УДК 550.34

ПРОЯВЛЕНИЕ САМОПОДОБНОЙ СТРУКТУРЫ СЕЙСМИЧНОСТИ В ФОРШОКОВОМ И АФТЕРШОКОВОМ ПРОЦЕССАХ

Ю.С. Тюпкин

Геофизический центр ОИФЗ Российской академии наук, Москва, Россия

В последнее время, во многих работах землетрясение рассматривается как критическое явление в иерархической системе. Мы рассматриваем с этих позиций процессы форшоковой и афтершоковой активизации. Основываясь на результатах лабораторных экспериментов по разрушению горных пород, построена кинетическая теория асимптотики афтершокового процесса. Показано, что закон Омори (т.е. убывание числа афтершоков $N_{as}(t)$ как $\tau^{-\nu}$ при $t \to \infty$) является естественным следствием этой теории, причем показатель степени определяется фрактальными свойствами литосферы в окрестности главного удара. Результаты лабораторных экспериментов позволяют также сформулировать достаточно естественные гипотезы о процессе подготовки землетрясения. На основе этих гипотез и предположения о фрактальной структуре множества потенциальных гипоцентров землетрясений теоретически выведено обсуждающееся в литературе уравнение Варнеса, $Q(t) = Q_{\text{total}} - A(t_s - t)^m$, описывающее процесс выделения сейсмической энергии перед сильным землетрясением и его лог-периодическое обобщение (здесь $Q(t)$ – коммулятивная "беньоффовская" деформация, накопленная к моменту времени t; t_s – момент главного толчка). При этом удалось выразить показатель степени m через фрактальную размерность d множества потенциальных гипоцентров землетрясений в окрестности очага главного удара и параметр α, определяющий связь между скоростью накопления "беньоффовской" деформации и полной энергии землетрясения: $m = \alpha(2 - d) + 1$. Кроме того, приведенные соображения показывают, что уравнение Варнеса и его лог-периодическое обобщение моделируют реальный процесс в достаточно малой пространственно-временно́й окрестности главного удара.

THE MANIFESTATION OF SELF-SIMILAR STRUCTURE IN FORESHOCK AND AFTERSHOCK PROCESSES

Yu.S. Tyupkin

Geophysical Center, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Recently, many authors have considered an earthquake as a critical event in a hierarchical system. We consider the processes of foreshock and aftershock activation from this viewpoint. A kinetic theory of aftershock process asymptotics was developed on the basis of results of laboratory experiments on rock destruction. It is demonstrated that the Omori law (i.e. decrease of the number of aftershocks $N_{as}(t)$ as $\tau^{-\nu}$ with $t \to \infty$) follows from this theory and the exponent is determined by fractal properties of the lithosphere in the main shock area. The results of laboratory experiments also allow to formulate reasonable hypotheses on the earthquake preparation process. On the basis of these hypotheses and several suggestions concerning the fractal structure of the earthquake potential hypocenter manifold, the Varnes equation $Q(t) = Q_{\text{total}} - A(t_s - t)^m$ and its log-periodic generalization discussed by many authors were derived (here $Q(t)$ is the cumulative Benioff deformation accumulated by time t, t_s is the time of the main shock). These equations describe the process of seismic energy release before a strong earthquake. It was possible to express the exponent m through fractal dimensionality d of the earthquake potential hypocenter manifold in the main shock hypocenter area and the parameter α determining the relation between the rate of "Benioff" deformation accumulation and the total energy of the earthquake: $m = \alpha(2 - d) + 1$. Besides, the above arguments show that the Varnes equation and its log-periodic generalization simulate a real process in a sufficiently small spatial and temporal area of the main shock.

Введение

Гипотеза о самоподобии структуры геофизической среды и о проявлении этого самоподобия в структуре сейсмичности [1–3] инициировала новые теоретические подходы к исследованию процессов, связанных с землетрясениями, и привела к важным геофизическим следствиям [4–8]. В частности, во многих теоретических работах землетрясение рассматривается как критическое явление в иерархической системе, аналогичное фазовому переходу (см., например, [9–15]). В данной работе мы рассмотрим с этих позиций процессы форшоковой и афтершоковой активизации.

Форшоковая активизация является следствием процесса накопления упругой энергии в окрестности очага главного удара. Как известно, процесс форшоковой активизации не всегда наблюдается даже перед сильными землетрясениями. Тем не менее, в случаях, когда этот процесс достаточно четко выражен, коммулятивная "беньоффовская" деформация $Q(t)$ в окрестности момента главного удара t_s хорошо моделируется уравнением

$$Q_{\text{mod}}(t) = Q_{\text{total}} - A(t_f - t)^m \left[1 + c \times \cos\left(2\pi \frac{\log(t_f - t)}{\log(\lambda)} - \varphi\right)\right], \tag{1а}$$

где t_f – модельное значение момента главного толчка t_s; Q_{total}, A, $c \ll 1, \lambda, \varphi$ и $0 < m < 1$ – параметры модели. Они определяются из условия "наилучшего" приближения $Q_{\text{mod}}(t)$ к экспериментальным значениям $Q(t)$, отвечающим последовательности событий, которые произошли к моменту времени $t \le t_f$ в окрестности эпицентра главного удара. Впервые подобная модель

$$Q_{\text{mod}}(t) = Q_{\text{total}} - A(t_f - t)^m \tag{1б}$$

была рассмотрена Варнесом [16] с целью ретроспективного описания процесса подготовки сильного землетрясения 1989 г. в районе залива Сан-Франциско. При этом, для определения параметров модели использовались землетрясений с магнитудой $M \ge 5$, которые произошли в данном районе, начиная с 1920 г. Модель Варнеса является частным случаем уравнения (1а) при $c = 0$. В дальнейшем, основываясь на аналогии с фазовыми переходами, в эту модель было введено лог-периодическое слагаемое [10,13,14]. В работе [17] уравнения (1) выведены из теоретических соображений (см. ниже) и проведен анализ процесса ускорения выделения упругой энергии при лабораторном разрушении образцов горных пород и перед сильными землетрясениями Камчатки. В этой же работе обсуждаются прогностические возможности модели (1а).

После землетрясения среда в окрестности очага оказывается в "возбужденном" состоянии, и, если землетрясение было достаточно сильным, процесс ее релаксации к равновесию сопровождается серией землетрясений (афтершоков), которые происходят в некоторой области Ω_{as} и приводят к существенному отклонению характеристик сейсмичности в этой области от фонового уровня. Естественно, что интенсивность афтершоковой активизации убывает со временем. В сейсмологии используется эмпирический закон, согласно которому число землетрясений в единицу времени $N_{as}(t)$ при достаточно больших t (t отсчитывается от момента главного удара) хорошо аппроксимируется функцией

$$N_{as}(t) \sim t^{-\nu}, \tag{2}$$

где, как правило, $\nu > 1$, хотя и не сильно от нее отличается (закон Омори) [18, 19]. В работе [20] закон Омори был получен теоретически, исходя из соображений подобия и предположения, что сейсмический момент афтершоков в среднем убывает со временем как $t^{-\gamma}$, при этом $\nu = 1 + \gamma$. Однако вопрос о причинах такого характера убывания остался открытым.

Если соотношения (1), (2) воспринимать как главные члены асимптотик, отражающих реальное поведение физической системы при приближении момента главного удара и при релаксации к равновесию после землетрясения, то возникает вопрос: с какими физическими свойствами связано то обстоятельство, что показатели степени m и ν, фигурирующие, соответственно, в (1) и (2), являются дробными числами. Приведем некоторые теоретические соображения в пользу того, что величина параметров m и ν определяется фрактальными свойствами среды (см., также, [17] и [21]).

1. Процесс формирования очага землетрясения

В соответствии с концепцией физической мезомеханики структурно-неоднородных тел (см. [22] и приведенные там ссылки), на стадии предразрушения в области очага разрушения происходит процесс самоорганизации структурных неоднородностей и формируется система структурных уровней деформации. Этот процесс начинается с нижних структурных уровней путем накопления несплошностей и микротрещин, и по мере того, как исчерпываются способности деформирования на данном структурном уровне, в процесс вовлекаются структуры более высокого уровня. Разрушение материала происходит в результате того, что способности к деформированию на всех структурных уровнях, вплоть до макроскопического, исчерпаны. В рамках этого подхода можно показать, что плотность упругой энергии, сконцентрированной в очаговой области к моменту макроразрушения, может оказаться больше плотности упругой энергии, оцениваемой на основе измерений макронапряжений [22]. Действительно, напряжение $\sigma_{i,j}(r)$ в очаговой зоне можно представить как $\sigma_{i,j}(r) = \sum\limits_n \sigma^n_{i,j}(r)$, где $\sigma^n_{i,j}(r)$ – составляющая напряжения, осциллирующая на расстояниях, определяемых n-м структурным уровнем, причем $<\sigma^n_{i,j}(r)>= 0$ для всех уровней, за исключением макроуровня ($n = 0$) и $<\sigma^n_{i,j}(r)\sigma^m_{i,j}(r)>= 0$ для всех $m \neq n$. (Здесь и в дальнейшем $< A >$ означает осреднение величины A по рассматриваемому объему.) Тогда плотность упругой энергии, сконцентрированной в очаговой зоне, по порядку величины оценивается соотношением

$$E \sim <\sigma_{i,j}(r)\sigma_{i,j}(r)>= \sum_n <\sigma_{i,j}(r)^n\sigma^n_{i,j}(r)> .$$

Введем критическое напряжение σ^n_{cr}, превышение которого означает, что n-й уровень исчерпал свои возможности деформирования. Тогда, в состоянии, непосредственно предшествующем макроразрушению, $E \sim \sum\limits_n (\sigma^n_{cr})^2 \sim \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \ldots$, где $\varepsilon_0 \sim (\sigma^0_{cr})^2$ – оценка плотности упругой энергии, получаемая на основе измерения макронапряжений. В дальнейшем будем считать, что $\varepsilon_0 \gg \varepsilon_1 \gg \ldots$ (обсуждение возможности того, что $\varepsilon_0 \sim \varepsilon_1 \sim \ldots$, см. в [22]).

Лабораторные эксперименты по разрушению образцов горных пород позволяют сделать некоторые выводы о процессах, происходящих при формировании очага землетрясения. В частности, в [23] показано, что, например, для образца гранита, который деформируется в условиях трехосного сжатия, процесс активизации акустической эмиссии на стадии формирования магистрального разрыва начинается в окрестности одной из граней образца и затем распространяется в области будущего разрыва со скоростью, порядка 10^{-2} мм с$^{-1}$. Это может быть интерпретировано как развитие процесса самоорганизации структурных неоднородностей на макроуровне, предшествующего началу лавинообразного разрушения. (Как отмечено в [24], формирование очага макроразрушения в этом эксперименте имеет определенную аналогию с формированием очага землетрясения в тех случаях, когда землетрясение возникает вне области существующего разлома, при разрушении перемычки в разломе, при разрушении зацепления извилистых берегов разлома и т.д.)

В этой связи следует также упомянуть результаты лабораторных экспериментов по исследованию механизма неустойчивого скольжения с трением (stick-slip) в качестве модели землетрясения, произошедшего на достаточно гладком участке разлома [25]. В этих экспериментах было обнаружено скольжение двух типов, предшествующее динамической подвижке. Скольжение первого типа возникало в какой-то точке контакта взаимодействующих блоков и распространялось со скоростью порядка нескольких сантиметров в секунду. После этого появлялось скольжение второго типа и распространялось вдоль контакта со скоростью порядка десятков–сотен метров в секунду, которое переходило в неустойчивое скольжение, сопровождающееся сбросом напряжений.

Наконец упомянем о так называемом эффекте Кайзера. Этот эффект наблюдается в экспериментах по разрушению горных пород и заключается в том, что при нагружении материал как бы запоминает уровень максимальной нагрузки и интенсивность акустической эмиссии при повторном нагружении резко возрастает при переходе через этот уровень. Однако разгруженный или помещенный в иное поле напряжений образец постепенно "забывает" первоначальную нагрузку. Эффект Кайзера дает основания предполагать, что в сейсмоактивной зоне должны существовать области (потенциальные очаги землетрясений), в которых процесс самоорганизации структурных уровней начал развиваться, но по каким-то причинам не дошел до стадии лавинообразного разрушения. Вместе с тем через какое-то время, при "благоприятном" перераспределении напряжений, эти потенциальные очаги могут опять "ожить".

Опираясь на приведенные результаты, можно предположить, при определенном пространственно-временно́м осреднении, следующий сценарий временно́й эволюции процесса формирования очага. В некотором месте формируется "зародыш" потенциального очага и затем этот "зародыш" начинается "разрастаться", захватывая соседние области. При этом, по мере увеличения характерных размеров потенциального очага в процесс самоорганизации вовлекаются все более высокие структурные уровни. Если этот процесс не останавливается по каким-то внешним причинам, то в конечном итоге он приводит к началу лавинообразного разрушения среды в очаговой зоне. (В несколько иной терминологии, похожие соображения о процессе формирования очага землетрясения с учетом иерархической блоковой структуры геофизической среды обсуждались в [26].)

Анализ пространственно-временно́го развития процесса акустической эмиссии при разрушении горных пород в лабораторных экспериментах позволяет также сделать некоторые выводы о стадии предразрушения. Так, в [24] показано, что формированию макроразрыва в образце гранита, который деформируется в условиях трехосного сжатия, предшествуют стадии относительной локализации процесса накопления мелких разрывов в области будущего макроразрыва и последующая кластеризация и укрупнение этих разрывов, а в [17] показано, что процесс выделения акустической энергии на этом этапе хорошо описывается уравнением (1). Это позволяет предположить, что в процессе формирования очага сильного землетрясения в окрестности будущего гипоцентра может происходить ускорение процесса выделения сейсмической энергии, причем область, в которой этот процесс развивается, стягивается к гипоцентру будущего главного удара.

2. Кинетика асимптотики афтершоковой последовательности

Пусть произошло сильное землетрясение, в результате которого упругие напряжения "мгновенно" перераспределились таким образом, что упругая энергия Q, сконцентрированная в некоторой области Ω_{as} (post factum эта область определяется облаком афтершоков), достаточна для инициации и поддержания афтершокового процесса в этой области. В дальнейшем мы будем предполагать, что область Ω_{as} изолирована от внешних воздействий, в том смысле, что только сконцентрированная в ней упругая энергия идет на работу по подготовке землетрясений и на энергию, выделяемую при землетрясениях. Формально будет удобно считать, что общий объем области Ω_{as} бесконечен. Поскольку нас будет интересовать поведение афтершоковой последовательности на больших временах, будем считать, что афтершоки не оказывают существенного непосредственного влияния друг на друга и что развитие очагов афтершоков сопровождается на этой стадии прогрессирующим падением степени переизбытка упругой энергии в области Ω_{as}, за счет которого развивается афтершоковый процесс.

Пусть Ω_a – одна из областей в Ω_{as}, в которой, при текущей конфигурации напряжений, образовался "зародыш" потенциального очага. По мере формирования очага реализуется одна из следующих возможностей:

• конфигурация напряжений в Ω_{as} меняется, формирование очага прекращается и возможно перераспределение накопленной в Ω_a упругой энергии в другие области;

• область потенциального очага Ω_a начинает расти, вовлекая в процесс самоорганизации следующие структурные уровни;

• область потенциального очага Ω_a достигает критического для данного очага размера, при котором все возможные структурные уровни исчерпаны, и в ней начинается процесс лавинообразного разрушения (происходит землетрясение).

Будем ассоциировать процесс расширения области Ω_a с условием "энергетического насыщения", старшего для текущего состояния этой области структурного уровня. Для простоты будем в дальнейшем считать, что область Ω_a представляет собой шар радиуса a и что процесс роста Ω_a сферически симметричен. По аналогии с фазовой границей, при условии равновесия системы, плотность энергии ε_a на внешней границе области потенциального очага Ω_a равна $\varepsilon_a = \varepsilon_0 + \delta/a(t)$, где δ пропорциональна характерной толщине пограничного слоя и $a(t)$ – радиус потенциального очага к моменту времени t.

Будем предполагать, что скорость роста радиуса области потенциального очага определяется градиентом плотности энергии на внешней границе, т.е.

$$da(t)/dt = D(\partial\varepsilon/\partial r)|_{s=a},$$

(где D – коэффициент) и что эта скорость настолько мала, что распределение энергии в пограничном слое потенциального очага в каждый момент времени можно считать совпадающим со стационарным распределением: $\Delta\varepsilon(r) = 0$. Иными словами, $\varepsilon = <\varepsilon> - (<\varepsilon> - \varepsilon_a)\frac{a}{r}$, где $<\varepsilon>$ – средняя плотность энергии в вне Ω_{as} областей потенциальных очагов. Отсюда

$$\frac{da(t)}{dt} = \frac{D(<\varepsilon> - \varepsilon_a)}{a(t)} = \frac{D\Delta(t)}{a^2(t)}(a(t) - a_{cr}(t)), \tag{3}$$

где $\Delta(t) = <\varepsilon> - \varepsilon_0$ – величина "перенасыщения" плотности энергии в области Ω_{as} вне образовавшихся потенциальных очагов в момент времени t и $a_{cr}(t) = \delta/\Delta(t)$.

Введем плотность функции распределения потенциальных очагов по размерам $f(t,a)$, нормированную так, что интеграл $N(t) = \int\limits_0^\infty f(t,a)da$ равен числу потенциальных очагов в единице объема в момент времени t. Функция распределения $f(t,a)$ удовлетворяет уравнению непрерывности в пространстве размеров:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}(f v_a) = 0, \quad 0 < a < \infty, \tag{4}$$

где $v_a = da(t)/dt$ – скорость перемещения потенциального очага в пространстве размеров. Уравнение (3) означает, что потенциальные очаги конечного размера спонтанно не возникают и не исчезают, однако их число $N(t)$ меняется со временем за счет того, что при $a(t) < a_{cr}(t)$ очаг релаксирует к состоянию $a = 0$.

Закон сохранения энергии для области Ω_{as} записывается в виде

$$\Delta(t) + q(t) + R(t) + J_{eq}(t) = Q = \mathrm{const}, \tag{5}$$

где $q(t) = 4/3\pi\varepsilon_0 \int\limits_0^\infty a^3 f(t,a)da$ – упругая энергия, сосредоточенная в потенциальных очагах; $R(t)$ – работа, затраченная на формирование потенциальных очагов; $J_{eq}(t)$ – отток энергии, за счет афтершоков, произошедших к моменту времени t. (Напомним, что все величины в (5) отнесены к единице объема.) Будем предполагать, что по мере окончания процесса афтершоковой активизации $\Delta(t) \to 0$, в то время, как

$$q(t) \to q_0 \neq 0, \tag{6}$$

функции $R(t)$ и $J_{eq}(t)$ конечны по их физическому смыслу.

Уравнения (3)–(6) формально похожи на уравнения, описывающие кинетику выпадения вещества из слабо перенасыщенного раствора на стадии коалесценции [27]. Для удобства чтения статьи, мы конспективно приведем рассуждения, использованные в этой книге (с.509–516) для решения уравнений (3)–(6). Нас интересует асимптотическое описание процесса при $t \to \infty$. Будем измерять время в единицах $a_{cr}^3(0)/D\delta$, где $a_{cr}(0)$ – критический радиус потенциального очага перед началом процесса затухания афтершоковой активизации, и введем новые переменные: $\tau = 3\ln(a_{cr}(t)/a_{cr}(0))$ и $u = a/a_{cr}(t)$. (Переменная τ монотонно меняется от 0 до ∞ при изменении t от 0 до ∞.) В результате, уравнение (3) примет вид

$$du^3/d\tau = \gamma(u-1) - u^3, \tag{7а}$$

где

$$\gamma = \gamma(\tau) = x^{-2}dt/dx, \quad x(t) = a_{cr}(t)/a_{cr}(0). \tag{7б}$$

Можно показать, что условие (6) выполняется, только если при $\tau \to \infty$ функция $\gamma(\tau)$ стремится к пределу $\gamma_0 = 27/4$, при котором максимум функции$\psi(u) = \gamma(u-1) - u^3$, стоящей в правой части уравнения (7а), касается оси абсцисс, причем $\gamma(\tau)$ должна приближаться к этому пределу снизу. Точка касания $u = u_0 = 3/2$. Непосредственные вычисления показывают, что $\gamma(\tau) = \gamma_0(1 - \varepsilon^2(\tau))$, $\varepsilon(\tau) = \sqrt{3/(4\tau^2)}$ при $\tau \to \infty$. При $\tau^2 \gg 1$ вторым членом в $\gamma(\tau)$ можно пренебречь. Тогда из уравнения $1/\gamma = x^2dx/dt = 4/27$ находим, что при $\ln^2(t) \gg 1$ функция $x(t) = (4t/9)^{1/3}$.

Функция распределения $f(t,a)$ в переменных t, a связана с функцией распределения $\varphi(\tau, u)$ в переменных τ, u соотношением $\varphi(\tau, u)du = f(t,a)da$. Уравнение непрерывности для этой функции:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial u}(\varphi v_u), \quad v_u = \frac{du}{d\tau}. \tag{8}$$

Везде, за исключением малой ($\sim\varepsilon$) окрестности точки u_0, скорость v_u дается уравнением (7а) с $\gamma = 27/4$:

$$v_u = \frac{du}{d\tau} = -\frac{1}{3u^2}(u-u_0)^2(u+2u_0). \tag{9}$$

Решение уравнения (8) записывается в виде

$$\varphi(\tau, u) = \frac{\chi(\tau - \tau(u))}{-v_u}, \quad \tau(u) = \int\limits_0^u \frac{du}{v_u}, \tag{10}$$

где χ – произвольная функция, которую надо определить, исходя из остальных условий задачи. Для этого, прежде всего, заметим, что, как следует из (7), все точки на оси u, изображающие потенциальные очаги, двигаясь влево и проходя через окрестность точки u_0, "застревают" в этой окрестности, причем, чем позднее они в нее попадают, тем дольше там находятся. Функция распределения справа от u_0 при $\tau \to \infty$ определяется приходящими сюда из бесконечно удаленной области точками, отвечающими потенциальным очагам на "хвосте" их начального (при $\tau = 0$) распределения. Число потенциальных очагов в этом распределении быстро убывает с увеличением их размеров. (Нетрудно понять – поскольку из закона сохранения энергии (5) следует, что $q(t) \le Q < \infty$, число потенциальных очагов с радиусами в интервале $[a, a+L]$ убывает при больших a быстрее, чем a^{-4}.) Это означает, что функция распределения в области $u > u_0$ (вне окрестности точки u_0) стремится к 0 при $\tau \to \infty$. Выразив интеграл $q(t)$ через переменные τ, u (напомним, что $a^3(t) = u^3e^\tau a_{cr}^3(0)$), при больших τ получаем уравнение

$$\xi e^\tau \int\limits_0^{u_0} u^3\varphi(\tau, u)du = 1 + \text{члены, убывающие при } \tau \to \infty, \quad \xi = \frac{4\pi\varepsilon_0 a_k^3(0)}{3q_0}, \tag{11}$$

где φ задается уравнением (10), а скорость v_u – уравнением (9). (Можно показать, что относительный вклад в интеграл от окрестности точки u_0, в которой (9) неприменимо, стремится к 0 при $\tau \to \infty$.) Очевидно, что левая часть равенства (11) не зависит от τ при $\tau \to \infty$ только, если $\chi(\tau - \tau(u)) = Ae^{-\tau+\tau(u)}$. Функция вычисляется элементарным интегрированием, и в результате получаем

$$\varphi(\tau, u) = Ae^{-\tau} P(u),$$

где

$$A = 2,7q_0(4\pi\varepsilon_0 a_{cr}(0))^{-1}, \quad P(u) = C\theta(u_0 - u)\frac{u^2 \exp[(u/u_0 - 1)^{-1}]}{(u + 2u_0)^{7/3}(1 - u/u_0)^{11/3}}.$$

Здесь $\theta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\theta(x) = 0$ при $x < 0$ и постоянная $C = e(192)^{1/3}$. Функция $P(u)$ автоматически нормирована на 1:

$$\int_0^{u_0} P(u)du = \int_0^{u_0} \frac{e^{\tau(u)}}{-v_u}du = -\int_0^{-\infty} e^{\xi}d\xi = 1.$$

Поскольку при больших t величина $\tau = \ln(4/9t)$, число потенциальных очагов в единице объема убывает при больших временах, как

$$N(t) = \int_0^{\infty} f(t, a)da \approx \int_0^{u_0} \varphi(\tau, u) = Ae^{-\tau} = \frac{9A}{4t}.$$

Как обсуждалось выше, размер потенциального очага, при котором в нем происходит лавинообразное разрушение (землетрясение), и, соответственно, магнитуда землетрясения, определяются тем, что возможности деформирования среды на макроуровне исчерпываются. Это, в свою очередь, связано с ее локальными свойствами и конфигурацией поля напряжений. Будем учитывать эти свойства в достаточно осредненном виде, введя в рассмотрение функцию плотности вероятности w перехода потенциального очага с радиусом a в землетрясене с магнитудой $M = M(a)$. Эта функция, вообще говоря, зависит от стадии развития афтершокового процесса: $w = w(t, a)$. Будем предполагать, что $w(t, a)$ при больших t определяется распределением (фрактальным) неоднородностей литосферы в окрестности основного толчка и может быть записана в виде

$$w(a, t)da \sim E(a)^{-\beta(t)}dE = E(a)^{-\beta(t)}\frac{dE(a)}{da}da,$$

где $E(a)$ – сейсмическая энергия, выделяемая при землетрясении с магнитудой $M(a)$. Число афтершоков в единице объема определяется соотношением

$$N_{aft}(t) = \int_0^{\infty} w(t, a)f(t, a)da.$$

Будем считать, что зависимость сейсмической энергии землетрясения $E(a)$ от линейного размера очага может быть задана соотношением

$$E(a) = \mu\varepsilon_0 a^{3-\alpha},$$

где μ и $1 \gg \alpha \geq 0$ – константы, не зависящие от магнитуды землетрясения. Тогда

$$w(a, t)da \sim a^{-\beta(t)(3-\alpha)+2-\alpha}da$$

и выражение для $N_{aft}(t)$ при больших t переписывается в виде

$$N_{aft}(t) \sim \int\limits_0^{\infty} a^{-3\mu(y)} f(t,a)da \sim e^{-\tau\mu} \int\limits_0^{u_0} u^{-3\mu}\varphi(\tau,u)du \sim B(\mu)e^{-\tau(\mu+1)} \sim B(\mu)t^{-\mu(t)+1)},$$

где $\mu(t) = \beta(t) - 2/3 - (\beta(t)-1)\alpha/3$ и интеграл $B(\mu) = \int\limits_0^{u_0} u^{-3\mu}P(u)du$ конечен, при условии, что $\mu < 1$. Таким образом, число афтершоков $N_{aft}(t)$ на больших временах убывает как

$$N_{aft}(t) \sim B(\mu(t))t^{-(\mu(t)+1)}.$$

Считая, что $\mu(t)$ при больших t выходит на предельное значение β_0, окончательно имеем

$$N_{aft}(t) \sim B(\nu)t^{-\nu}, \quad \nu = \beta_0 + \frac{1}{3} - \alpha\frac{\beta_0 - 1}{3},$$

где β_0 должно удовлетворять условию $\beta_0 - \alpha(\beta_0 - 1)/3 < 5/3$. (Напомним, что наклон графика повторяемости, оцененный по данным о глобальной сейсмичности, близок к 5/3).

В ряде случаев было установлено, что асимптотика фрактальной размерности афтершоковой последовательности выходит на величину, характерную для фонового режима локальной сейсмичности и выражающуюся через соответствующую оценку наклона графика повторяемости. С другой стороны, величина фрактальной размерности согласуется с фрактальной размерностью системы неоднородностей литосферы в окрестности главного удара [29]. Таким образом, связь между ν и β_0 можно рассматривать как некоторое подтверждение гипотезы: дробность показателя степени в законе Омори является следствием фрактальной структуры сейсмичности.

В заключение этого раздела заметим – если считать, что $1 < \nu < 2$, то при $\alpha = 0$ величина β_0 меняется в интервале 2/3–5/3. Однако при этом следует иметь в виду, что мы рассматривали афтершоки как независимые события. В реальной ситуации афтершоковое землетрясение может порождать собственные афтершоки и это может привести к небольшому уменьшению величины параметра ν (автор благодарен за это замечание П.Н. Шебалину). Кроме того, землетрясения, происходящие в соседних с Ω_{as} областях, также могут оказать влияние на развитие афтершокового процесса, которое не учитывалось при данном рассмотрении.

3. Асимптотика процесса форшоковой активизации

В процессе подготовки сильного землетрясения напряженное состояние, близкое к пределу длительной прочности пород земной коры, достигается на достаточно большой территории W. Для анализа особенностей сейсмичности перед главным ударом, рассмотрим область $W_{\text{eff}} \in W$ вокруг гипоцентра будущего сильного землетрясения, в которой развивается форшоковая активизация. (В отличие от раздела 2, здесь мы абстрагируемся от пространственных размеров потенциального очага и ассоциируем очаг непосредственно с его гипоцентром.) В дальнейшем, ограничивающую область поверхность W_{eff} будем обозначать через S_{eff}, а объем множества Ξ_d, образованного находящимися внутри этой области гипоцентрами потенциальных очагов, через V_{eff}. Как уже обсуждалось в разделе 2, по мере подготовки сильного землетрясения в окрестности его гипоцентра происходит относительная локализации процесса накопления мелких разрывов и последующая их кластеризация и укрупнение (процесс форшоковой активизации). При этом, по мере выделения энергии внутри области W_{eff}, упругая энергия, накопленная в области W, начинает перераспределяться таким образом, чтобы обеспечить поддержание этого процесса. Естественно предположить, что процесс этого перераспределения описывается следующим соотношением:

$$J_{\text{in}}(t)S_{\text{eff}}(t) \sim J_{\text{out}}(t)V_{\text{eff}}(t) + R(t). \tag{12}$$

Здесь J_{in} – поверхностная плотность потока энергии, "подкачиваемой" в область W_{eff} из внешней части области W; $J_{\text{out}}(t)$ – объемная плотность потока полной энергии, выделяемой в процессе землетрясений; $R(t)$ – работа по превращению упругой энергии в другие формы (например, в тепло), не связанная с процессом землетрясения и пропорциональная объему $V(t)$ области W_{eff} (в дальнейшем для простоты будем считать, что $R(t) = \varepsilon V(t)$).

Как показывают экспериментальные данные, для некоторых сильных землетрясений скорость роста коммулятивной беньофовской деформации $Q(t)$, оцениваемая по экспериментальным значениям $Q_{\exp}(t) = \sum_i \sqrt{E_i}$ (где E_i – сейсмическая энергия i-го землетрясения последовательности событий, произошедших к моменту времени t в окрестности эпицентра главного удара) увеличивается по мере приближения момента события t_s.

Будем исходить из следующих трех предположений:

Предположение 1. Скорость роста $Q(t)$ при $t \to t_s$ определяется соотношением

$$\frac{dQ(t)}{dt} \sim (J_{\text{out}}(t))^{\alpha}, \tag{13а}$$

где α – неизвестный параметр.

Введем характерный линейный размер $L_{\text{eff}}(t)$ области $W_{\text{eff}}(t)$ в момент времени t, и воспользовавшись (12) и соотношениями: $V(t) \sim (L_{\text{eff}}(t))^3$, $S_{\text{eff}}(t) \sim (L_{\text{eff}}(t))^2$, $V_{\text{eff}}(t) \sim (L_{\text{eff}}(t))^d$ (где $d \le 3$ – размерность множества Ξ_d), перепишем (13а) в виде

$$\frac{dQ(t)}{dt} \sim \left(\frac{J_{\text{in}}(t) \times S_{\text{eff}}(t) - \varepsilon \times V(t)}{V_{\text{eff}}(t)}\right)^{\alpha} \sim \left(\frac{J_{\text{in}}(t)}{(V_{\text{eff}}(t))^{d-2}} - \varepsilon \times (L_{\text{eff}}(t))^{3-d}\right)^{\alpha}. \tag{13б}$$

На последней стадии процесса величину $J_{\text{in}}(t)$ можно представить в виде $J_{\text{in}}(t) = J_0 + J_1 \times$ $\times (t_s - t)/T_c + \ldots$. Поскольку к моменту главного удара t_s процесс поступления энергии в окрестность очага главного удара, по-видимому, не прекращается, в этом разложении можно считать $J_0 \neq 0$. (Здесь и в дальнейшем мы использовали характерное время T_c от начала ускорения процесса самоорганизации трещин до момента главного удара в качестве обезразмеривающего параметра.)

Предположение 2. При подготовке сильного землетрясения процесс разрушения среды стягивается к месту будущего главного толчка (см., например, [30] и приведенные в ней ссылки).

Предположение 3а. Функция $L_{\text{eff}}(t)$ аналитична при $t \to t_s$, т.е. ее можно представить в виде:

$$L_{\text{eff}}(t) = L_1 \times \left(\frac{t_s - t}{T_c}\right) + L_2 \times \left(\frac{t_s - t}{T_c}\right)^2 + \ldots. \tag{14}$$

Поскольку у нас нет физических оснований считать $L_1 = 0$, окончательно уравнение (13б) при $t \sim t_s$ перепишем в виде:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{k}{(t_s - t)^{(d-2)\alpha}} + \text{члены, стремящиеся к 0 при } t \to t_s, \tag{15}$$

или в интегральной форме (оставляя только главные члены)

$$Q(t) = Q_{\text{total}} + \frac{k}{\alpha(2-d)+1}(t_s - t)^{\alpha(2-d)+1} \tag{16}$$

(здесь k – некоторая константа). Таким образом, если размерность множества потенциальных очагов $2 < d < 2 + 1/\alpha$, мы приходим к уравнению (1б), где $m = 1 + (2 - d)\alpha$.

Предположение (14) можно переформулировать в виде условия: для главного члена асимптотики функции $L_{\text{eff}}(t)$ при $t \to t_s$, масштабное преобразование $S_\lambda(t) : (t - t_s) \to \lambda \times (t - t_s)$, где λ – произвольно, компенсируется масштабным преобразованием функции $L_{\text{eff}} \to \lambda^{-1} \times L_{\text{eff}}$.

Предположение об аналитичности $L_{\text{eff}}(t)$ в окрестности особой точки t_s может не выполняться, коль скоро сценарий разыгрывается на фрактальном множестве. Однако соображения о масштабной инвариантности процесса на стадии, когда состояние среды близко к пределу длительной прочности, позволяют, по аналогии с теорией фазовых переходов, заменить это предположение на следующее:

Предположение 3б. В окрестности особой точки t_s анализируемый процесс инвариантен относительно дискретного масштабного преобразования $\hat{S}_{\lambda_0}(t)$ [31]. При этом наиболее общее выражение, описывающее возможное сингулярное поведение функции состояния системы $F(t)$ в окрестности особой точки t_s имеет вид [32]

$$F_{\sin g}(t) = \xi^\kappa \times H\left(\frac{\log(\xi)}{\log(\lambda_0)}\right),$$

где $\xi = |t - t_s|$; $H(z)$ – периодическая функция: $H(z + 1) = H(z)$ и параметр λ_0 определяется линейной частью преобразования $\hat{S}_{\lambda_0}(t)$ в окрестности особой точки t_s

$$\hat{S}_{\lambda_0}(t) \approx t_s + \lambda_0 \times (t - t_s) + O(t - t_s).$$

(Здесь и в дальнейшем через $O(z)$ обозначены члены, стремящиеся к нулю быстрее, чем z при $z \to 0$.) Таким образом, в общем случае, при $t \to t_s$ выражение для $L_{\text{eff}}(t)$ записывается в виде:

$$L_{\text{eff}}(t) = L_0 \times \left(\frac{t_s - t}{T_c}\right)^k \times \left[1 + c_0 \times h\left(\frac{\log\left(\frac{t_s - t}{T_c}\right)}{\log(\lambda_0)}\right)\right] + O\left(\frac{t_f - t}{T_c}\right), \tag{17}$$

где h – периодическая функция: $h(1 + z) = h(z)$, и показатель степени κ произволен. Если рассматривать переход от (14) к (17) только как результат ограничения условия инвариантности главного члена асимптотики функции $L_{\text{eff}}(t)$ при $t \to t_s$ на случай дискретного масштабного преобразования, сохраняя вид "компенсирующего" преобразования $L_{\text{eff}} \to \lambda_0^{-1} \times L_{\text{eff}}$, то $\kappa = 1$.

Апеллируя к результатам последующего сравнения модели с экспериментальными данными, будем считать, что амплитуда log-периодической добавки $c_0 \ll 1$. Следуя [10, 13, 14] и последующим работам, будем также считать, что в рассматриваемом случае функция h хорошо аппроксимируется косинусом. Подставляя (17) в (13б) и интегрируя полученное уравнение с точностью до членов порядка $c_0^2 \ll 1$, приходим к log-периодическому обобщению (1а) модели (1б):

$$Q(t) - Q_{\text{total}} = \frac{k}{\alpha\kappa(2 - d) + 1}\left(\frac{t_f - t}{T_c}\right)^m \left[1 + c \times \cos\left(2\pi\frac{\log(t_s - t/T_c}{\log(\lambda_0)} - \varphi\right)\right], \tag{18}$$

где $m = \alpha\kappa(2 - d) + 1$ и $c \sim c_o \ll 1$.

Возвращаясь к (17), заметим, что, поскольку h является периодической функцией, у $L_{\text{eff}}(t)$ появляется дополнительная степень свободы – фаза φ периодической функции h. Легко видеть, что изменение характерного масштаба времени $T_c \to \mu^{-1}T_c$ приводит к перенормировке фазы $\varphi \to \varphi - \log(\mu)/\log(\lambda_0)$ и замене $L_{\text{eff}} \to \mu^{-\kappa}L_{\text{eff}}$.

В заключение этого раздела заметим, что независимые оценки показателя степени m и фрактальной размерности сейсмичности d в окрестности эпицентра анализируемого события дают оценку величины $\alpha' = \alpha\kappa$. К сожалению, современная точность в определении глубины гипоцентров слабых землетрясений не позволяют провести подобную оценку по данным о реальной сейсмичности. Однако в [17] соответствующие расчеты проведены по каталогам акустической эмиссии, полученным при лабораторных экспериментах по разрушению горных пород; в этой же работе проведен анализ прогностических возможностей модели (16).

Выводы

Проведенный теоретический анализ процессов форшоковой и афтершоковой активизации показал, что в обоих случаях асимптотики процессов связаны с характеристиками фрактальной структуры сейсмичности. Показано, что при достаточно естественных предположениях, показатель степени m в моделях (1а) и (1б) связан с размерностью множества потенциальных гипоцентров землетрясений в окрестности эпицентра будущего сильного землетрясения, а показатель степени в законе Омори определяется фрактальными свойствами литосферы в окрестности главного удара.

Пользуюсь случаем выразить благодарность Г.С. Голицыну, В.И. Кейлис-Бороку, Г.М. Молчану, Г.А. Соболеву и П.Н. Шебалину за полезные обсуждения.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект N 01-05-65321а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Садовский М.А.* О естественной кусковатости горных пород // ДАН СССР. 1979. Т.247, N 4. С.829.
2. *Садовский М.А., Болховитинов Л.Г., Писаренко В.Ф.* О свойствах дискретности горных пород // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1982. N 12. С.3–18.
3. *King G.C.P.* The accommodation of large strains in the upper lithosphere of the Earth and other solids by self-similar fault system: the geometrical origin of the b-value // PAGEOPH. 1983. Vol.121. P.567–585.
4. *Bak P., Tang C.* Earthquakes as a self-organized critical phenomena // J. Geophys. Res. 1986. Vol.94. P.15635–15637.
5. *Keilis-Borok V.I.* The lithosphere of the Earth as a nonlinear system with implications for earthquake prediction // Rev. Geophys. 1990. Vol.28. P.9–34.
6. *Keilis-Borok V.I.* Symptoms of instability in a system of earthquake-prone faults // Physica D. 1994. Vol.77. P.193–199.
7. *Садовский М.А., Писаренко В.Ф.* Сейсмический процесс в блоковой среде. М.: Наука, 1991. 96 с.
8. *Габриэлов А.М., Кейлис-Борок В.И., Левшина Т.А. и др.* Блоковая модель динамики литосферы // Математические методы в сейсмологии и геодинамике. М.: Наука, 1986. С.168–177. (Вычисл. сейсмология; Вып.19).
9. *Sornette D., Sammis C.G.* Self-organized criticality and earthquakes // Eur. Lett. 1989. Vol.9. P.197–202.
10. *Sornette D., Sammis C.G.* Complex critical exponents from renormalization group theory of earthquakes: Implications for earthquake predictions // J. Phys. I. France. 1995. Vol.5. P.607–619.
11. *Tang C., Bak P.* Critical exponents and scaling relations for self-organized critical phenomena // Phys. Rev. Lett. 1988. Vol.60. P.234.
12. *Ito K., Matsuizaki M.* Earthquakes as self-organized critical phenomena // J. Geophys. Res. 1990. Vol.95. P.6853–6860.
13. *Saleur H., Sammis C.G., Sornette D.* Renormalization group theory of earthquakes // Nonlinear Proc. Geophys. 1996. N 3. P.102–109.
14. *Newman W.I., Turcotte D.L., Gabrielov A.M.* Log-periodic behavior of a hierarchical failure model with applications to precursory seismic activation // Phys. Rev. E. 1995. Vol.52. P.4827–4835.
15. *Гейликман М.Б., Голубева Т.В., Писаренко В.Ф.* Самоподобная иерархическая структура поля эпицентров землетрясений // Компьютерный анализ геофизических полей. М.: Наука, 1990. С.123–139. (Вычисл. сейсмология; Вып.23).
16. *Varnes D.J.* Predicting earthquakes by analyzing accelerating precursory seismic activity // PAGEOPH. 1989. Vol.130, N 4. P.661–686.
17. *Соболев Г.А., Тюпкин Ю.С.* Анализ процесса выделения энергии при формировании магистрального разрыва в лабораторных исследованиях по разрушению горных пород и перед сильными землетрясениями // Физика земли. 2000. N 2. С.44–55.
18. *Omori. F.* Tokyo Imper. Univ. 1895. (with Plates IV–XIX)
19. *Tokuji Utsu, Yosihiko Ogata, Ritsuko S.Matsu'ura.* The centeuary of the Omory formula for a decay law of aftershock activity // J. Phys. Earth. 1995. Vol.43. P.1–33.
20. *Голицын Г.С.* Землетрясения с точки зрения теории подобия // ДАН. 1996. Т.346, N 4. С.536–539.
21. *Тюпкин Ю.С.* Кинетика афтершоковой последовательности // ДАН. 2000. Т.373, N 5. С.684–687.
22. *Попов В.Л., Панин В.Е.* Фрактальный характер и масштабная инвариантность дисклинационной структуры деформируемого твердого тела // ДАН. 1997. Т.353, N 1. С.51–53.
23. *Lockner D.A., Beyerlee J.D., Kuksenko V., Ponomarev A., Sidorin A.* Observation of quasistatic fault growth from acoustic emission // Fault mechanics and transport properties of rocks. L.: Acad. Press, 1992. P.3–31.

24. *Соболев Г.А., Пономарев А.В.* Акустическая эмиссия и стадии подготовки разрушения в лабораторном эксперименте // Вулканология и сейсмология. 1999. N 4/5. С.50–62.
25. *Dieterich J.H.* Preseismic fault slip and earthquake prediction // J. Geoph. Res. B. 1978. Vol.83, N 8. P.3940–3948.
26. *Садовский М.А., Писаренко В.Ф.* О зависимости времени подготовки землетрясения от его энергии // ДАН СССР. 1983. Т.271, N 2. С.328–330.
27. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 527 с.
28. *Smirnov V.B., Ponomarev A.V.* Common feature of seismic and acoustic activity decay: Book of abstracts. XXVII General assembly of the European Seismological Commission. Lisbon: Lisbon University, 2000. P.88.
29. *Смирнов В.Б.* Повторяемость землетрясений и параметры сейсмического режима // Вулканология и сейсмология. 1995. N 3. С.59–70.
30. *Завьялова А.Д., Никитин Ю.В.* Процесс локализации сейсмичности перед сильными землетрясениями Камчатки // Вулканология и сейсмология. 1999. N 4/5. С.83–89.
31. *Sornette D.* Discrete-scale invariance and complex dimensions // Phys. Report. 1998. Vol.297. P.259–270.
32. *Derrida B., Eckmann J.-P., Erzan A.* Renormalization groups with periodic and aperiodic orbits // J. Phys. A. Math. Gen. 1983. Vol.94. P.115–132.