

УДК 550.345

ДИНАМИКА НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЕЙ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ

Н.М. Колесникова, И.М. Ротвайн, И.В. Кузнецов

Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук, Москва, Россия

Изучено поведение нескольких типов неконсервативных моделей клеточных автоматов типа “падающего песка” (sand-pile) с постоянным подтоком энергии в ячейки решетки. Рассмотрены модели, в которых порванная ячейка может получать дополнительную энергию от соседних рвущихся ячеек, и модели, в которых введен запрет на получение такой энергии (модели без обратного сброса). Доказано, что все рассмотренные типы моделей с обратным сбросом, в том числе и модели, не являющиеся Абелевыми лавинами, в случае решетки на торе и одинаковой скорости подтока энергии во все ячейки решетки, имеют периодическую траекторию изменения энергии с периодом, определяемым коэффициентом диссипации энергии. Представлены результаты исследования поведения этой траектории в случае моделей без обратного сброса. Приведены зависимости характеристик потока модельных событий от основных параметров модели.

DYNAMICS OF SEVERAL CELLULAR AUTOMATA MODELS

N.M. Kolesnikova, I.M. Rotwain, I.V. Kuznetsov

International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

We study the behavior of several nonconservative cellular automata models of sand-pile type with continuous stress flow into lattice cells. Two classes of the models are considered: models with stress transmission, where a broken cell may receive additional stress from neighboring ruptured sites in the periods of cluster creation, and models where stress transmission is forbidden. All considered models with stress transmission (including those that are not Abelian avalanches) are proved to have a periodic stress trajectories under the conditions that the lattice is defined on a torus and stress flows at a uniform rate into all lattice cells. The period of the trajectory is determined by the dissipation coefficient. The behavior of the trajectory is also studied for models without stress transmission. The features of synthetic event sequences are represented as functions of model parameters.

Введение

До 80-х годов моделирование сейсмического процесса и создание алгоритмов прогноза сейсмических событий существовали как два независимых направления в исследовании сейсмичности. Начало работам, связывающим эти направления, было положено академиком В.И. Кейлисом-Бороком и его сотрудниками. С одной стороны, это создание моделей сейсмичности, их исследование и поиск новых предвестников [1], а с другой – применение уже разработанных алгоритмов прогноза к каталогам, порожденным моделями [2–4].

Работы первого направления позволили, например, найти на иерархических моделях дефектообразования новый предвестник сильных событий, основанный на поведении графика повторяемости [1], и адаптировать его к прогнозу сильных землетрясений [5].

Целью работ второго направления явилось более глубокое изучение сходств и различий модельного и сейсмического процессов. Ранее [6–12] сходство обычно ограничивалось утверждением о соблюдении в этих процессах закона Гутенберга–Рихтера. В ходе этих работ было показано, что перед сильными событиями, которые генерируются моделями определенного типа,

возникают предвестники, аналогичные предвестникам сильных землетрясений [3], и что сильные модельные события можно предсказывать, используя алгоритмы, созданные для прогноза сильных землетрясений [2,4].

Эти направления в дальнейшем были распространены и на другие модели сейсмичности [13–15]. Естественным продолжением таких работ явилось использование моделей не только для поиска новых предвестников, но и для создания иных методов прогноза [16,17].

Метод, базирующийся на решении обратной задачи восстановления параметров модели по каталогу модельных событий, был сформулирован в [17] для некоторого частного случая модели типа “падающего песка” (sand-pile в англоязычной литературе). Модель типа sand-pile, как разновидность клеточных автоматов, была предложена для имитации сейсмического процесса Баком, Тангом и Визенфельдом [8]. Эта модель и ее модификации исследовались в большом числе работ [9,10,18–21].

Предложенная в [17] статистическая процедура позволяет по каталогу событий, порожденному моделью, восстановить ее управляющие параметры (коэффициент диссипации и скорости подтока энергии) и, используя их, прогнозировать с достаточно высокой точностью время и место возникновения сильных событий. Для применения такого подхода к более широкому классу моделей необходимо исследовать их поведение в зависимости от управляющих параметров. Данная статья посвящена такого рода исследованиям.

Одним из важных свойств поведения sand-pile моделей является периодичность траектории энергии системы, возникающая при некоторых параметрах модели. Доказательство этого факта для варианта модели, являющегося Абелевой лавиной, приведено в работах [20,21].

В настоящей работе доказывается, что циклическое поведение характерно для более широкого класса моделей, в том числе и для моделей, не являющихся Абековыми лавинами. Согласно классификации, введенной в работах [20,21], исследовано поведение так называемых последовательных диссипативных моделей типа A и B , а также некоторой их модификации – *моделей без обратного сброса* (БОС), в которых вводится запрет на получение уже порванной ячейкой энергии от других рвущихся ячеек в момент образования модельного события.

В большинстве работ по исследованию моделей клеточных автоматов рассматривались *модели с обратным сбросом* (СОС), хотя, на наш взгляд, модели БОС также представляют интерес, так как они отражают ситуацию, когда при образовании разрыва его разрушенные элементы не могут, накапливая напряжение, повторно рваться.

В статье также приведены результаты моделирования, из которых видно, что, за исключением некоторых частных случаев, для всех исследованных моделей БОС наблюдается хаотическое поведение. Кроме того, показана зависимость основных характеристик потока модельных событий от параметров моделей разного типа.

Полученные результаты могут быть использованы как для выбора модели, адекватно воспроизводящей сейсмический процесс, так и для решения обратной задачи восстановления параметров модели с целью последующего прогноза сильных событий.

1. Описание модели

Динамика изменения энергии. Рассматривается решетка (матрица), состоящая из $N * L$ ячеек. Пусть $h_j(t)$ – энергия ячейки j в момент t . Каждая ячейка j накапливает энергию с постоянной скоростью V_j до тех пор, пока $h_j(t)$ не достигнет порогового значения $h_{th} = 1$. С этого момента начинается быстрый процесс, состоящий в следующем:

- для всех ячеек подток энергии прекращается;
- энергия ячейки j уменьшается на величину S_j , где $0 < S_j \leq h_j$ (ячейка рвется): $h_j \rightarrow h_j - S_j$, при этом часть энергии Q_j ($Q_j \leq S_j$) перераспределяется среди окружающих ячеек, а остаток $(S_j - Q_j)$ диссипирует.

В некоторых ячейках энергия после перераспределения может превысить порог, равный 1. Тогда, в свою очередь, эти ячейки рвутся, и перераспределение проводится до тех пор, пока

для всех ячеек решетки энергия не станет ниже пороговой, после чего быстрый процесс заканчивается и возобновляется подток энергии со скоростями $V = \{V_j\}$.

Таким образом, процесс моделирования делится на два: первый, в котором все его характеристики зависят от времени, ассоциируется с накоплением напряжений в земной коре за счет движения плит; второй, названный здесь быстрым процессом, ассоциируется с развитием очага землетрясения. В сейсмодинамике эти два процесса отличаются по времени не менее чем на 10–12 порядков, поэтому естественно предположить, что быстрый процесс происходит мгновенно в момент t .

Подобное разделение процесса моделирования было использовано, например, в работе [6] для блоковых моделей динамики литосферы.

Рассмотрим два варианта быстрого процесса:

1) порванная ячейка j получает энергию от окружающих ее ячеек, порвавшихся после нее в том же быстром процессе (модель СОС);

2) порванная ячейка j не может получить эту дополнительную энергию после своего разрыва в том же быстром процессе (модель БОС). В этом случае энергия, приходящаяся при перераспределении на долю ячейки j , диссипирует.

В зависимости от того, как определяются величины энергий S_j и Q_j , можно выделить три типа модели, которые в дальнейшем обозначены через А1, А0 и В.

Тип модели	Сброс при разрыве	Перераспределение	Диссипация
А1	S	$S(1 - D)$	SD
А0	h_j	$1 - D$	$h_j - (1 - D)$
В	h_j	$h_j(1 - D)$	$h_j D$

Эти типы моделей имеют следующие различия.

А1: $S_j = S$ и $Q_j = S(1 - D)$ для всех ячеек j рассматриваемой решетки. Таким образом, в модели А1 все ячейки теряют при разрыве одну и ту же постоянную величину энергии, не зависящую от величины их энергии перед разрывом. Здесь и далее, будем называть параметр модели D коэффициентом диссипации.

А0: $S_j = h_j$, где $h_j \geq 1 - D$ – энергия ячейки j перед ее разрывом; $Q_j = 1 - D$. Ячейка j после разрыва будет иметь нулевую энергию; среди окружающих ее ячеек распределяется постоянная величина энергии, не зависящая от h_j , а остаток энергии, величина которого зависит от h_j , диссипирует.

В: $S_j = h_j$ и $Q_j = h_j(1 - D)$. Ячейка j после разрыва будет иметь нулевую энергию (так же, как в модели А0), но окружающие ее ячейки получают дополнительную энергию, пропорциональную h_j . Остаток энергии, который диссипирует, также зависит от h_j .

Легко показать, что среди этих моделей только А1 СОС и А0 БОС являются моделями Абельевых лавин, т.е. состояние системы $h = \{h_1, h_2, \dots, h_{N \times L}\}$ после окончания каждого быстрого процесса не зависит от порядка просмотра ячеек при перераспределении энергии [20].

Геометрия модели. Введем понятие *расстояния* r между ячейками решетки (рис. 1). Зафиксируем некоторую ячейку j , отмеченную на рис. 1 звездочкой. Четыре прилегающие к ней ячейки (две по горизонтали и две по вертикали) имеют расстояние $r = 1$ от ячейки j . Восемь ячеек находятся на расстоянии $r = 2$ от нее, 12 – на расстоянии $r = 3$ и, вообще, $4a$ ячеек – на расстоянии $r = a$.

Зададимся радиусом взаимодействия R и назовем соседом ячейки j любую ячейку, которая находится от нее на расстоянии $r \leq R$.

Перераспределение энергии между соседями порванной ячейки. В момент разрыва ячейки j энергия Q_j распределяется между соседями так, что каждый сосед получает дополнительную энергию, равную $Q_j C_r$, где C_r – доля, которая приходится на одного соседа, находящегося на расстоянии r до ячейки j .

<i>a</i>							
8	7	6	5	4	5	6	7
7	6	5	4	3	4	5	6
6	5	4	3	2	3	4	5
5	4	3	2	1	2	3	4
4	3	2	1	*	1	2	3
5	4	3	2	1	2	3	4
6	5	4	3	2	3	4	5
7	6	5	4	3	4	5	6

<i>б</i>								
3				3	2	1	2	
2	3			3	2	1	*	1
3				3	2	1	2	
					3	2	3	
						3		
							3	
						3	2	3

Рис. 1. К определению расстояния между ячейками решетки: *a* – решетка с границами; *б* – решетка на торе. Цифры в ячейках – расстояния от данной ячейки до ячейки, помеченной звездочкой

Величины C_r соотносятся между собой следующим образом:

$$4C_1 : 8C_2 : 12C_3 : \dots : n_r C_r : \dots : n_R C_R = 1 : 1/2^\lambda : 1/3^\lambda : \dots : 1/r^\lambda : \dots : 1/R^\lambda,$$

где n_r – число ячеек, находящихся на расстоянии r от ячейки j ($n_r = 4r$), а λ – фактор взаимодействия ($\lambda \geq 0$); они удовлетворяют уравнению

$$\sum_{r=1}^R C_r n_r = 1.$$

Заметим, что в общем случае, когда ячейка j находится в центральной части решетки, суммарное число соседей j -й ячейки равно $N_n = 2R(R + 1)$. Однако у ячеек, достаточно близко расположенных к границе решетки, суммарное число соседей может быть меньше, чем $2R(R + 1)$. В этом случае энергия, которая приходится на долю отсутствующих соседей при ее перераспределении в быстром процессе, диссипирует. Такие ячейки, в свою очередь, получают меньше дополнительной энергии от соседей и, соответственно, число их разрывов за данное время моделирования может быть меньше, чем у ячеек, расположенных ближе к центру. Тот факт, что граничные и центральные ячейки решетки оказываются в разных условиях, существенно сказывается на поведении модели (*краевой эффект*). Очевидно, что чем меньше размер матрицы, тем сильнее проявляется краевой эффект, который также зависит от радиуса и фактора взаимодействия.

Рассматривался также тип решетки на торе, не содержащий краевых эффектов (см. рис. 1,б). В этом случае расстояние между соответствующими (т.е. принадлежащими одному и тому же столбцу) ячейками первой и последней строки матрицы, так же как и соответствующими (т.е., принадлежащими одной и той же строке) ячейками первого и последнего ее столбцов, равно 1. Для однозначности понятия расстояния между любой парой ячеек вводится ограничение: $R < 0.5 \min(N, L)$.

В случае решетки на торе все ячейки решетки будут иметь одинаковое число соседей при данном радиусе взаимодействия и, следовательно, краевого эффекта не будет.

Каталог модельных событий. По аналогии с землетрясением введем понятие модельного события. Пусть ячейки j_1, j_2, \dots, j_k порвались в течение одного и того же быстрого процесса, произошедшего в момент t . Тогда подмножество этих ячеек образует кластер, если у каждой ячейки из этого подмножества есть хотя бы один сосед из того же подмножества на расстоянии $r = 1$ от нее, и на этом расстоянии нет ячеек, порвавшихся в том же быстром процессе, но не входящих в указанное подмножество. Если у какой-либо ячейки j нет соседей на расстоянии, равном 1 от нее, порвавшихся в том же быстром процессе, то ячейка j составляет единичный кластер.

Каждый кластер является модельным событием. Каталог таких событий получается в результате моделирования. В каждую запись каталога входит время возникновения кластера t , линейные размеры кластера по его длине и ширине, координаты геометрического центра кластера, а также размер события – число разорванных ячеек n_{br} , составляющих данный кластер. По аналогии с каталогом землетрясений, каждое модельное событие характеризуется также магнитудой $M = \lg(n_{br})$.

2. Поведение различных типов модели при одинаковой скорости подтока энергии во все ячейки решетки

Проанализируем поведение модели, рассматривая траекторию изменения ее энергетического состояния по времени, т.е. $h(t) = \{h_1(t), h_2(t), \dots, h_{N \times L}(t)\}$. Введем величину $DT_j = 1/V_j$, и пусть для всех ячеек решетки скорость подтока энергии одинакова, т.е. $DT_j = DT$ для любой ячейки j решетки модели. Тогда можно доказать, что все описанные выше типы моделей СОС в случае решетки на торе демонстрируют периодическое поведение. Более точно это означает, что всегда найдется такой момент времени t , начиная с которого $h_j(t + \omega) = h_j(t)$ для любой ячейки решетки. Период цикла ω для моделей А0 и В равен $D * DT$, а для модели А1 равен $S * D * DT$. Периодичность возникает после конечного числа событий для любого начального состояния системы $h(t_0)$, где t_0 – время начала моделирования.

Для доказательства этого утверждения введем три дополнительные леммы.

Лемма 1. Обозначим через t_b такой момент времени, чтобы в течение интервала $[t_0, t_b]$ все ячейки решетки порвались хотя бы по одному разу. Тогда в течение любого интервала времени $]t_b, t_b + \omega]$ каждая ячейка решетки порвется хотя бы один раз.

Доказательство этой леммы будем вести от противного. Пусть за время $]t_b, t_b + \omega]$ ячейки j_1, j_2, \dots, j_k ни разу не порвались. Составим для всех таких ячеек последовательность времен $t_{j_1}, t_{j_2}, \dots, t_{j_k}$ их последних перед t_b разрывов. Пусть $t_j = \min\{t_{j_1}, t_{j_2}, \dots, t_{j_k}\}$ соответствует моменту разрыва ячейки j . Из способа выбора моментов t_b и t_j следует, что все соседи ячейки j порвались хотя бы один раз за время $]t_j, t_b + \omega]$. Следовательно,

$$h_j(t_b + \omega) = h_j(t_j) + (t_b - t_j)/DT + \omega/DT + h_n.$$

Здесь $h_j(t_j)$ – энергия, которая осталась в ячейке j после ее разрыва во время t_j ; для моделей А0 и В $h_j(t_j) = 0$; для модели А1 $h_j(t_j) \geq 1 - S$; h_n – дополнительная энергия, которую ячейка j получит от соседей за время $]t_j, t_b + \omega]$. Так как $h_n \geq 1 - D$ в случае моделей А0 и В, а $h_n \geq S(1 - D)$ в случае модели А1, то $h_j(t_b + \omega) \geq 1$. Следовательно, j -я ячейка должна была порваться за интервал $]t_b, t_b + \omega]$, что противоречит исходному предположению. Таким образом, лемма доказана.

Лемма 2. Для любого начального состояния системы всегда найдется момент времени t_{beg} , после которого все ячейки решетки будут всегда рваться один и только один раз за период времени ω .

Доказательство. Обозначим через ΔH изменение суммарной энергии системы за время ω :

$$\Delta H = \sum_{j=1}^{N \times L} h_j(t + \omega) - \sum_{j=1}^{N \times L} h_j(t),$$

тогда

$$\begin{aligned} \Delta H &= N * L * S * D - l * S * D && \text{для модели А1,} \\ \Delta H &= N * L * D - \sum (h_j - 1 + D) && \text{для модели А0,} \\ \Delta H &= N * L * D - \sum h_j D && \text{для модели В.} \end{aligned}$$

Здесь суммирование ведется по j от 1 до l , где l – число разрывов за время ω ; h_j – энергия ячейки перед разрывом ($h_j \geq 1$). Так как, согласно лемме 1, $l = N * L + k$ (где $k \geq 0$),

то $\Delta H \leq 0$ для всех моделей. За любой период времени ω , для которого $k > 0$ (т.е. хотя бы одна ячейка порвалась более 1 раза за время ω), суммарная энергия системы H уменьшается на величину $k * S * D$ (модель А1), $k * D + \sum (h_j - 1)$ (модель А0) или $k * D + D * \sum (h_j - 1)$ (модель В). Так как величина H ограничена снизу значением $H = 0$, то очевидно, что найдется такой момент времени t_{beg} , начиная с которого всегда $k = 0$, т.е. все ячейки решетки рвутся один и только один раз за время ω . Таким образом, лемма 2 доказана для всех трех моделей.

Докажем теперь, что, начиная с момента времени t_{beg} , траектория энергии системы является периодической. Для этого выпишем, как меняется энергия ячейки j за время ω (при $t > t_{beg}$):

$$h_j(t + \omega) = h_j(t) + \omega/DT + h_n - h_j, \quad (1)$$

где h_n – дополнительная энергия, которую ячейка j получит от соседей за это время. Согласно лемме 2, $h_n = S(1 - D)$ и $h_j = 1$ для модели А1; $h_n = 1 - D$ и $h_j = \omega/DT + (1 - D) = 1$ для модели А0. Таким образом, для обеих этих моделей $h_j(t + \omega) = h_j(t)$, т.е. утверждение об их периодическом поведении доказано. Однако для модели В значения h_n и h_j в уравнении (1) неизвестны, поэтому для этой модели необходимо доказать еще одну лемму.

Лемма 3. В модели В, начиная с момента времени t_{beg} , все ячейки решетки имеют перед разрывом энергию $h_j = 1$.

Доказательство ведется от противного. Пусть найдется такой интервал времени $]t, t + \omega]$ (при $t \geq t_{beg}$), в течение которого n_1 ячеек порвались с $h_j > 1$ ($1 \leq n_1 \leq N * L$), а в интервале $]t + \omega, t + 2\omega]$ число таких ячеек n_2 . Согласно лемме 2, начиная с момента времени t_{beg} , каждый сосед, получивший дополнительную энергию от любой из n_1 ячеек, порвется после этого с энергией $h_j = \omega/DT + h_n > 1$. В свою очередь, энергия, которую наберет каждая из n_1 ячеек к моменту следующего разрыва, также превысит 1. Следовательно, если $n_1 < N * L$, то $n_2 > n_1$. Таким образом, число ячеек с $h_j > 1$ будет увеличиваться в каждом следующем интервале времени ω , пока не достигнет значения $n_i = N * L$. В то же время, в любом таком интервале есть хотя бы одна ячейка, которая рвется первой в кластере, следовательно, у нее $h_j = 1$, что противоречит исходному предположению.

Подстановка значений $h_j = 1$, $h_n = 1 - D$ в уравнение (1) дает результат $h_j(t + \omega) = h_j(t)$, как и для других моделей.

Таким образом, все описанные выше типы моделей СОС, в случае решетки на торе и при равных скоростях подтока энергии для всех ячеек решетки, будут иметь периодическую траекторию изменения энергии.

Покажем теперь, что в моделях А1 и А0 периодическое поведение наступает не позже того момента времени, когда все ячейки решетки порвались хотя бы один раз. Для этого докажем, что в этих моделях никакая ячейка не может порваться дважды в течение периода времени ω .

Доказательство ведется от противного. Пусть некоторые ячейки решетки порвались более одного раза за интервал времени $]t, t + \omega]$ (при $t \geq t_0$). Найдем среди этих ячеек ту, которая в этот интервал времени первой порвалась во второй раз. Обозначим моменты этих двух разрывов через t_1 и t_2 ($t_2 - t_1 < \omega$). Тогда энергия, которая накопилась в этой ячейке к моменту ее второго разрыва, составит:

$$h_j(t_2) = h_j(t) + (t_2 - t)/DT + h_n - S \quad \text{для модели А1,}$$

$$h_j(t_2) = (t_2 - t_1)/DT + h_n \quad \text{для модели А0.}$$

Здесь для модели А1: h_n – дополнительная энергия, которую ячейка j получит от соседей за время $t_2 - t$, $0 \leq h_n \leq S(1 - D)$; для модели А0: h_n – дополнительная энергия, которую ячейка j получит от соседей за время $t_2 - t_1$, $0 \leq h_n \leq 1 - D$. Следовательно, для обеих моделей $h_j(t_2) < 1$, т.е. данная ячейка не могла порваться во второй раз, что противоречит исходному предположению.

Для модели В аналогичное утверждение неверно, и, как показывает численное моделирование, появлению цикличности в этой модели может предшествовать довольно длительный период

времени, в течение которого ячейки решетки могут рваться многократно. Поведение всех трех типов модели при одних и тех же параметрах модели сравнивается на рис.2.

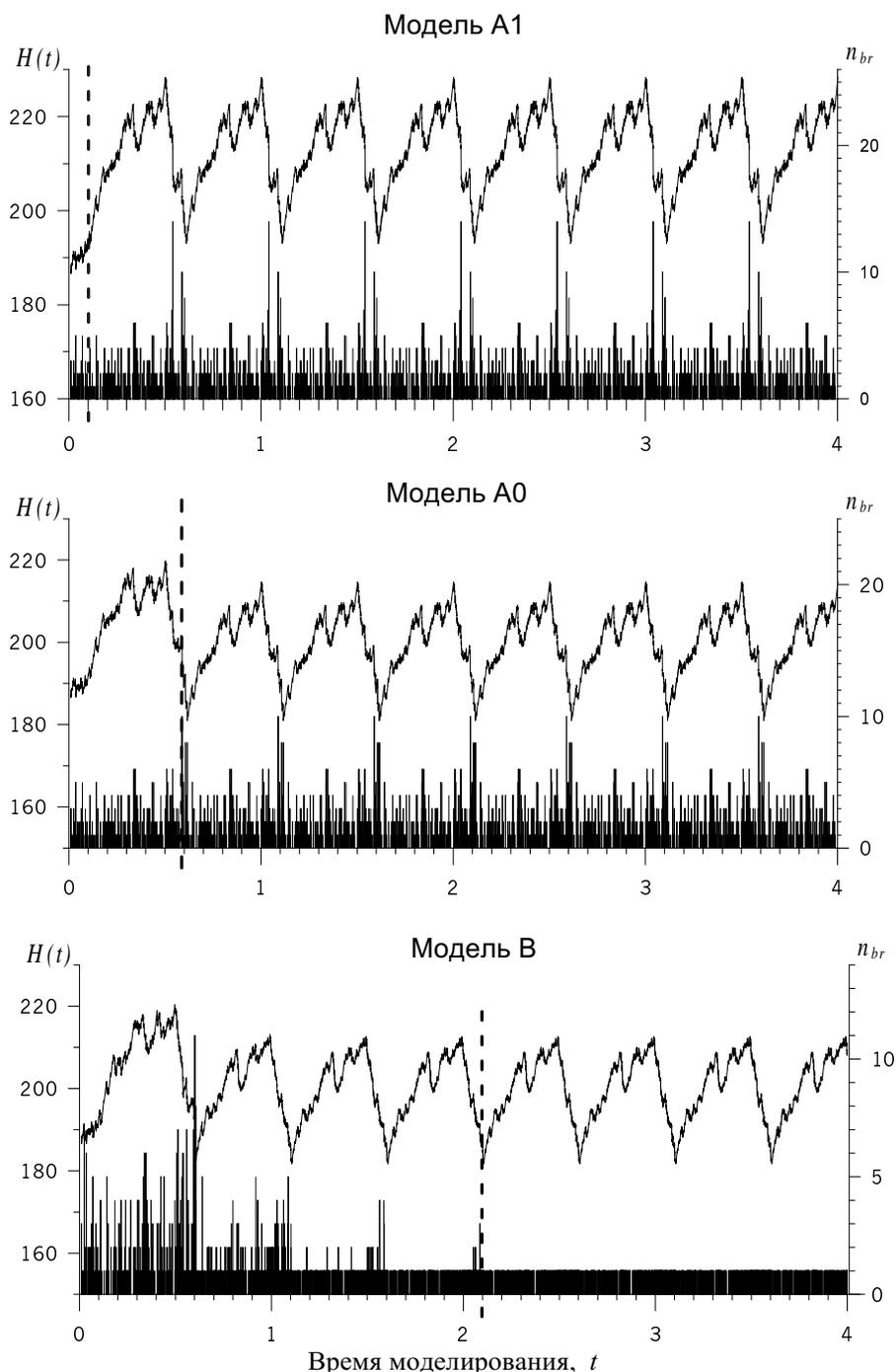


Рис. 2. Изменение суммарной энергии системы $H(t)$ (верхние кривые) и размера событий n_{br} (нижние) для трех типов моделей СОС (решетка на торе)

Параметры: $N = 20$, $L = 20$, $S = 1$, $D = 0.5$, $DT = 1$, $R = 1$, $\lambda = 1$ (одинаковые для всех моделей). Пунктирная прямая показывает момент перехода системы к периодическому поведению

Как было доказано выше, периодическая траектория энергетического состояния системы возникает во всех рассмотренных типах модели при одновременном выполнении трех условий.

1. Порванная в данном быстром процессе ячейка системы может получить дополнительную энергию от окружающих ее ячеек, порвавшихся после нее в том же быстром процессе.

2. Решетка модели не имеет краевых эффектов.

3. Скорости подтока энергии одинаковы для всех ячеек решетки.

Исследуем, как влияет нарушение условий 1 и 2 на наличие периодической траектории энергетического состояния системы при выполненном условии 3. Численное моделирование показывает, что при нарушении любого из этих двух условий в моделях А1 и В траектория перестает быть периодической. Иначе ведет себя модель А0. При нарушении условия 1, т.е. при отсутствии обратного сброса, траектория остается периодической как при наличии краевого эффекта, так и в случае решетки на торе. При нарушении условия 2, т.е. в случае решетки с границами, периодичность траектории возникает только при отсутствии обратного сброса. Таким образом, периодическое поведение наблюдается еще в двух вариантах модели: А0 БОС в случае решетки на торе и с границами. Однако в обоих этих случаях периодическое поведение системы возникает только при минимальном радиусе взаимодействия ($R = 1$), в то время как в моделях СОС величина радиуса взаимодействия не влияет на наличие такого поведения.

Поведение модели А0 БОС в случае решетки на торе и с границами показано на рис. 3.

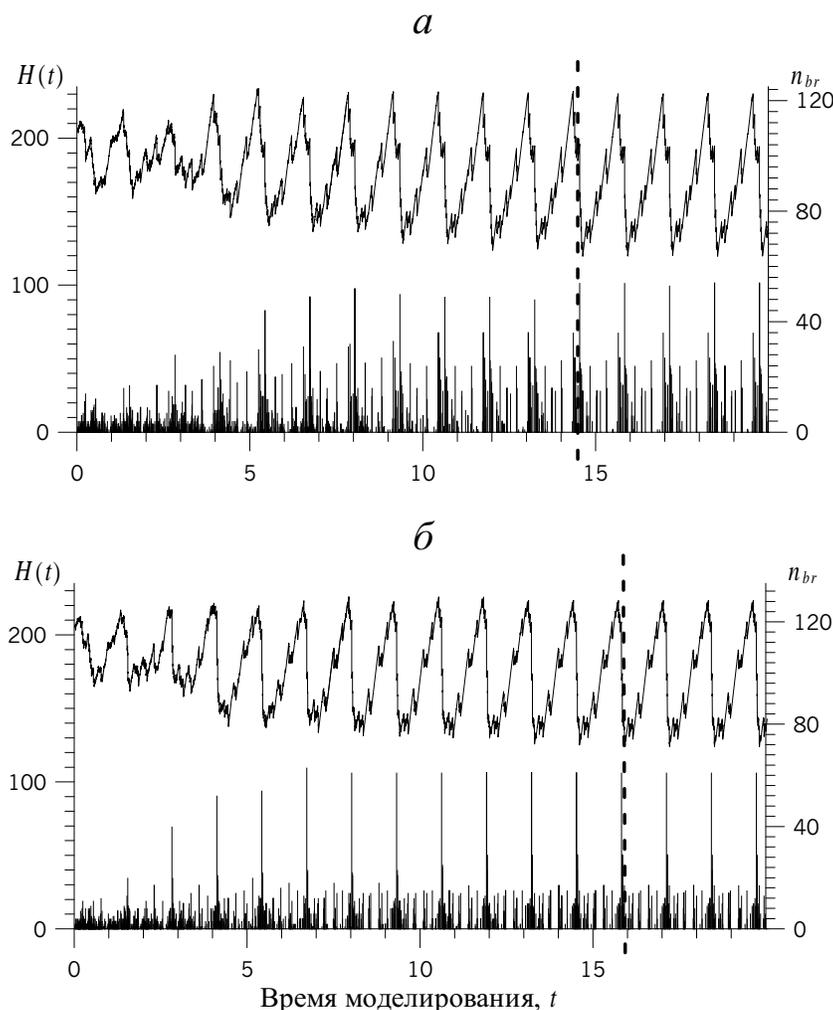


Рис. 3. Изменение суммарной энергии системы $H(t)$ (верхние кривые) и размера событий n_{br} (нижние) для модели А0 БОС в случае решетки на торе (а) и решетки с границами (б)

Пунктирная прямая показывает момент перехода системы к периодическому поведению. Параметры: $N = 20$, $L = 20$, $D = 0.3$, $DT = 2$, $R = 1$, $\lambda = 1$ (одинаковые для обеих моделей). Период цикла: а - $\omega = 3.9$ ($C = 3$); б - $\omega = 1.3$ ($C = 1$)

В обоих вариантах модели при достаточно больших размерах решетки период цикла $\omega = C * DT(1 + D)/2$, где C - некоторый натуральный коэффициент пропорциональности. Величина C зависит от параметров модели и может не совпадать для случаев решетки на торе и решетки с границами при одинаковых параметрах модели.

При малых размерах решетки (менее 100 ячеек) могут образовываться циклы с периодом $\omega = DT$ (одно событие размера $N * L$) или (только в случае решетки на торе) $\omega = D * DT$ (все события единичные).

Очевидно, что если траектория энергетического состояния системы периодическая, то и каждое модельное событие возникает с периодом ω , и последовательность событий в каждом периоде цикла сохраняется. Однако в моделях A1 и A0 сильные события могут возникать периодически даже в случае, когда периодичность траектории энергетического состояния отсутствует. На рис. 4 сравнивается поведение всех типов модели СОС в случае решетки с границами при минимальном радиусе взаимодействия.

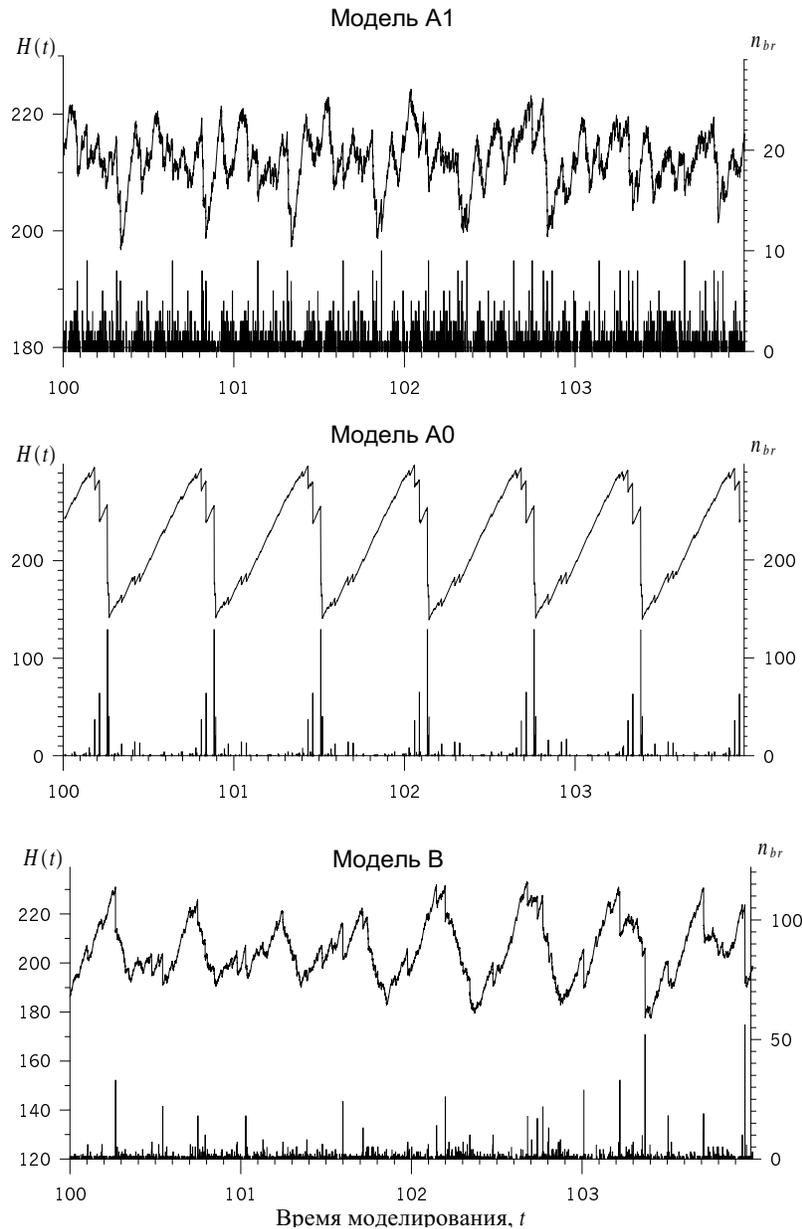


Рис. 4. Изменение суммарной энергии системы $H(t)$ (верхние кривые) и размера события n_{br} (нижние) для трех типов модели СОС (решетка с границами). Параметры модели см. на рис. 2

Видно, что в модели A0 СОС (решетка с границами) сильные события возникают строго периодически с периодом $\omega = DT * (3D + 1)/4$. В модели A1 интервалы времени моделирования, где наблюдается периодичность возникновения сильных событий ($\omega = S * D * DT$), могут сменяться интервалами, где такая периодичность не наблюдается.

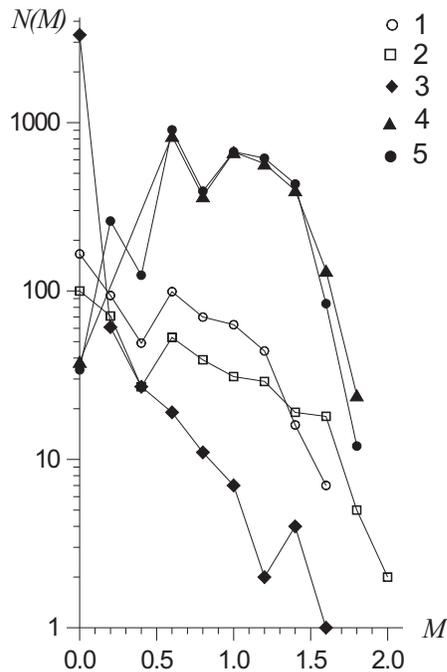
3. Характеристики потока событий в зависимости от параметров модели

Рассмотрим, как меняются характеристики потока модельных событий (график повторяемости, число событий K и их максимальный размер $\max n_{br}$) в течение одного периода цикла в зависимости от типа модели и ее основных параметров: коэффициента диссипации D , размера решетки и параметров взаимодействия R и λ .

На рис. 5 приведены графики повторяемости для всех вариантов модели, обладающих циклическим поведением; параметры модели оставались при этом неизменными. Видно существенное отличие графика повторяемости для модели А0 БОС (оба типа решетки) от графиков повторяемости для моделей СОС. В общем случае график повторяемости нелинеен. Для моделей СОС график может быть аппроксимирован прямой в некотором среднем интервале магнитуд; в то же время, для модели В такая аппроксимация возможна только для узкого интервала значений коэффициента диссипации: так, уже при $D = 0.5$ график повторяемости теряет смысл, так как все события единичные.

Рис. 5. Графики повторяемости для различных типов модели, обладающих периодическим поведением

1–3 – модели СОС ($\omega = 0.1$) (решетка на торе):
1 – А1, 2 – А0, 3 – В; 4, 5 – модель А0 БОС
($\omega = 6.6$): 4 – решетка на торе, 5 – решетка с границами. Параметры модели: $N = 100$, $L = 40$,
 $S = 1$, $D = 0.1$, $DT = 1$, $R = 1$, $\lambda = 1$



Для моделей А0 и А1 угол наклона графика существенно зависит от величины коэффициента диссипации D : при уменьшении D график повторяемости становится более пологим (рис. 6, а). Аналогичная зависимость наблюдается от величины радиуса взаимодействия в моделях А1 и В (рис. 6, б); в модели А0 эту зависимость проследить не удается.

Зависимость числа событий K и максимального размера события $\max n_{br}$ от коэффициента диссипации при различных размерах решетки для модели А1 показана на рис. 7; видно, что величина K практически линейно зависит от D . Естественно, что при одном и том же коэффициенте диссипации при больших размерах решетки число событий больше, однако существенно, что величина K , нормированная на суммарное число ячеек решетки, остается постоянной. Максимальный размер событий уменьшается при увеличении коэффициента диссипации и уменьшении размера решетки, причем, как видно из рис. 7, этот эффект имеет место в области малых значений D и слабо проявляется при $D > 0.25$.

Аналогичные зависимости имеют место и для модели А0 СОС. Для модели В исследование этих зависимостей не имеет смысла, так как даже при малых значениях коэффициента диссипации величина K близка к суммарному числу ячеек решетки.

Исследования показали, что другие параметры модели не оказывают заметного влияния ни на одну из перечисленных выше характеристик потока событий.

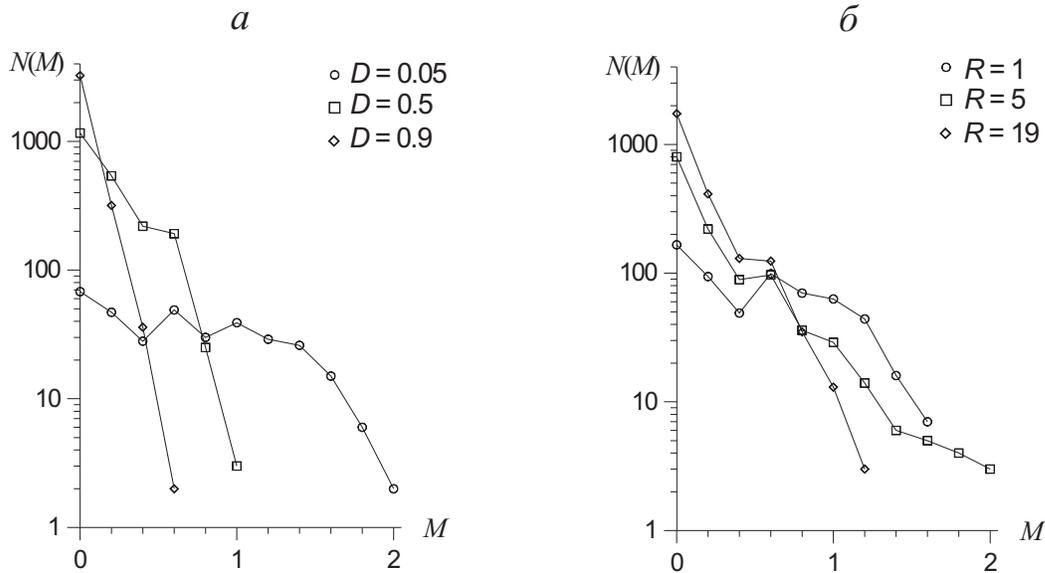


Рис. 6. Графики повторяемости модельных событий одного цикла в модели A1 СОС (решетка на торе) для трех коэффициентов диссипации D при $R = 1$ (а) и трех радиусов взаимодействия R при $D = 0.1$ (б). Другие параметры модели: $N = 100$, $L = 40$, $S = 1$, $DT = 1$, $\lambda = 1$

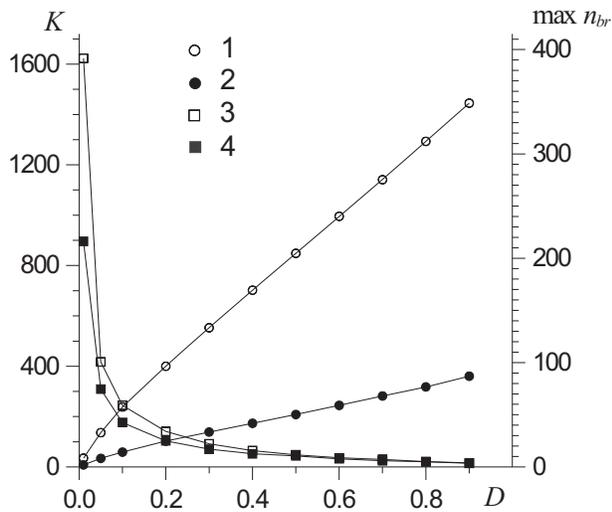


Рис. 7. Зависимость числа событий K и максимального размера событий $\max n_{br}$, усредненных по 25 вариантам начального состояния системы, в течение одного цикла модели A1 СОС от коэффициента диссипации и размера решетки на торе
1, 2 – число событий K для решетки с $N = 40$, $L = 40$ и для решетки с $N = 20$, $L = 20$, соответственно; 3, 4 – максимальный размер событий $\max n_{br}$ для решетки с $N = 40$, $L = 40$ и для решетки с $N = 20$, $L = 20$, соответственно. Другие параметры модели: $S = 1$, $DT = 1$, $R = 1$, $\lambda = 1$

Заключение

Были рассмотрены три типа неконсервативных моделей клеточных автоматов: A1 (ячейка теряет при разрыве постоянную величину энергии), A0 (величина энергии в ячейке после ее разрыва уменьшается до нуля; между соседями порванной ячейки распределяется постоянная величина энергии) и B (величина энергии в ячейке после ее разрыва также равна нулю, однако соседи этой ячейки получают дополнительную энергию, величина которой пропорциональна энергии порванной ячейки перед разрывом). Каждый тип модели рассматривался в условиях наличия обратного сброса энергии (порванная ячейка получает энергию от своих соседей, порвавшихся после нее в том же быстром процессе) или его отсутствия (порванная ячейка не может получить дополнительную энергию после своего разрыва в том же быстром процессе), а также при двух вариантах граничных условий (решетка на торе и решетка с границами).

Доказана теорема о существовании периодического поведения траектории энергии во всех трех типах модели СОС (решетка на торе) при условии равных скоростей подтока энергии во все ячейки решетки. Компьютерное моделирование показало наличие такого поведения еще в двух вариантах модели: А0 БОС (решетка на торе и с границами) при минимальном значении радиуса взаимодействия ($R = 1$).

В моделях А1 и А0 СОС (решетка с границами), в которых траектория энергии не является периодической, сильные события все же происходят с некоторым периодом, причем в модели А1 (как и в реальной сейсмичности) интервалы времени с такой периодичностью могут сменяться интервалами, где таковая не наблюдается.

Была исследована зависимость характеристик потока модельных событий (график повторяемости; число и максимальный размер событий) в течение одного периода цикла от параметров модели. В частности, в моделях А1 и А0 СОС (решетка на торе) среднее число событий за период цикла линейно зависит от величины коэффициента диссипации.

Исследования, приведенные в данной статье, помимо чисто теоретического интереса, могут быть полезны как для выбора вариантов моделей, наиболее адекватно имитирующих сейсмический процесс, так и для оценки величин управляющих параметров модели. Такая оценка может, в частности, опираться на характеристики модельного процесса: наличие или отсутствие периодичности траектории энергии, зависимость числа событий K и коэффициента диссипации D от параметров модели. Алгоритм прогноза места и времени сильных событий на основе решения обратной задачи восстановления управляющих параметров модели, предложенный в [17] для одного варианта модели, будет модифицирован и применен к другим типам моделей клеточных автоматов с учетом результатов исследований, приведенных в данной работе, а в дальнейшем его планируется применить как к блоковым моделям динамики литосферы, так и к реальной сейсмичности разломов.

Авторы выражают глубокую признательность академику В.И. Кейлису-Бороку за постоянный интерес к работам данного направления, а также М.Г. Шнирману и Е.М. Блантер за полезные дискуссии.

Настоящая работа выполнена при содействии Национального научного фонда США (грант EAR-9804859), НАТО (грант SfP 972266) и Международного научно-технического центра (грант 1293-99).

ЛИТЕРАТУРА

1. Наркунская Г.С., Шнирман М.Г. Иерархическая модель дефектообразования и сейсмичность // Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука, 1989. С.56–62. (Вычисл. сейсмология; Вып. 22).
2. Габриэлов А.М., Левшина Т.А., Ротвайн И.М. Блоковая модель динамики литосферы и прогноз землетрясений // Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука, 1989. С.46–55. (Вычисл. сейсмология; Вып. 22).
3. Примаков И.М., Ротвайн И.М., Шнирман М.Г. Диссипация энергии в модели подвижных дисков // Математическое моделирование сеймотектонических процессов в литосфере, ориентированное на проблему прогноза землетрясений. Вып. 1. М.: МИТП РАН, 1993. С.32–41.
4. Габриэлов А.М., Кособоков В.Г., Соловьев А.А. Интерпретация блоковой структуры региона посредством блоковой модели динамики литосферы // Математическое моделирование сеймотектонических процессов в литосфере, ориентированное на проблему прогноза землетрясений. Вып. 1. М.: МИТП РАН, 1993. С.11–19.
5. Наркунская Г.С., Шнирман М.Г. Об одном алгоритме прогноза землетрясений // Компьютерный анализ геофизических полей. М.: Наука, 1990. С.27–36. (Вычисл. сейсмология; Вып. 23).
6. Габриэлов А.М., Кейлис-Борок В.И., Левшина Т.А., Шапошников В.А. Блоковая модель динамики литосферы // Математические методы в сейсмологии и геодинимике. М.: Наука, 1986. С.168–178. (Вычисл. сейсмология; Вып. 19).
7. Burridge R., Knopoff L. Model and theoretical seismicity // Bull. Seismol. Soc. Amer. 1967. Vol.57. P.341–371.
8. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized criticality: An explanation of $1/f$ noise // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol.59. P.381–384.

9. *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* Self-organized criticality // *Phys. Rev. A.* 1988. Vol.38. P.364.
10. *Bak P., Tang C.* Earthquakes as self-organized critical phenomenon // *J. Geophys. Res.* 1989. Vol.94. P.15635–15637.
11. *Carlson J.M., Langer J.S.* A mechanical model of an earthquake fault // *Phys. Rev. A.* 1989. Vol.40. P.6470–6484.
12. *Ito K., Matsuzaki M.* Earthquakes as self-organized critical phenomena // *J. Geophys. Res.* 1990. Vol.95 (B5). P.6853–6860.
13. *Pepke S.L., Carlson J.M., Shaw B.E.* Prediction of large events on dynamical model of a fault // *J. Geophys. Res.* 1994. Vol.99 (B4), P.6769–6788.
14. *Kossobokov V. G., Carlson J.M.* Active zone size vs. activity: A study of different seismicity patterns in the context of the prediction algorithm M8 // *J. Geophys. Res.* 1995. Vol.100 (B4), P.6431–6441.
15. *Shaw B.E., Carlson J.M., Langer J.S.* Pattern of seismic activity preceding large earthquakes // *J. Geophys. Res.* 1992. Vol.97. P.479–488.
16. *Герцик В.М.* Локальный предвестник с затухающей памятью и прогноз сильных событий для Калифорнии // *Проблемы динамики и сейсмичности Земли.* М.: Наука, 2000. С.170–182. (Вычисл. сейсмология; Вып. 31).
17. *Кузнецов И.В.* Прогноз сильных событий в моделях клеточных автоматов на основе решения обратной задачи // *Проблемы динамики и сейсмичности Земли.* М.: Наука, 2000. С.212–220. (Вычисл. сейсмология; Вып. 31).
18. *Feder H.J.S., Feder J.* Self-organized criticality in a stick-slip process // *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol.66 (20). P.2669–2672.
19. *Olami Z., Feder H.J.S., Christensen K.* Self-organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton modeling earthquakes // *Phys. Rev. Lett.* 1992. Vol.68. P.1244–1247.
20. *Gabrielov A.* Abelian avalanches and Tutte polynomials // *Physica A.* 1993. Vol.195. P.253–274.
21. *Gabrielov A., Newman W.I., Knopoff L.* Lattice models of failure: Sensitivity to the local dynamics // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol.50 (1). P.188–197.