

# И. ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ СЕЙСМОЛОГИИ

УДК 550.344

## РАЗВИТИЕ СПОСОБОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОВЕРХНОСТНО-ВОЛНОВОЙ ТОМОГРАФИИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА БЭЙКУСА–ГИЛЬБЕРТА

Т.Б.Яновская

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

Дан обзор способов решения задач поверхностно-волновой томографии, основанных на методе Бэйкуса–Гильберта. Основное внимание уделяется построению латеральных вариаций фазовых или групповых скоростей поверхностных волн по данным о средних скоростях на различных трассах, пересекающих регион исследования. Методика описана для плоского и сферического случаев. Аналогично методу Бэйкуса–Гильберта, где разрешение предлагается оценивать длиной интервала сглаживания, в данном (двумерном) случае разрешение оценивается линейными размерами области сглаживания. В простейшем случае область сглаживания аппроксимируется кругом, тогда в качестве оценки разрешения принимается радиус круга. Если трассы имеют преимущественное направление, то область аппроксимируется эллипсом. Приводится способ оценки длины и ориентации осей эллипса. Описана методика определения латеральных вариаций фазовой скорости поверхностных волн по данным азимутальных аномалий. Применение описанных методов продемонстрировано на двух примерах – для регионов Черноморской впадины и Евразии.

## DEVELOPMENT OF METHODS FOR SURFACE-WAVE TOMOGRAPHY BASED ON BACKUS–GILBERT APPROACH

T.B. Yanovskaya

St.-Petersburg State University, St-Petersburg, Russia

The methods for solving surface-wave tomography problems based on Backus-Gilbert approach are reviewed. Emphasized are the methods for estimating lateral group or phase velocity variations from average velocities along the paths crossing the region under investigation. The methods are described for both plane and spherical cases. Analogously to the Backus-Gilbert approach, in which resolution is estimated by the averaging length, in the 2D tomography problem it is to be estimated by linear size of the averaging area. In the simplest case, when the averaging area is assumed to be a circle, the resolution is estimated by radius of the circle. If orientation of the paths has a predominant direction, the averaging area is approximated by an ellipsis. A method for estimation of the lengths and azimuths of the axes is described. A technique for estimating lateral phase velocity variations from azimuthal anomalies is proposed. Application of the methods is demonstrated by two examples – for the Black Sea depression and for the region of Eurasia.

### Введение

В 60–70-х годах В.И.Кейлис-Борок проявлял живой интерес к решению обратных задач сейсмологии [1,2]. Бурное развитие этой области геофизики в те годы было обусловлено, с одной стороны, накоплением наблюдений, а с другой – появлением электронных вычислительных машин, позволяющих обрабатывать большие массивы данных. При этом впервые остро встал

вопрос о неединственности решения обратных задач, что было связано с ограниченностью используемых данных, наличием ошибок наблюдений, а также с природой используемых данных.

Как только появились первые работы Бэйкуса и Гильберта в конце 60-х годов [3-5], В.И.Кейлис-Борок первый в нашей стране обратил на них внимание, поняв сразу, что предложенный ими метод открывает широкие перспективы в различных областях геофизики, и, в первую очередь, – в сейсмологии. В значительной степени благодаря инициативе В.И.Кейлис-Борока и по его настоянию я и мои сотрудники стали разрабатывать методы решения обратных задач, нацеленных на исследование горизонтальных неоднородностей Земли, основанные на идеях Бэйкуса–Гильберта. Действительно, эти идеи оказались весьма плодотворными для решения сейсмотомографических задач, в частности – задач томографии, основанных на использовании данных о дисперсии поверхностных волн. За три последних десятилетия методы поверхностно-волновой томографии, развитые на основе подхода Бэйкуса–Гильберта, широко используются как в региональных, так и в глобальных исследованиях латеральных неоднородностей структуры коры и верхней мантии.

## **1. Метод Бэйкуса–Гильберта в применении к решению задач сейсмотомографии**

Почему именно метод Бэйкуса–Гильберта оказался наиболее естественным и эффективным для решения задач сейсмотомографии? Объясняется это тем, что, в отличие от медицинской томографии, где объект может просвечиваться по любым направлениям, в сейсмической томографии всегда приходится иметь дело с ограниченным набором данных, который определяется фиксированным расположением станций и локализацией очагов землетрясений. Это приводит к тому, что одни области пересекаются волновыми трассами, ориентированными преимущественно в каком-то одном направлении, а другие – не пересекаются вообще. При решении такого рода задач необходимо использовать априорные представления о характере распределения скорости, причем эти представления должны носить самый общий характер. Очевидно и то, что разрешающая способность таких данных будет различной в разных областях в зависимости от расположения трасс. А это именно те условия, которым отвечает метод Бэйкуса–Гильберта: количество данных ограничено, их разрешающая способность определяется сглаживающим ядром (или его эффективной “шириной”), различным в разных интервалах, и может быть оценена в рамках данного метода.

Метод был разработан Бэйкусом и Гильбертом в применении к одномерным обратным задачам. Задачи же сейсмотомографии двумерные (в случае поверхностных волн) или трехмерные (в случае объемных волн). В предлагаемом обзоре будут освещены основные положения двумерной сейсмотомографии, основанной на временных невязках, которая непосредственно используется для оценки латеральных вариаций фазовых или групповых скоростей поверхностных волн; будет показано, как оценивать разрешение в случае преимущественной ориентации трасс, и описана методика оценки латеральных вариаций фазовой скорости поверхностных волн по данным азимутальных аномалий.

## **2. Постановка задач поверхностно-волновой лучевой томографии**

Считается оправданным рассматривать задачи поверхностно-волновой томографии в рамках лучевой теории, т.е. считать, что поверхностные волны распространяются вдоль трасс, которые являются линиями. Но такое предположение строго выполняется только в случае бесконечно высоких частот. В действительности, поверхностные волны характеризуются достаточно большими периодами и при своем распространении захватывают некоторую область, ширина которой определяется длиной волны. Поэтому характеристики таких волн, и в первую очередь их времена пробега (или средние скорости), определяются функционалами не вдоль линий бесконечно малой толщины, а вдоль некоторой двумерной области, вытянутой вдоль луча

и имеющей ширину порядка зоны Френеля. Если, например, период волны равен 50 с, соответствующая этому периоду средняя скорость 4 км/с, длина трассы 4000 км, то в середине трассы ширина такой области оказывается равной примерно 450 км. Тем не менее, принято считать, что время пробега между источником и станцией определяется интегралом по лучу. В линеаризованной постановке временная невязка относительно некоторого начального приближения определяется, соответственно, функционалом

$$\delta t_i = - \int_{L_{oi}} \frac{\delta V(\mathbf{r})}{V_0^2(\mathbf{r})} ds, \quad (1)$$

где  $V_0(\mathbf{r})$  – скорость в модели начального приближения;  $\delta V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}) - V_0(\mathbf{r})$ ;  $L_{oi}$  – трасса, отвечающая начальному приближению. В случае поверхностных волн задача упрощается благодаря тому, что в начальном приближении скорость можно считать постоянной, равной средней скорости для исследуемой области, отвечающей заданному периоду. В этом случае  $L_{oi}$  – прямая линия в плоском случае, или дуга большого круга, соединяющая эпицентр и станцию – в сферическом случае. Если обозначить  $m(\mathbf{r}) = -\delta V(\mathbf{r})/V_0$ , то заменяя (1) интегралом по двумерной области исследования  $\Omega$ , будем иметь

$$\delta t_i = \iint_{\Omega} G_i(\mathbf{r}) m(\mathbf{r}) d(\mathbf{r}), \quad (2)$$

где  $G_i(\mathbf{r})$  – функция, сингулярная на  $i$ -м луче, равная нулю вне его и удовлетворяющая условию

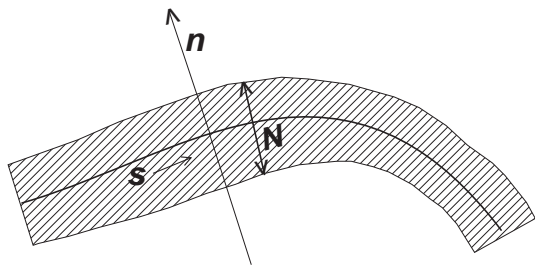
$$\iint_{\Omega} G_i(\mathbf{r}) d(\mathbf{r}) = t_{oi}$$

( $t_{oi}$  – время пробега по  $i$ -му лучу в модели начального приближения). Однако, если учесть замечание, что в действительности время пробега определяется интегрированием не по бесконечно тонкой линии, а по некоторой области, окружающей эту линию, то очевидно, что искомая относительная невязка  $\delta t_i$  может быть также выражена в виде функционала (2), но в этом случае ядро (обозначим его  $\tilde{G}_i(\mathbf{r})$ ) уже будет конечным, отличным от нуля в некоторой окрестности луча. Вводя в  $\Omega$  координаты вдоль луча  $s$  и в перпендикулярном к нему направлении  $n$  и определив область  $N(s)$  вдоль координаты  $n$ , внутри которой  $\tilde{G}_i(\mathbf{r})$  отлична от нуля (рис. 1), можно записать интеграл (2) в виде

$$\delta t_i = \int_{L_{oi}} ds \int_{N(s)} \tilde{G}_i(n, s) m(n, s) dn = \int_{L_{oi}} \bar{m}_i(s) \frac{ds}{V_0} = \iint_{\Omega} \bar{m}_i(\mathbf{r}) G_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (3)$$

где  $\bar{m}_i(\mathbf{r}) = V_0 \int_{N(s)} \tilde{G}_i(n, s) m(n, s) dn$  – уже не локальное значение  $m$  в точке  $r$ , а некоторое осредненное по направлению, ортогональному лучу в этой точке. Если скорость изменяется плавно и вариации скорости не слишком велики, то ошибка, которую мы получаем, заменяя функционал (3) функционалом (1), будет не слишком велика, и эту ошибку можно считать случайной. Тогда даже при отсутствии ошибок измерений связь между наблюдениями (временными невязками  $\delta t_i$ ) и искомой моделью будет определяться соотношением

$$\delta t_i = \iint_{\Omega} G_i(\mathbf{r}) m(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \varepsilon_i.$$



**Рис. 1.** Схема координат  $s$  (вдоль луча) и  $n$  (ортогонально лучу)

Заштрихована область, где ядро  $\tilde{G}_i(n, s)$  отлично от нуля;  $N(s)$  обозначает ширину этой области в точке  $s$

В первом приближении ошибки  $\varepsilon_i$  можно считать независимыми и равноточными. Тогда задача поиска неизвестной функции  $m(\mathbf{r})$  сведется к минимизации функционала

$$\sum_i \left( \delta t_i - \iint_{\Omega} G_i(\mathbf{r}) m(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right)^2. \quad (4)$$

Решение такой задачи не является единственным, поэтому на искомую функцию должны быть наложены дополнительные ограничения. Методы построения решения различаются в зависимости от принимаемых ограничений. Наиболее распространенным ограничением является априорная параметризация модели. Существуют разные способы параметризации. Один из них – это представление искомой функции в виде линейной комбинации некоторых гладких функций, коэффициенты в которой и будут искомыми параметрами. Примером может служить разложение функции  $m(\vartheta, \varphi)$  в ряд по сферическим гармоникам [6,7]. Другой способ – это разбиение исследуемой области на ячейки (блоки) той или иной формы в предположении, что искомая функция является постоянной внутри каждого блока – параметрами в этом случае будут значения функции в блоках [8–10]. Однако методы, основанные на априорной параметризации, трудно согласовать с разрешающей способностью исходных данных: в зонах, где трасс мало, могут возникнуть ложные аномалии, в то же время, в областях, густо покрытых трассами, аномалии, которые могли бы быть выявлены по таким данным, оказываются сглаженными.

В рамках метода Бэйкуса–Гильберта ограничение накладывается на характер поведения искомой функции. В стандартном варианте таким ограничением является требование минимума нормы решения. Но в случае, когда ядра данных  $G_i(\mathbf{r})$  не интегрируемы в квадрате, – это имеет место, когда ядра сингулярны – в качестве такого ограничения предлагается минимизировать интеграл от квадрата производной (первой или даже второй, в зависимости от априорных представлений о степени гладкости решения). Перенос этого условия на двумерный случай означает минимизацию интеграла от квадрата градиента  $m(\mathbf{r})$ , т.е. соответствующую гладкость скорости. С учетом (4) задача о нахождении  $m(\mathbf{r})$  сводится к минимизации функционала

$$\sum_i \left( \delta t_i - \iint_{\Omega} G_i(\mathbf{r}) m(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right)^2 + \alpha \iint_{\Omega} |\Delta m(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}, \quad (5)$$

где  $\alpha$  – параметр регуляризации.

Использование такого условия аналогично кусочно-линейной аппроксимации функции, заданной ее значениями в дискретных точках: отсутствие информации о поведении функции между далеко отстоящими точками не позволяет предполагать наличие каких-то особенностей ее поведения в этом интервале, и линейная интерполяция является наиболее естественным способом представления функции. Вместе с тем, в интервале густого сосредоточения точек можно выявить тонкие детали поведения функции.

Минимизация (5) еще не дает возможности построить единственное решение – поскольку второе слагаемое в (5) содержит не саму функцию, а ее градиент, необходимо задать какие-то

условия на краях области  $\Omega$ . Эти условия различаются в зависимости от того, является ли область плоской или сферической.

Здесь следует сделать замечание относительно формы области. Поскольку Земля является сферой, то и область  $\Omega$  должна в общем случае рассматриваться как сферическая поверхность, так что  $\mathbf{r} = (\theta, \varphi)$ . Но в региональных исследованиях, когда размеры области малы, задача сводится к плоской ( $\mathbf{r} = (x, y)$ ) путем следующего преобразования [11]:

$$x = R \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad y = R \varphi, \quad v(x, y) = \frac{V(\theta, \varphi)}{\sin \theta}.$$

Однако использование такого преобразования приводит к тому, что в истинной (сферической) области не выполняется предположение о постоянстве скорости в начальном приближении, и трассы, которые на плоскости являются прямыми линиями, на сфере не будут дугами большого круга. Очевидно, что эти искажения тем больше, чем больше размеры области, и когда эти размеры превзойдут 4000 км, такое преобразование может привести к искажениям решения. Поэтому при больших размерах области решение следует строить непосредственно на сфере.

В плоском случае естественным краевым условием является постоянство скорости на бесконечно удаленном контуре (областью  $\Omega$  в этом случае является вся плоскость). В случае сферической поверхности таким условием является требование конечности и непрерывности скорости на всей сфере.

### 3. Методика построения решения

Метод построения решения для плоского случая дан в [12,13], для сферического – в [14,15]. Как показано в этих работах, задача минимизации (5) сводится к решению уравнения Пуассона

$$\nabla^2 m(\mathbf{r}) = \sum_i \lambda_i G_i(\mathbf{r}).$$

Решение строится в виде разложения по базисным функциям

$$m(\mathbf{r}) = \sum_i \lambda_i \psi_i(\mathbf{r}) + C,$$

где функции  $\psi_i(\mathbf{r})$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_i(\mathbf{r}) &= \int_{L_{oi}} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| ds' && \text{– в плоском случае,} \\ \psi_i(\mathbf{r}) &= \int_{L_{oi}} \ln \left| 2 \sin \frac{\Delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{2} \right| ds' && \text{– в сферическом случае} \end{aligned}$$

( $\Delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  – расстояние между точками  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  вдоль дуги большого круга).

Неизвестные коэффициенты  $\lambda_i$  и  $C$  в обоих случаях определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} (\mathbf{S} + \alpha \mathbf{I}) \Lambda + C \mathbf{t}_0 &= \delta \mathbf{t}, \\ \Lambda^T \mathbf{t}_0 &= 0, \end{aligned}$$

где  $\Lambda^T = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , а элементы матрицы  $\mathbf{S}$  выражаются интегралами от произведения базисных функций  $\psi_i(\mathbf{r})$

$$S_{ij} = \int_{L_{oj}} \psi_i(\mathbf{r}_i) \frac{ds_j}{V_0}.$$

Близкий к этому способ построения решения был предложен в работе Тарантола и Нерсисяна [16], но решение строилось, исходя не из минимизации (5), а из требования более высокой степени гладкости искомой модели, что сводилось к минимизации функционала

$$\sum_i \left( \delta t_i - \int_{\Omega} G_i(\mathbf{r}) m(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right)^2 / \sigma_i^2 + \iint_{\Omega\Omega} m(\mathbf{r}) C^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') m(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}'. \quad (6)$$

Здесь  $\sigma_i$  – среднеквадратичная ошибка исходных данных,  $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  – априорная ковариационная функция модели, принимаемая обычно в виде гауссовой

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sigma_m^2 \exp\left(-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{2L^2}\right),$$

где  $L$  – априорный радиус корреляции неоднородностей, а  $\sigma_m^2$  – априорная дисперсия модели. Если отношение  $\sigma_i^2/\sigma_m^2$  рассматривать как параметр регуляризации  $\alpha$ , видно, что по сравнению с (5) функционал (6) имеет “лишний” параметр  $L$ , который должен задаваться априорно, что не всегда удается сделать подходящим образом. В частности, в случае, когда области покрыты трассами неравномерно, этот параметр должен быть мал там, где трасс много, и, наоборот, велик там, где трасс мало.

#### 4. Оценка разрешения

Разрешающую способность данных, используемых для томографического восстановления вариаций скорости, обычно оценивают с помощью так называемого “теста шахматной доски”: по используемой выборке трасс рассчитываются времена пробега для синтетической модели, представляющей собой шахматное чередование областей с положительными и отрицательными аномалиями скорости, и по полученным данным восстанавливается модель. В полученном решении визуально выделяются зоны, где исходные аномалии оказываются разрешены, и делается заключение, что в этих зонах неоднородности, имеющие размеры порядка выбранных ячеек, могут быть разрешены и по реальным данным. Однако для того, чтобы сравнивать размеры областей, разрешаемых по данной выборке в разных частях исследуемого региона, необходимо выполнять такое тестирование для разных размеров ячеек. Удобнее оценивать разрешение в каждой точке размером области сглаживания, как это делается в методе Бэйкуса–Гильберта, в котором разрешение определяется длиной интервала сглаживания. Перенесение этого подхода на двумерный случай дает возможность оценивать разрешение радиусом эквивалентной круговой или эллиптической области сглаживания.

Любое решение, определяемое по ограниченному набору данных, является сглаженным. Сглаживающее ядро определяется в виде линейной комбинации ядер данных. Поскольку любое решение линейной обратной задачи может быть представлено в виде линейной комбинации данных

$$\hat{m}(\mathbf{r}) = \sum a_i(\mathbf{r}) \delta t_i, \quad (7)$$

то сглаживающее ядро  $A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , определяемое соотношением

$$\hat{m}(\mathbf{r}) = \int A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') m(\mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

в котором  $m(\mathbf{r})$  – любое решение, удовлетворяющее исходным данным, выразится следующим образом:

$$A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_i a_i(\mathbf{r}) G_i(\mathbf{r}').$$

Отсюда видно, что в томографических задачах сглаживающее ядро является сингулярным вдоль лучей. Для аналогичного варианта одномерных задач Бэйкус и Гильберт [4] предложили в качестве критерия близости сглаживающего ядра к дельта-функции рассматривать среднее квадратичное отклонение интеграла от сглаживающего ядра от функции Хэвисайда. Перенесение этого подхода на двумерный случай приводит к следующему критерию отклонения ядра от дельта-функции [12]:

$$s(\mathbf{r}) = \int |E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \bar{\varepsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2 d\mathbf{r}', \quad (8)$$

где интегрирование проводится по всей области исследования, а векторные функции  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  и  $\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= A(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \\ \operatorname{div} \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{— в плоском случае;} \\ \end{array}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - 1/4\pi, \\ \operatorname{div} \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - 1/4\pi \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{— в сферическом случае.} \\ \end{array}$$

Для определения среднего размера области сглаживания рассматривается нормированное сглаживающее ядро круговой формы, отличное от нуля в круге радиуса  $R$  и центрированное в точке  $\mathbf{r}$ . Радиус  $R$  подбирается так, чтобы значение  $s(\mathbf{r})$ , вычисленное для такого ядра, было равно тому, которое получено по формуле (8) при использовании заданной выборки данных. Тогда размер области сглаживания в точке  $\mathbf{r}$  оценивается величиной радиуса  $R$  эквивалентной круговой области. В [12] показано, что если решение строится так, как описано выше, то в плоском случае радиус эквивалентной области сглаживания равен

$$R = \exp(0.75 - \mathbf{a}^T \mathbf{S} \mathbf{a} + 2\mathbf{a}^T \boldsymbol{\psi}), \quad (9)$$

где матрица  $\mathbf{S}$  определена выше;  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  – вектор коэффициентов в представлении решения (7), а  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r})$  – вектор базисных функций.

Используя аналогичный подход для сферического случая, можно показать, что радиус эквивалентной области сглаживания, выражаемый величиной дуги большого круга  $\Theta$ , определяется из соотношения

$$2 \sin \frac{\Theta}{2} = \exp(f(\Theta) - \mathbf{a}^T \mathbf{S} \mathbf{a} + 2\mathbf{a}^T \boldsymbol{\psi}), \quad (10)$$

где

$$f(\Theta) = \ln \cos(\Theta/2) / \tan^4(\Theta/2) + \frac{1}{2 \sin^2(\Theta/2)}.$$

При  $\Theta \rightarrow 0$  (что эквивалентно переходу к плоскому случаю),  $f(\Theta) \rightarrow 0.75$  и незначительно уменьшается при увеличении  $\Theta$ . Это дает возможность определять  $\Theta$  из (10) итеративно.

Однако оценка разрешения радиусом эквивалентной круговой области страдает тем недостатком, что не позволяет судить о разрешении по разным направлениям. Действительно, в случае, когда лучи имеют некоторое преимущественное направление (а это почти всегда имеет место в задачах сейсмологии при фиксированных станциях и очагах из одного района), разрешение в азимуте преимущественного направления трасс должно быть хуже, чем в перпендикулярном ему направлении.

Методика оценки разрешения, зависящей от азимута, предложена в работе [17]. Она основана на подходе Бэйкуса–Гильберта для одномерных обратных задач и пока разработана только для плоского случая.

В плоскости выбирается произвольно ориентированная декартова система координат  $x, y$ , и рассматривается часть плоскости, покрытая лучами ( $0 < x' < X$ ,  $0 < y' < Y$ ). Двумерное сглаживающее ядро

$$A(x, y; x', y') = \sum_i a_i(x, y) G_i(x', y')$$

интегрируется по переменной  $y'$ , так что в результате получается функция, зависящая только от одной координаты  $x'$ :

$$F(x, y; x') = \sum_i a_i(x, y) \int_0^Y G_i(x', y') dy'.$$

Эта функция определяет сглаженность решения по направлению  $x'$ , и в качестве оценки разрешения по этому направлению можно принять расхождение между этой функцией и дельта-функцией  $\delta(x' - x)$ . Но поскольку дельта-функция является сингулярной, то, согласно [4], в качестве такого расхождения можно принять отличие интеграла от этой функции

$$\Phi(x, y; \xi) = \int_0^\xi F(x, y; x') dx'$$

от функции Хэвисайда  $\varepsilon(x' - x)$ . Если это расхождение определить как квадратичную норму отклонения

$$s(x, y) = \int_0^X (\Phi(x, y; \xi) - \varepsilon(\xi - x))^2 d\xi,$$

то нетрудно показать, что в случае ядра в виде прямоугольника с центром в точке  $x, y$ , стороны которого параллельны осям и равны, соответственно,  $a, b$ , величина  $s(x, y)$  будет равна  $a/12$ . Таким образом, величина  $12s$  может рассматриваться как оценка ширины сглаживающего ядра по направлению оси  $x$ .

Выполняя такие оценки для разных ориентаций координатной системы, можно оценить ширину области сглаживания по разным направлениям. Если эти значения, как функции азимута оси  $x$ , аппроксимировать эллипсом, то ориентация осей эллипса определит азимуты наилучшего и наихудшего разрешения и, соответственно, ширину области сглаживания по этим направлениям.

## 5. Азимутальная томография

До настоящего времени в практических задачах поверхностно-волновой томографии используются только данные о средних скоростях на трассах. При этом большая часть исследований основана на наблюдениях групповых скоростей, поскольку эти скорости легко определяются по записям одиночных станций, тогда как для определения фазовых скоростей необходимы либо записи двух станций, расположенных на одной дуге большого круга с эпицентром, либо знание начальной фазы в источнике и средней фазовой скорости для низких частот. Однако знание латеральных вариаций фазовой скорости, пожалуй, более важно, поскольку оно не только определяет вариации скоростной структуры среды, но и позволяет вычислять отклонения реальных



трасс от дуг большого круга, которые должны учитываться при решении как томографических задач, так и некоторых других сейсмологических задач, например, – при оценке тензора сейсмического момента по поверхностным волнам.

В то же время, по данным одиночных станций могут быть определены такие волновые характеристики, которые определяются латеральными вариациями именно фазовой скорости. Это – азимутальные аномалии поверхностных волн, т.е. отклонения азимута прихода волны на станцию от того, который соответствует дуге большого круга. В работе [18] найдено приближенное представление азимутальной аномалии в виде линейного функционала от градиента фазовой скорости и показано, как это соотношение может быть использовано в томографических построениях. В работах [19,20] показано, как можно использовать азимутальные аномалии при уточнении решения по данным групповых скоростей и как использовать азимутальные аномалии совместно с данными о фазовых скоростях.

Связь между азимутальной аномалией  $\delta\alpha$  и вариацией фазовой скорости  $\delta c(x)$  в случае, если в начальном приближении скорость является постоянной и, соответственно, трассы (лучи) – прямые линии, выражается следующим функционалом [20 ]:

$$\delta\alpha = \int_0^S \frac{s}{S_0 c_0} (\nabla \delta c, \mathbf{n}_0) ds, \quad (11)$$

в котором интегрирование производится вдоль исходного луча от источника к станции;  $c_0$  – скорость в начальном приближении;  $\mathbf{n}_0$  – единичный вектор нормали к исходному лучу;  $S_0$  – длина луча. Если обозначить  $m(x) = \delta c(\mathbf{x})/c_0$  и рассматривать эту величину в качестве искомой функции, то вычисляемый вдоль луча интеграл (11) после простых преобразований может быть представлен в виде следующего интеграла по площади  $\Sigma$ , включающей в себя луч:

$$\delta\alpha = \iint_{\Sigma} (\nabla m, \mathbf{F}) dx, \quad (12)$$

где  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = s\delta(n)\{H(s) - H(s - S_0)\}\mathbf{n}_0$ .

Здесь  $s, n$  – координаты, направленные, соответственно, вдоль луча и ортогонально ему, причем начало координат помещается в источник,  $\delta(x)$  – функция Дирака,  $H(x)$  – функция Хэвисайда. Применяя формулу Грина к правой части (12), получаем выражение азимутальной аномалии в виде линейного функционала непосредственно от искомой функции

$$\delta\alpha = - \iint_{\Sigma} m(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Чтобы использовать это выражение для решения томографической задачи, т.е. для восстановления вариации скорости по данным азимутальных аномалий, соответствующих разным трассам, необходимо наложить на искомую функцию некоторое условие, но такое, которое обеспечивало бы непрерывность не только самой функции, но и, по крайней мере, ее первых производных по координатам. В этом случае условие гладкости, используемое в задачах, основанных на временных невязках, уже неприменимо, поэтому удобно принять то, которое было предложено в работе [16], сводящееся к минимизации функционала (6) и обеспечивающее непрерывность всех производных. Это условие приводит к представлению решения в виде линейной комбинации базисных функций  $\psi_i(\mathbf{r})$

$$m(\mathbf{r}) = \sum_i \lambda_i \psi_i(\mathbf{r}), \quad (13)$$

при этом базисные функции определяются следующим образом:

$$\psi_i(\mathbf{x}) = \iint_{\Sigma} C(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \operatorname{div} \mathbf{F}_i(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'.$$

Коэффициенты  $\lambda_i$  в (13) определяются из системы уравнений

$$(\mathbf{S} + \mathbf{R}/\sigma_m^2)\Lambda = \mathbf{d},$$

где  $\Lambda$  – вектор коэффициентов  $\lambda_i$ ;  $\mathbf{d}$  – вектор исходных данных  $\delta\alpha_i$ ;  $\mathbf{R}$  представляет собой ковариационную матрицу ошибок наблюдений, а элементы матрицы  $\mathbf{S}$  имеют вид

$$S_{ij} = \int_0^{S_{0i}} \frac{\partial \psi_i(\mathbf{x})}{\partial n_{oi}} \frac{s}{S_{0i}} ds.$$

Здесь  $S_{0i}$  – длина  $i$ -го луча, дифференцирование в подынтегральной функции производится по направлению  $n_{oi}$ , перпендикулярному лучу в модели начального приближения.

В плоском случае в системе координат  $(s, n)$ , связанной с лучом, базисные функции выражаются в конечном виде с точностью до постоянного множителя  $\sigma_m^2$ :

$$\begin{aligned} \psi_i(s, n) = & \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}}(S_{0i} - s) \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{S_{0i} - s}{L\sqrt{2}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{s}{L\sqrt{2}} \right) \right] + \right. \\ & \left. + L \left[ \exp \left( -\frac{(S_{0i} - s)^2}{2L^2} \right) - \exp \left( -\frac{s^2}{2L^2} \right) \right] \right\} \frac{n}{L S_{0i}} \exp \left( -\frac{n^2}{2L^2} \right). \end{aligned}$$

В сферическом случае для построения решения могут быть использованы аналогичные функции, при этом  $s$  и  $n$  отсчитываются вдоль дуг большого круга.

Сложность использования азимутальных аномалий на практике для определения латеральных вариаций фазовой скорости связана с большими ошибками их определения из сейсмологических наблюдений. Это приводит к низкому разрешению. Однако для использования получаемого решения в задаче восстановления латеральных вариаций групповых скоростей такое решение оказывается достаточным для уточнения решения путем следующей итерации, на которой лучи уже не являются прямыми линиями или дугами большого круга. Кроме того, данные об азимутальных аномалиях могут использоваться совместно с данными о средних фазовых скоростях по трассам [21].

## 6. Примеры решения некоторых задач поверхностно-волновой томографии

Для иллюстрации применения описанных выше методик к интерпретации реальных данных приведем кратко некоторые примеры решения задач поверхностно-волновой томографии для отдельных регионов. Более подробный анализ полученных результатов и сопоставление их с тектоническими особенностями региона, а также обзор исследований, проведенных другими авторами по этим регионам, приведен в работах [14,15,22,23].

### 6.1. Черноморская впадина [22,23]

Размеры исследуемого региона не слишком велики, поэтому сферическая поверхность могла быть преобразована в плоскую. Решение строилось на плоскости, и затем производилось обратное преобразование плоскости в сферу.

В качестве исходных данных использовались аналоговые записи сейсмических станций, расположенных на северном побережье Черного моря. Очаги землетрясений с магнитудами не ниже 4.5 располагались в Турции, на Кавказе и Балканах. Записи цифровались, и для построения дисперсионных кривых групповых скоростей к оцифрованным записям применялась процедура спектрально-временного анализа. Достаточно надежные дисперсионные кривые по этим данным могли быть получены только для интервала периодов  $T = 10$ – $20$  с. После отбраковки пригодных для анализа осталось 111 данных для волн Рэлея и 144 – для волн Лява. Схема трасс для обоих типов волн представлена на рис. 2.

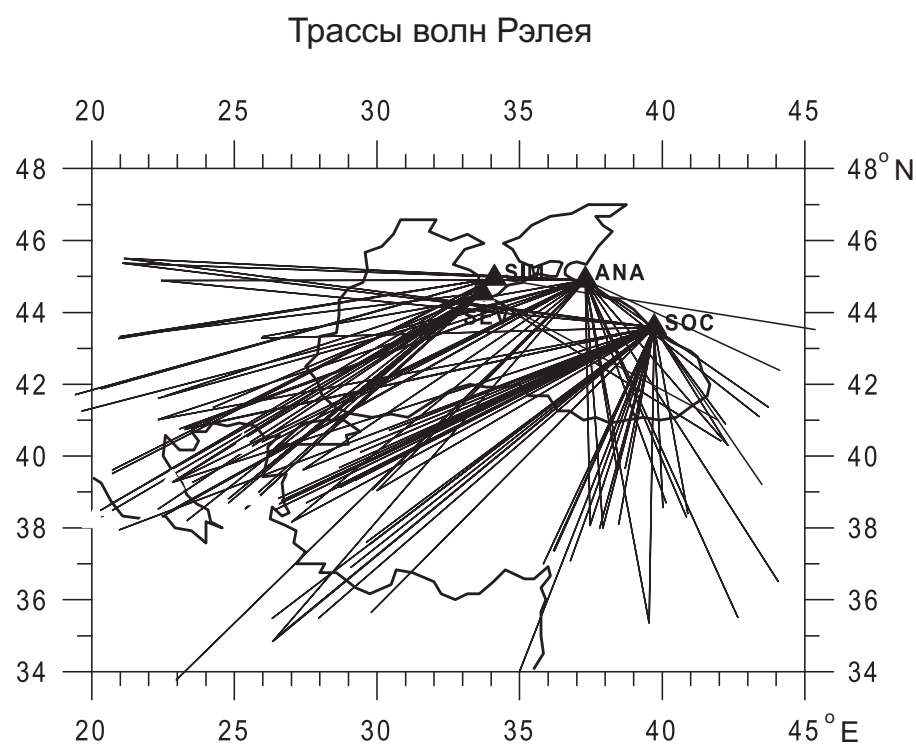
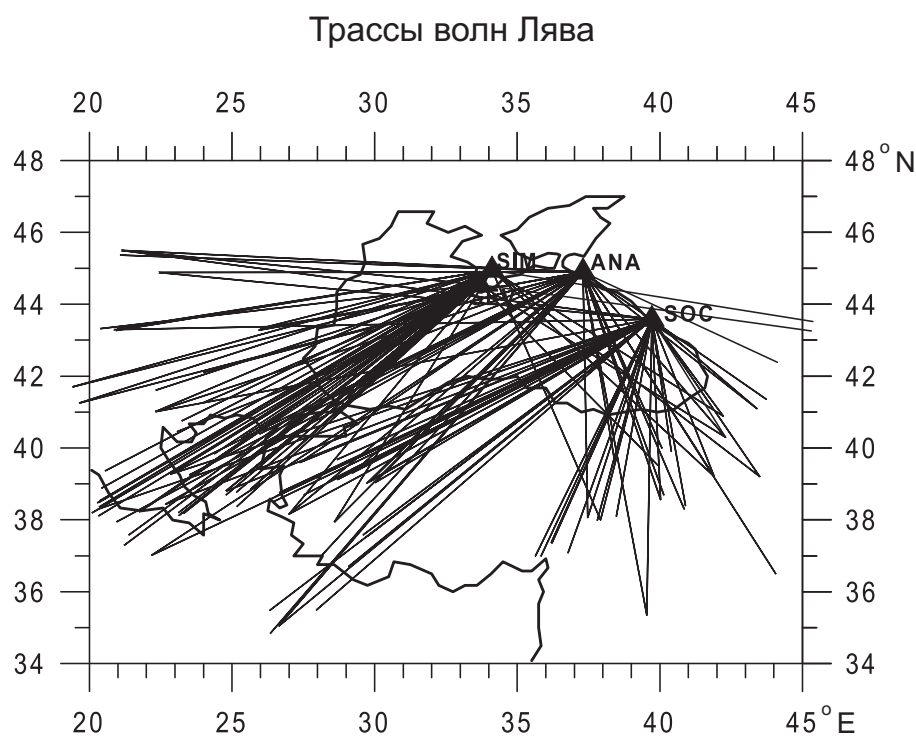


Рис. 2. Схема трасс поверхностных волн, пересекающих Черноморский бассейн

Видно, что трассы имеют преимущественное направление с северо-востока на юго-запад. Это приводит к тому, что разрешающая способность данных в этом направлении оказывается ниже, чем в перпендикулярном; очевидно, в данном случае оценивать разрешение следует в зависимости от азимута.

На рис. 3 изображены эллипсы, аппроксимирующие области сглаживания вдоль широтного профиля  $\varphi = 43^\circ$ . Как и следовало ожидать, эллипсы вытянуты вдоль преимущественного направления трасс, и только на долготах около  $38^\circ$  области сглаживания близки к круговым. Размеры областей сглаживания определяют размеры тех неоднородностей, которые оказываются различимы по используемой выборке данных.



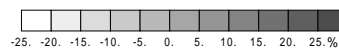
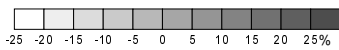
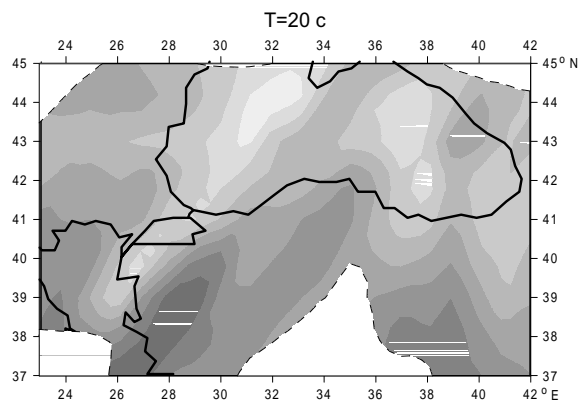
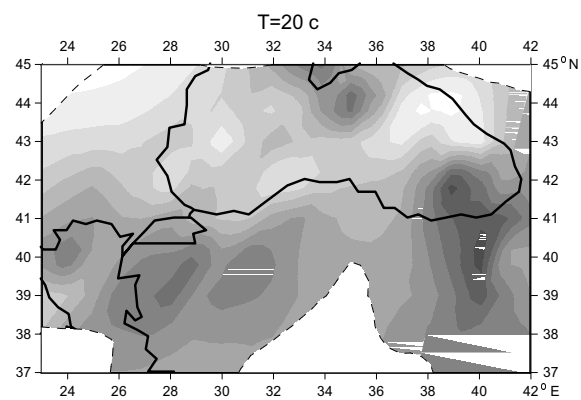
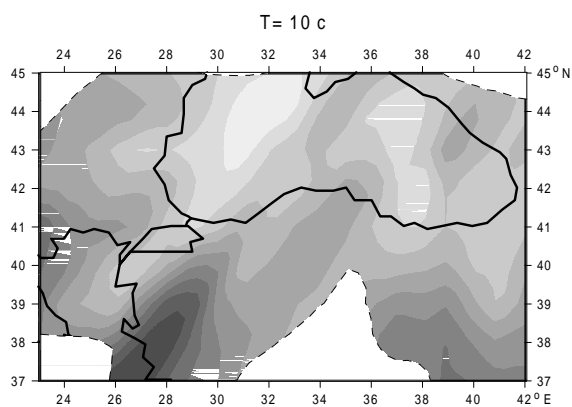
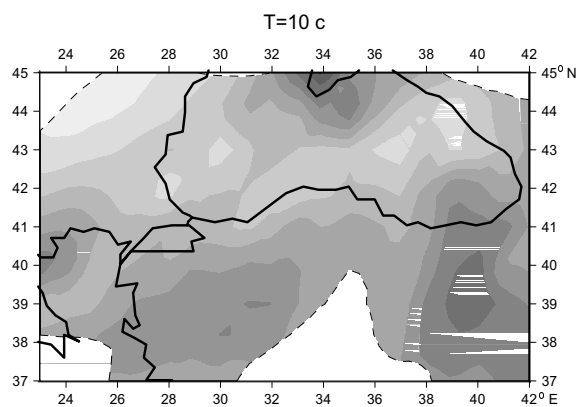
**Рис. 3.** Эквивалентные области сглаживания эллиптической формы вдоль профиля  $\varphi = 43^\circ\text{N}$

В центре южной части области трассы отсутствуют, и там разрешающая способность данных очень низка (средний размер области сглаживания превышает 600 км). В таких частях региона решение не строилось. Карты групповых скоростей волн Рэлея и Лява для периодов  $T = 10$  с и  $T = 20$  с приведены, соответственно, на рис. 4 и 5. Полученные распределения скоростей хорошо отражают известные тектонические особенности строения исследуемого района, а именно – наличие двух впадин в восточной и западной частях Черноморского бассейна, характеризующихся повышенной мощностью осадков и, соответственно, пониженными скоростями волн Рэлея и Лява.

Сделана попытка оценить и вариации фазовой скорости по азимутальным аномалиям. Хотя и не все записи оказались пригодными для определения азимутальных аномалий, тем не менее, удалось построить, в грубом приближении, распределение фазовых скоростей в регионе. На рис. 6 представлены вариации фазовой скорости, соответствующие периодам  $T = 12.5$  с и  $T = 17.5$  с. Как показано в [20], данные об азимутальных аномалиях отражают в большей степени вариации скорости вблизи станции, поэтому следует придавать значение только решению для северной части Черного моря. Видно, что в этой части распределение скорости хорошо согласуется с топографией дна (правда, две низкоскоростные впадины не могут быть разрешены по использованным данным).

## 6.2. Евразия [14,15]

Групповые скорости волн Рэлея определены по трассам, которые пересекают обширную область, включающую Азию и восточную часть Европы. Схема трасс приведена на рис. 7. Дисперсионные кривые строились по данным цифровых станций в интервале периодов  $T = 20$ –70 с. Область исследования в этом случае слишком велика для того, чтобы можно было трансформировать ее в плоскость, и поэтому решение строилось непосредственно на сферической поверхности.

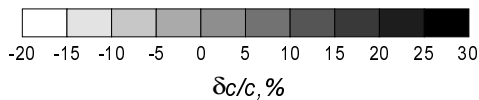
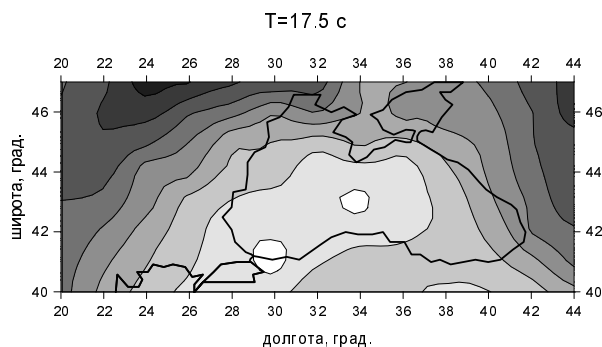
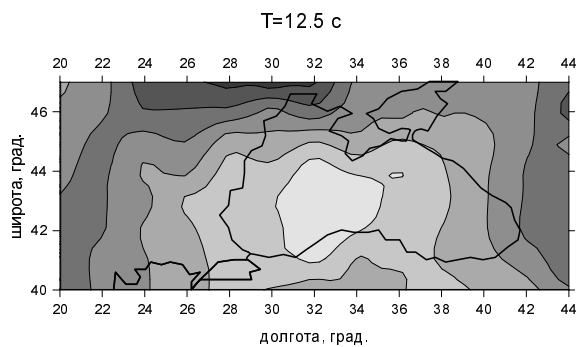


**Рис. 4.** Вариации групповых скоростей волн Рэлея (в %) для двух периодов

Пунктиром околнурена область, внутри которой радиус области сглаживания не превышает 600 км

**Рис. 5.** Вариации групповых скоростей волн Лява (в %) для двух периодов

Условные обозначения см. на рис. 4



**Рис. 6.** Вариации фазовых скоростей волн Лява для двух периодов, полученные по данным азимутальных аномалий

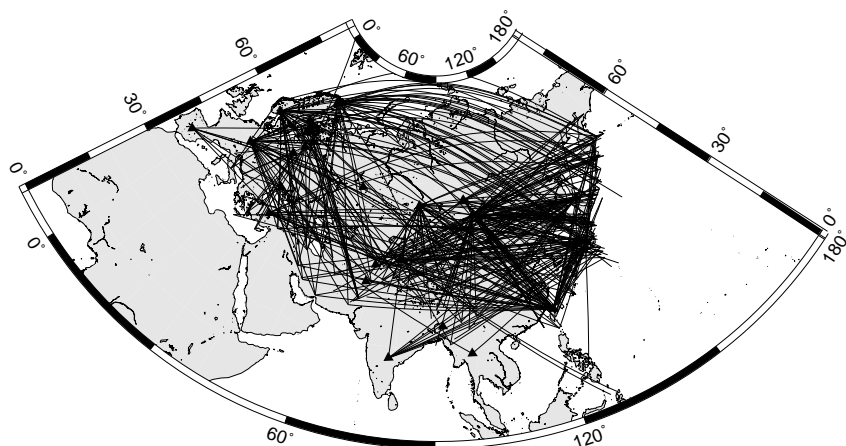


Рис. 7. Схема трасс волн Рэлея, пересекающих регион Евразии

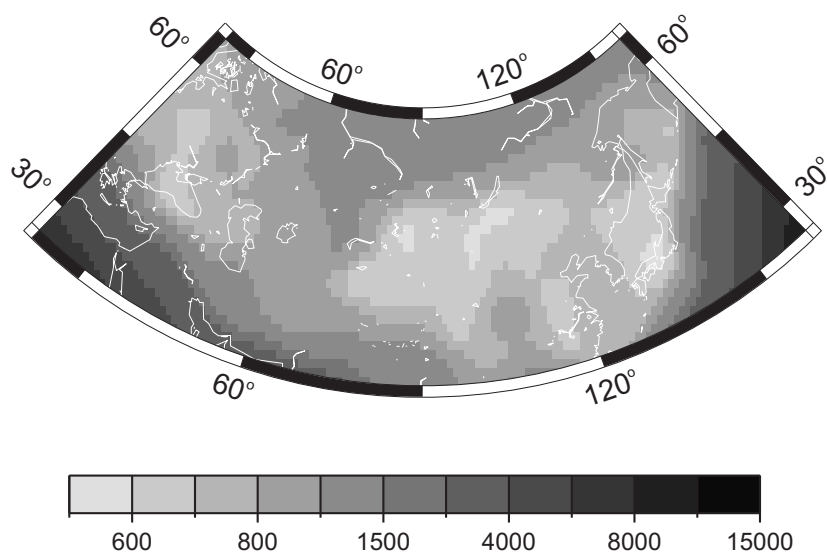
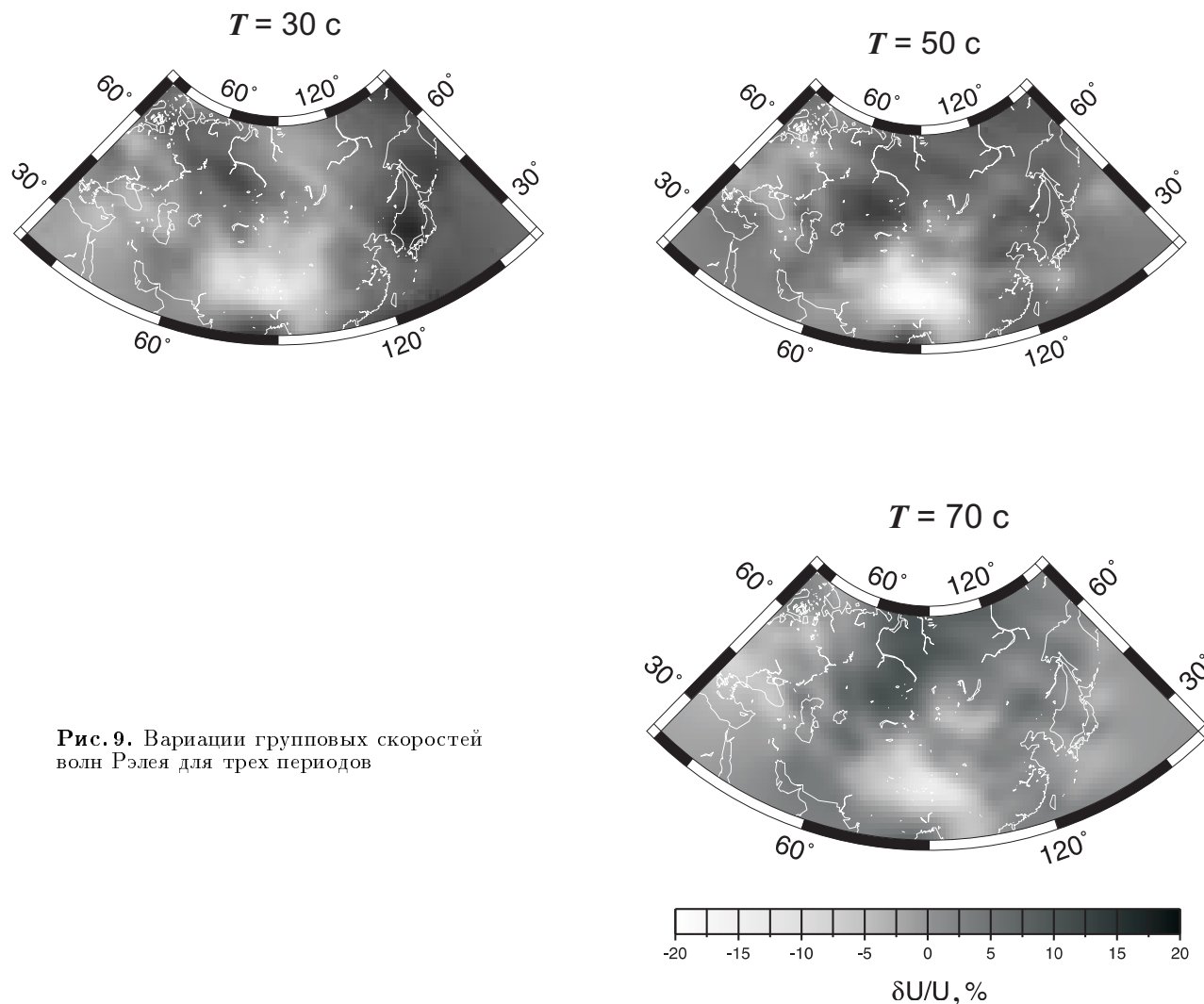


Рис. 8. Распределение среднего размера области сглаживания (сравни с рис. 7)

Разрешение оценивалось средним размером области сглаживания (формула (10)), которое изображено на рис. 8. Видно, что оно минимально в местах сгущения лучей и резко возрастает к краям области, где трасс мало, или они вообще отсутствуют.

Карты распределения вариаций групповой скорости волн Рэлея для трех периодов приведены на рис. 9. В работе [15] проведен анализ аномалий скорости и сопоставление их с тектоническим строением региона. В этой работе по локально-сглаженным дисперсионным кривым, построенным в результате томографической реконструкции для разных периодов, также получены вертикальные скоростные разрезы в разных точках исследованной территории и таким образом восстановлена трехмерная скоростная структура, которая оказалась в хорошем согласии с известными тектоническими особенностями региона.



**Рис. 9.** Вариации групповых скоростей волн Рэлея для трех периодов

## Заключение

Сформулируем проблемы, связанные с развитием и усовершенствованием методов поверхностно-волновой томографии.

Основная проблема определяется накоплением цифровых данных и, соответственно, требованием использовать все увеличивающиеся выборки данных. Это приводит к возрастанию как времени счета, так и объема памяти. Описанный здесь подход требует расчета матрицы, размер которой равен числу данных, а оно может достигать десятков и сотен тысяч. Очевидно, что было бы желательно решать задачу последовательными итерациями, добавляя на каждой итерации дополнительные данные.

Важно также разработать методику, в которой можно использовать совместно разные типы данных (фазовые и групповые скорости, азимутальные аномалии). Но в этом случае в качестве “модели” уже нужно будет рассматривать трехмерную структуру среды, а характеристики поверхностных волн (скорости, азимутальные аномалии) брать не для отдельного фиксированного периода, а совместно для набора периодов в возможно более широком диапазоне.

Методы, описанные в данной статье, разрабатывались в рамках проектов, поддержанных Российским фондом фундаментальных исследований (проекты NN 96-05-64091 и 99-05-65147).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Keilis-Borok V.I., Yanovskaya T.B.* Inverse problems of seismology (structural review) // *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 1967. Vol.13. P.223–234.
2. *Keilis-Borok V.I.* Inverse problems of seismology // *Mantle and Core in Planetary Physics.* L Corso, Acad. Press. N.-Y. 1971. P.242–274.
3. *Backus G., Gilbert F.* Numerical application of formalism for geophysical inverse problems // *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 1967. Vol.13. P.247–276.
4. *Backus G., Gilbert F.* The resolving power of gross Earth data // *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 1968. Vol.16. P.169–205.
5. *Backus G., Gilbert F.* Uniqueness in inversion of inaccurate gross Earth data // *Phil. Trans. Roy. Soc.* 1969. Vol.266A, N 1173. P.123–192.
6. *Sato Y., Santo T.A.* World-wide distribution of the group velocity of Rayleigh waves as determined by dispersion data // *Bull. Earth. Res. Inst. Tokyo Univ.* 1969. Vol.47. P.31–41.
7. *Nakanishi I., Anderson D.L.* Worldwide distribution of group velocity of mantle Rayleigh waves as determined by spherical inversion // *Bull. Seism. Soc. Amer.* 1982. Vol.72. P.2063–2080.
8. *Mantovani E., Nolet G., Panza G.F.* Lateral heterogeneity in the crust of the Italian region from regionalized Rayleigh-wave group velocities // *Ann. Geophys.* 1985. Vol.3, N 4. P.519–530.
9. *Кожеевников В.М., Бармин М.П.* Дисперсионные кривые групповых скоростей волн Рэлея для ряда регионов Азиатского континента // *Изв. АН СССР. Физика Земли.* 1989. N 9. С.16–25.
10. *Barmin, M.P., Ritzwoller M.H., Levshin A.L.* A fast and reliable method for surface wave tomography // *Pure and Appl. Geophys.* Special issue on CTBT monitoring, surface waves. 2000. In press.
11. *Яновская Т.Б.* Распределение групповых скоростей поверхностных волн в Северной Атлантике // *Изв. АН СССР. Физика Земли.* 1982. N 2. С.3–11.
12. *Дитмар П.Г., Яновская Т.Б.* Обобщение метода Бэйкуса–Гильберта для оценки горизонтальных вариаций скорости поверхностных волн // *Изв. АН СССР. Физика Земли.* 1987. N 6. С.30–40.
13. *Yanovskaya T.B., Ditmar P.G.* Smoothness criteria in surface wave tomography // *Geophys. J. Inter.* 1990. Vol.102. P.63–72.
14. *Яновская Т.Б., Антонова Л.М.* Латеральные вариации строения коры и верхней мантии в Азиатском регионе по данным групповых скоростей поверхностных волн // *Физика Земли.* 2000. N 2. С.25–33.
15. *Yanovskaya T.B., Antonova L.M., Kozhevnikov V.M.* Lateral variations of the upper mantle structure from group velocities of surface waves // *PEPI.* 2000. In print.
16. *Tarantola A., Nersessian A.* Three-dimensional inversion without blocks // *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 1984. Vol.76. P.299–306.
17. *Яновская Т.Б.* Оценка разрешения в задачах лучевой сейсмотомографии // *Физика Земли.* 1997. N 9. С.76–80.
18. *Яновская Т.Б.* Метод определения латеральных вариаций скорости поверхностных волн по данным азимутальных аномалий // *Физика Земли.* 1995. N 3. С.68–73.
19. *Яновская Т.Б.* Методика лучевой томографии, основанной на использовании данных об азимутальных аномалиях поверхностных волн // *Физика Земли.* 1995. N 11. С.74–81.
20. *Yanovskaya T.B.* Ray tomography based on azimuthal anomalies // *PAGEOPH.* 1996. Vol.148, N 1/2. P.319–336.
21. *Т.Б.Яновская.* Возможности использования азимутальных аномалий в поверхностно-волновой томографии // *Вопросы геофизики. Вып.35.* СПб: Изд-во СПбГУ, 1998. С.15–24 (Уч. зап. СПбГУ; N 433).
22. *Yanovskaya T.B., Kizima E.S., Antonova L.M.* Structure of the crust in the Black Sea and adjoining regions from surface wave data // *J. Seismology.* 1998. N 2/4. P.117–124.
23. *Кизима Е.С., Яновская Т.Б., Антонова Л.М.* Строение коры Черноморского бассейна и прилегающих областей по данным поверхностных волн // *Вопросы геофизики. Вып.35.* СПб: Изд-во СПбГУ, 1998. С.68–78 (Уч. зап. СПбГУ; N 433).