xi & 0 \\ \partial & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{K}_f = \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mu' & -\frac{1}{2}(\mu^{-1}\nu + 1) \\ \mu^2\nu^{-1}(\mu^{-1})'' + \omega^2\rho\nu^{-1} & -\mu^{-1}\mu' \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$\tilde{L}_f = \begin{pmatrix} -\mu^{-1}\mu' & \frac{1}{2}(\mu^{-1}\nu - 1) \\ -\mu^2\nu^{-1}(\mu^{-1})'' & \mu^{-1}\mu' - \nu^{-1}\nu' \end{pmatrix}. \tag{13}$$

В сферическом случае

$$M_{1s} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -r_0 \end{pmatrix}, \quad M_{2s} = r_0^2 \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 2r_0\mu' - \mu - 2\nu & \nu \end{pmatrix}, \quad Q_s = \begin{pmatrix} r_0\xi & 0 \\ -r_0\partial & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{K}_s = \tilde{K}_f(\mu_s, \nu_s, r^2 r_0^{-2}\rho_s) + r_0^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 2\nu_s^{-1}\mu_s' & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$\tilde{L}_s = \tilde{L}_f(\mu_s, \nu_s, r^2 r_0^{-2}\rho_s) + r_0^{-1} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 2\nu_s^{-1}\mu_s' & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где $\tilde{K}_f$ и $\tilde{L}_f$ – матричные функции (12) и (13) аргументов μ, ν и ρ.

Должно быть

Предложение 1. 1) Справедливо тождество

$$P_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Int}_{M_1}(M_2^{-1}\widetilde{P}) = (\partial - \widetilde{L} + \widetilde{K})(\partial - \widetilde{L} - \widetilde{K}) - \xi^2.$$

Здесь в плоском случае $\widetilde{P} = \mathrm{Int}_{Q_f}(P)$,

$$M_{1f} = 1, \quad M_{2f} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ -2\mu' & \nu \end{pmatrix}, \quad Q_f = \begin{pmatrix} -\xi & 0 \\ \partial & 1 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{K}_f = \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mu' & -\frac{1}{2}(\mu^{-1}\nu + 1) \\ \mu^2\nu^{-1}(\mu^{-1})'' + \omega^2\rho\nu^{-1} & -\mu^{-1}\mu' \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{L}_f = \begin{pmatrix} -\mu^{-1}\mu' & \frac{1}{2}(\mu^{-1}\nu - 1) \\ -\mu^2\nu^{-1}(\mu^{-1})'' & \mu^{-1}\mu' - \nu^{-1}\nu' \end{pmatrix}.$$

В сферическом случае $\widetilde{P} = r^{-1}Q_s^{-1}rPQ_s$,

$$M_{1s} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -r_0 \end{pmatrix}, \quad M_{2s} = r_0^2 \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 2r_0\mu' - \mu - 2\nu & \nu \end{pmatrix}, Q_s = \begin{pmatrix} r_0\xi & 0 \\ -r_0\partial & 1 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{K}_s = \widetilde{K}_f(\mu_s, \nu_s, r^2r_0^{-2}\rho_s) + r_0^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 2\nu_s^{-1}\mu_s' & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{L}_s = \widetilde{L}_f(\mu_s, \nu_s, r^2r_0^{-2}\rho_s) + r_0^{-1}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 2\nu_s^{-1}\mu_s' & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

где $\widetilde{K}_f$ *и* $\widetilde{L}_f$ *– матричные функции аргументов* $\mu(x)$, $\nu(x)$ *и* $\rho(x)$.

Настоящая работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-05-65629) и РФФИ-ИНТАС (грант 95-0865).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киселев С.Г., Кузнецов А.Н., Маркушевич В.М., Цемахман А.С.* Разложение на множители и форма Штурма–Лиувилля уравнений для P-SV-колебаний слоистых сред // Теоретические проблемы в геофизике. М.: Наука, 1997. С.44-69. (Вычисл. сейсмология; Вып.29).
2. *Киселев С.Г., Кузнецов А.Н., Маркушевич В.М.* Задача уплощения Земли: происхождение, методы точного решения и разложение в ряд // Теоретические проблемы в геофизике. М.: Наука, 1997. С.28-43. (Вычисл. сейсмология. Вып.29).
3. *Киселев С.Г., Маркушевич В.М.* О разделении переменных в уравнениях для рэлеевских колебаний слоистых сред // ДАН. 1993. Т.332, N 3. С.297-300.
4. *Снеддон И.Н., Берри Д.С.* Классическая теория упругости. М.: Физматгиз. 1961. 220 с.
5. *Beals R., Henkin G.M., Novikova N.N.* The inverse boundary problem for the Rayleigh system // J. Math.Phys. 1995. Vol.36, N 12. P.6688-6708.