

УДК 550.341

## О ПРОГНОЗЕ В ДВУЗНАКОВОЙ МОДЕЛИ ЛАВИН

А.Б. Шаповал, М.Г. Шнирман

Международный институт теории прогноза землетрясений  
и математической геофизики Российской академии наук, Москва, Россия

Изучается проблема прогноза в двузнаковой модели лавин. При симметричных условиях эволюции неконсервативная система может обладать длительными периодами одной полярности и быстрыми переворотами. С помощью предвестников, известных из теории землетрясений, удастся предсказывать перевороты с определённой точностью. Качество прогноза определяется в терминах диаграммы ошибок и функции потерь. Объединение предвестников приводит к прогнозу, более устойчивому по отношению к пороговым значениям предвестников.

## PREDICTION IN A TWO-SIGN AVALANCHE MODEL

A.B. Shapoval, M.G. Shnirman

International Institute of Earthquake Prediction Theory  
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

A prediction in a two-sign avalanche model is investigated. Even if evolutionary rules are symmetrical, a non-conservative system may have long periods of one polarity and quick reversals. Precursors derived from earthquake theory allow to predict reversals with certain confidence. The quality of the precursors is specified in terms of an error diagram and the loss function. Combinations of the precursors lead to more stable prediction with respect to their threshold values.

### Введение

Согласно палеомагнитным исследованиям, магнитное поле Земли время от времени меняет свою полярность. Периоды одной полярности называются хронами. Продолжительность хронов различна для разных геологических эпох [1]. Она колеблется от ста тысяч до нескольких миллионов лет. Изменения полярности называются переворотами. Длительность переворотов имеет характеристический масштаб в несколько тысяч лет, что значительно меньше длительности хронов.

Используемая в этой статье модель имитирует хроны и перевороты. В ее основе лежит известная модель “падающего песка” (sand-pile в англо-язычной литературе), впервые описанная в [2,3].

В настоящей работе ставится задача прогноза переворотов. Для модели определяется понятие события и изучается каталог событий. Перевороты оказываются связанными с крупнейшими событиями. Таким образом, прогноз переворотов становится прогнозом крупнейших событий на базе изучения событий меньшего размера. Сложившаяся ситуация почти в точности аналогична ситуации в сейсмичности, где прогноз сильнейших землетрясений на базе каталогов землетрясений является задачей исключительной важности [4]. Работы В.И. Кейлис-Борока и его школы [5,6] в этой области являются как наиболее успешными, так и наиболее прозрачными. Интересными представляются вопросы: насколько общими являются предвестники землетрясений, введенные в работах [7,8]? Можно ли считать эти предвестники проявлением универсальных симптомов неустойчивости в системах с большим числом степеней свободы,

описанных в [7, 8]. Эффективность предвестников была установлена для модели взаимодействующих каскадов [9, 10]. Ниже мы рассмотрим вопрос об эффективности предвестников в применении к нашей модели.

Итак, укажем схему прогноза сильнейших событий в каталоге. На каталоге определяется некоторый функционал, называемый предвестником. При определенных значениях предвестника объявляется тревога, т.е. прогноз переворота в течение некоторого промежутка времени.

Каждое правило объявления тревог, или – что то же самое – каждый предвестник, оценивается двумя величинами: длительностью тревог и пропусками цели. Пропуском цели называется ситуация, в которой переворот произошел, будучи непредсказанным. Доля суммарного времени тревог от всего рассматриваемого интервала времени обозначается  $\tau$ , а доля пропусков цели от всех переворотов обозначается  $n$ . Правило объявления тревоги выбирают так, чтобы минимизировать функцию потерь  $L(n, \tau)$  [11]. Ее простейший вид

$$L(n, \tau) = l_n n + l_\tau \tau, \quad (1)$$

где  $l_n$  – убыток от пропуска цели;  $l_\tau$  – убыток от тревоги. Тривиальное рассуждение показывает, что, если тревога объявлена во время всего интервала времени, то  $n = 0$  и  $L(n, \tau) = l_\tau$ . Аналогично, если тревога ни разу не объявлялась, то  $\tau = 0$  и  $L(n, \tau) = l_n$ .

Каталог называется прогнозируемым, если при некотором правиле объявления тревог  $L(n, \tau) < \min\{l_n, l_\tau\}$ . Любой предвестник, при котором каталог прогнозируем, назовем информативным. Для простоты положим  $l_n = l_\tau = 1$ . Чтобы сравнить два различных предвестника, достаточно сравнить соответствующие значения функции  $L$ .

Можно показать, что полученный искусственный каталог повторяет некоторые важные свойства реального каталога землетрясений. Среди них – степенной закон графика повторяемости; активность, предшествующая самым крупным событиям; иной наклон графика повторяемости во время этой активности. Перечисленные факты для реальных каталогов приведены, например, в работе [12]. Предвестники, основанные на указанных свойствах, могут оказаться полезными на практике.

Правила объявления тревог применяются к каталогу, из которого предварительно были удалены афтершоки. Согласно [13, 14], афтершоки некоторого события  $X$  каталога – это события, следующие за  $X$  по оси времени, которые по группируемости в пространстве-времени выделяются на фоне остальных событий. Четкое статистическое определение афтершоков приведено в статье [15]. В нашем случае события не имеют пространственной координаты. Поэтому для простоты назовем афтершоком любое событие, произошедшее в течение некоторого фиксированного времени после переворота.

Качественное описание модели проводится в разделе 1; точные формулы будут опубликованы в работе [16]. В разделе 2 установлено, что модельный каталог прогнозируем. Наиболее информативным найденным для него предвестником является загиб вверх графика повторяемости перед переворотом. Предвестник определен аналогично работе [17]. Другие информативные предвестники – сумма размеров событий, средняя сумма магнитуд [5, 18, 19], взрыв афтершоков достаточно больших событий [20]. Все они вычисляются в скользящем временном окне. В разделе 3 исследована связь предвестников друг с другом и их взаимодополняемость. Получено, что предвестники загиб графика повторяемости, сумма размеров событий и средняя магнитуда плохо дополняют друг друга потому, что они основаны на похожих свойствах каталога. Наоборот, предвестник взрыв афтершоков удачно дополняет каждый из перечисленных предвестников и улучшает прогноз. Обзор полученных результатов приведен в заключении.

## 1. Краткое описание модели

Здесь приведено качественное описание модели, она определена полностью в работе [16]. Идеи построения восходят к двумерной модели Бака о накоплении “песка”, которая демонстрирует самоорганизующуюся критичность. Обзор моделей с самоорганизующейся критичностью дан, например, в работах [21, 22].

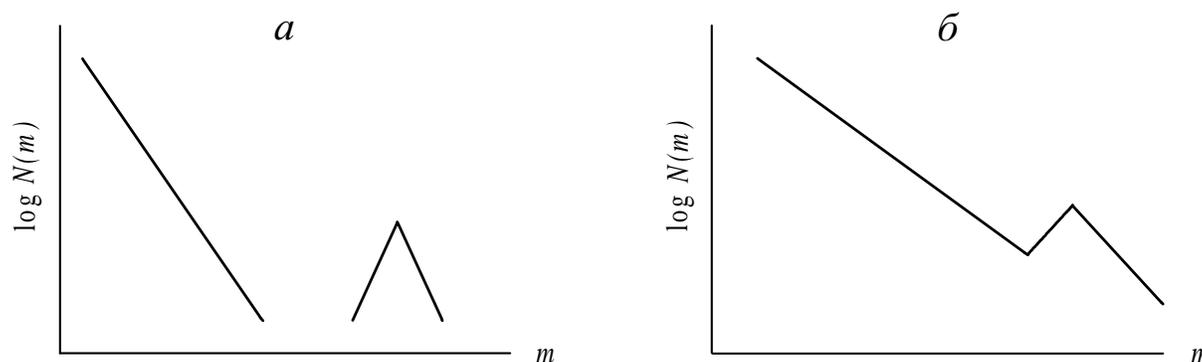
В данном случае квадратная решетка размера  $R \times R$ , где  $R \in N$ , накапливает возмущение, которое бывает положительным и отрицательным. В каждый момент дискретного времени в выбранную случайным образом клетку добавляется единица возмущения – число  $+1$  или число  $-1$ . Если возмущение в клетке достигает некоторого положительного (отрицательного) порога  $H$  (соответственно,  $-H$ ), то происходит перераспределение возмущения. Две клетки называются соседними, если они имеют общую сторону. Клетка, достигшая порога  $H$  ( $-H$ ), теряет четыре положительные (отрицательные) единицы, а соседние клетки получают в среднем  $4c$  (соответственно,  $-4c$ ) единиц,  $c > 0$ . Количество получаемых единиц возмущения определяется случайной величиной, принимающей целые значения, с заданным математическим ожиданием  $4c$ . Число  $c$  называется коэффициентом неконсервативности. Если достигшая порог клетка находится на краю решётки, то соседние клетки получают в среднем  $\pm 3c$  единицы возмущения (для угловых клеток –  $\pm 2c$ ). В результате перераспределения одна или несколько новых клеток решетки могут достичь порога, тогда происходят новые перераспределения по указанному правилу. Перераспределения прекращаются, когда во всех клетках решетки окажутся числа, по модулю не превосходящие  $H$ .

Событием называется только что описанная последовательность перераспределений, а его размером – количество перераспределений. Часто вместо размера события используется его магнитуа, это десятичный логарифм размера. Событие, начавшееся с добавления  $+1$ , называется положительным, а с добавления  $-1$  – отрицательным.

Свойства модели описываются в терминах событий характеристического размера. Рассмотрим выборку, состоящую из  $n$  событий, где  $n$  достаточно велико. События из выборки называются событиями характеристического размера, если

- их размер имеет один порядок;
- они образуют “шапочку” на графике повторяемости.

Стандартная схема графика повторяемости изображена на рис. 1. События характеристического размера образуют “шапочку” в правой части графика.



**Рис. 1.** Схема графика повторяемости

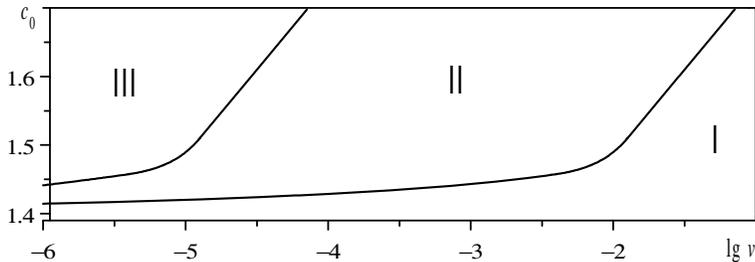
События характеристического размера удалены (а) и не удалены (б) от остальных событий;  
 $N(m)$  – количество событий магнитуды  $m$

Приведем основные свойства модели [16]. Если коэффициент неконсервативности  $c$  не меняется во времени, то существует число  $c_0$ , обладающее следующими свойствами:

- 1) при  $c < c_0$  не существует событий характеристического размера;
- 2) при  $c > c_0$  происходит событие бесконечного размера, т.е. в некоторый момент времени перераспределения не прекратятся.

Результат принципиально иной в случае переменной функции  $c = c^\rho(t)$ , где  $t$  – время, а  $\rho$  – номер перераспределения, произошедшего в этот момент времени. Фиксируются два параметра: начальное значение коэффициента неконсервативности  $c_0$  и скорость его изменения  $v$ . Предполагается, что  $c^0(0) = c_0$  и  $c^{\rho+1}(t) = c^\rho(t) \pm v$ ,  $t \in N$ . Знак в последней формуле отри-

пателен, если суммарное возмущение в клетках, соседних с достигшей порога клеткой имеет знак события, и наоборот. Начальное значение  $c^0(t)$ ,  $t \geq 1$ , для текущего события совпадает (симметрично относительно  $c_0$ ) с полученным значением коэффициента неконсервативности во время предыдущего события, если знак обоих событий совпадает (соответственно, различен).



**Рис. 2.** Фазовая диаграмма: в области I события характеристического размера не имеют места, в области III они существуют и соответствуют переворотам суммы элементов решетки. Область II является промежуточной

При определенных условиях на  $c^0(t)$  существует область параметров, при которых не происходят события характеристического размера, и область параметров, при которой эти события имеют место; на рис.2 они обозначены I и III, соответственно. Область III характеризуется внезапной потерей симметрии у системы, несмотря на симметричность условий добавления положительных и отрицательных возмущений. Симметрия системы понимается в терминах функции  $s(t)$  – суммы всех возмущений решетки в момент времени  $t$ . Частые соизмеримые по величине колебания вокруг нуля функции  $s(t)$  определяют симметрию. В случае потери симметрии  $s(t)$  имеет долгие периоды знакопостоянства, на которых  $|s(t)| \gg 1$ , и быстрые перевороты. Перевороты происходят в результате событий характеристического размера. Указанные области параметров разделены двумерной подобластью. Ей соответствует наличие событий характеристического размера, которые не всегда приводят к переворотам функции  $s(t)$ .

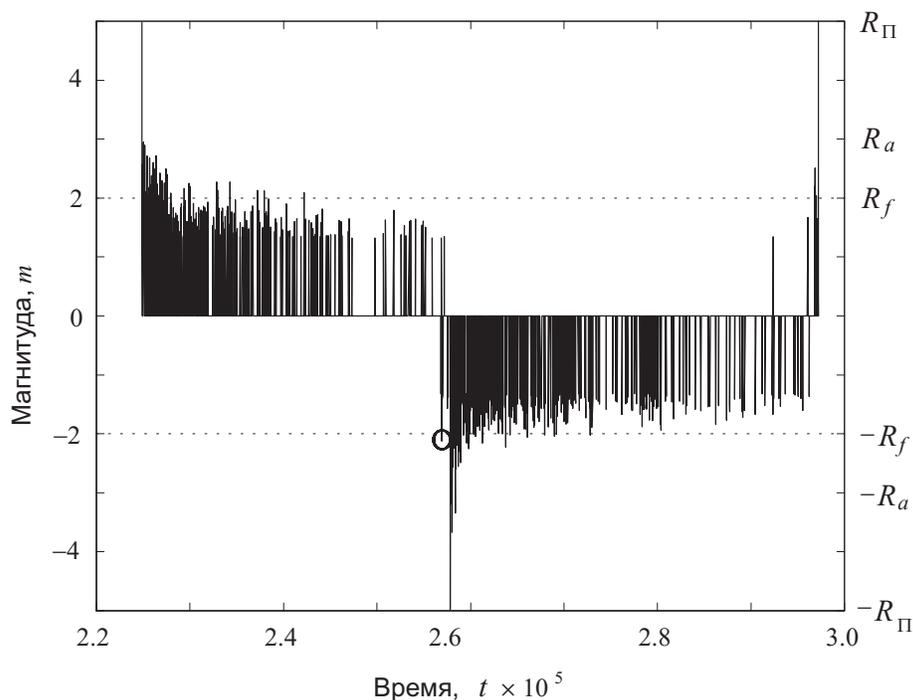
## 2. Предвестники

Задача прогноза переворотов модельного каталога ставится при параметрах, лежащих в области III фазовой диаграммы, приведенной на рис.2. Определены предвестники – “сумма размеров”, “средняя магнитуда”, “загиб” и “взрыв афтершоков”, известные из теории сейсмичности. Для каждого предвестника приведена диаграмма ошибок и график зависимости функции потерь от порогового значения.

Естественным способом прогноза является предсказание “на глаз”. В данном случае анализ каталога показывает (рис.3), что в течение некоторого времени после переворота (для определенности положительного, т.е.  $s(t)$  меняет знак с  $-$  на  $+$ ) происходят события достаточно большого размера  $R_a$ , имеющие знак последнего переворота. С течением времени эти события происходят все реже и реже, а их размер уменьшается. Затем они практически исчезают. Итак, размер и частота всех положительных событий падает до некоторого уровня. События противоположного знака крайне редки, а их размер очень мал. Далее, отрицательные события становятся все заметнее. Наконец, происходит достаточно большое отрицательное событие  $X_-$ . Оно заметно выделяется из общего потока событий, но его размер  $R_f$  значительно меньше, чем  $R_a$ . Обозначив  $R_0$  порядок размера фоновых событий,  $R_{II}$  – характеристический размер, получим

$$R_0 \ll R_f \ll R_a \ll R_{II}.$$

Через некоторое время после события  $X_-$  имеет место отрицательное событие характеристического размера. Затем вся описанная схема повторяется с точностью до перемены знака.



**Рис. 3.** Фрагмент каталога: показаны события магнитуды, большей, чем 1.3. Событие  $X_- = (2.569 \times 10^5, -2.1)$  обведено кружком;  $R_0 = 10$ ,  $R_f = 10^2$ ,  $R_a = 10^3$ ,  $R_\Pi = 10^5$

Итак, предсказание “на глаз” очевидно. Предсказателю следует пропустить события размера  $R_a$ , а также некоторое затишье. Затем увидеть появления активности другого знака. После события размера  $R_f$  объявить тревогу. Тревога длится, пока не происходит событие характеристического размера, но не более некоторого фиксированного, достаточно большого интервала времени. Предположим, что описание каталога точно, и, следовательно, пропусков цели практически нет. Тогда доля тревог  $\tau$  меньше, чем 0.1 (см. рис. 3).

Естественно, что на самом деле сделанное описание каталога весьма условно и, главное, математически нечетко. Нужно количественно задать  $R_f$  и  $R_a$ . Кроме того, оказывается не всякому событию характеристического размера предшествуют событие размера порядка  $R_f$  (каким бы ни было  $R_f$ !) и (или) общая активность. Поэтому численная характеристика прогноза ухудшится, хотя прогноз и остается информативным.

Сразу оговорим, что все рассмотренные в статье алгоритмы прогноза применяются к каталогу, из которого удалены афтершоки. В силу простоты модели мы называем афтершоком любое событие, происшедшее в течение некоторого фиксированного времени  $T$  после переворотов. Естественно, что в реальности необходимы значительно более тонкие методы (см. [15]). Далее, говоря о каталоге, мы будем подразумевать каталог без афтершоков при  $T = 0.5 \times 10^4$ .

События модельного каталога, так же как и каталога хронов, естественным образом имеют знак. Вместе с тем мы ставим задачу применимости рассматриваемых методов в теории прогноза землетрясений, где понятие знака события не определено<sup>1</sup>. Поэтому применяемые алгоритмы используют беззнаковый каталог. Отказ от информации о знаке события приводит к ухудшению прогноза.

Естественная попытка численно описать активность, предшествующую перевороту, – это подсчет суммы  $\sigma(t)$  размеров всех событий, имевших место в скользящем временном окне  $[t - T_\sigma, t]$ , где  $T_\sigma$  – длина скользящего окна [18]. Этот предвестник имеет название – “сумма

<sup>1</sup> Не исключено, что знак землетрясения может интерпретироваться как направление подвижки в очаге, но это не является предметом нашего исследования.

размеров”. Пороговое значение суммы  $\sigma(t)$  обозначается через  $\sigma_0$ . Тревога объявляется в момент  $t$ , если  $\sigma(t) > \sigma_0$ , и продолжается до момента  $t + 1$ . График зависимости  $\tau$  от  $n$ , заданной параметрически как  $\tau = \tau(\sigma_0)$ ,  $n = n(\sigma_0)$ , называется диаграммой ошибок. Диаграмма ошибок предвестника “сумма размеров” и зависимость функции потерь  $L$  от порога  $\sigma_0$  показаны на рис. 4 и 5. Видно, что предвестник “сумма размеров” является информативным, хотя и далек от прогноза “на глаз”.

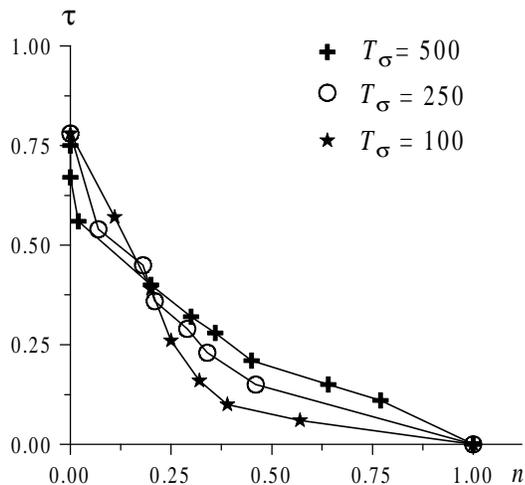


Рис. 4. Диаграмма ошибок предвестника “сумма размеров” при трех длинах  $T_\sigma$  скользящего окна

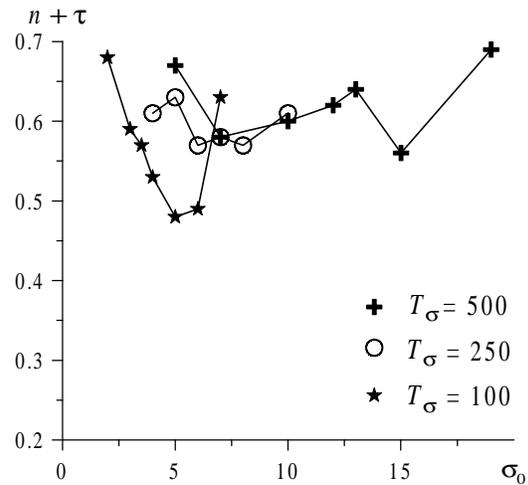


Рис. 5. Функция потерь предвестника “сумма размеров” при трех длинах  $T_\sigma$  скользящего окна

Идейно похожим на только что рассмотренный является предвестник “средняя магнитуда” [19]. Здесь в скользящем окне  $[t - T_m, t]$  длины  $T_m$  вычисляется средняя магнитуда  $\bar{m}(t)$  происшедших событий, у которых магнитуда не меньше некоторого  $m_0$ . Тревога в момент  $t$  объявляется, если  $\bar{m}(t) > M_0$ , где  $M_0$  – некоторый порог. Диаграмма ошибок предвестника “средняя магнитуда” и зависимость функции потерь от порога  $M_0$  приведены на рис. 6 и 7. Предвестник “средняя магнитуда” заметно лучше предыдущего, но также далек от идеального.

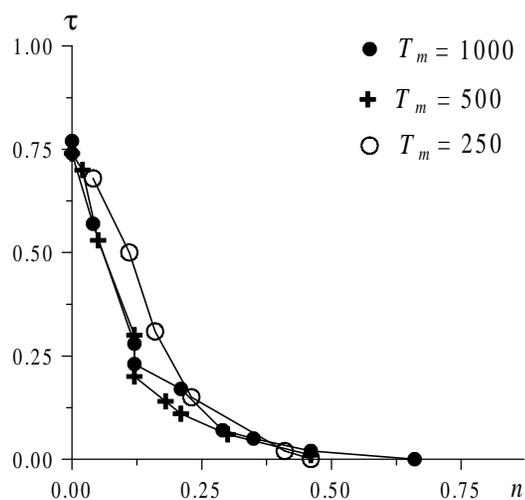


Рис. 6. Диаграмма ошибок предвестника “средняя магнитуда” при трех длинах  $T_m$  скользящего окна;  $m_0 = 1.3$

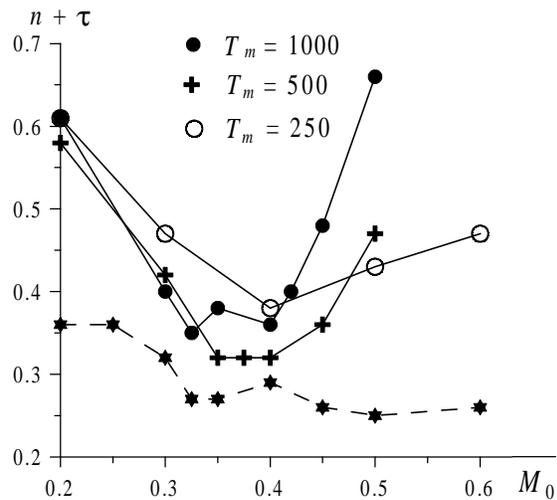


Рис. 7. Функция потерь предвестника “средняя магнитуда” при трех длинах  $T_m$  скользящего окна (сплошные линии) и функция потерь объединения предвестников “загиб”, “средняя магнитуда” и “взрыв афтершоков”, зависящая от порога  $M_0$  при  $T_m = 500$  (штриховая линия)

Одним из информативных предвестников является загиб вверх графика повторяемости перед переворотом [17]. Далее этот предвестник для краткости будет именоваться “загиб”. Он особенно чувствителен к наличию одного или нескольких событий размера  $R_f$ . Предвестник “загиб” тестирован в ретроспективном прогнозе землетрясений для ряда регионов [23]. Ниже описан алгоритм, отличающийся от примененного в [17], но основанный на тех же идеях.

Количество событий  $N = N(m)$  магнитуды  $m$  хорошо аппроксимируется функцией  $f(m) = Ct^{-\beta}$ , где  $C > 0$  – некоторая константа, а  $\beta > 0$  подбирается так, чтобы достичь наилучшей аппроксимации (рис.8). Этот факт согласуется с законом Гутенберга–Рихтера о степенной зависимости количества землетрясений от магнитуды.

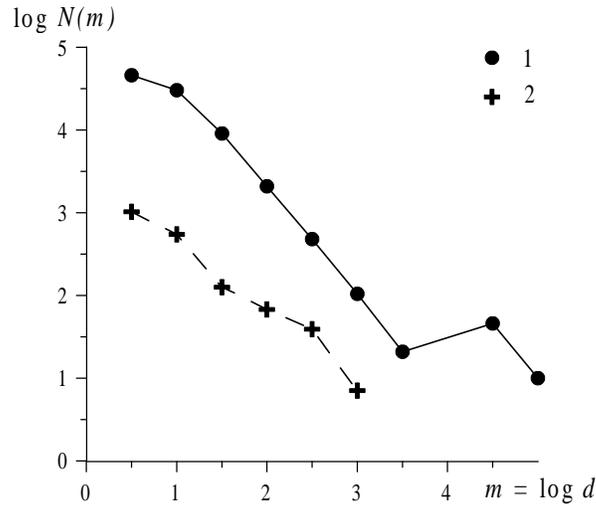


Рис. 8. График повторяемости в области параметров III

1 – все события, 2 – события во время активности, предшествующей переворотам

Рассмотрим достаточно малые интервалы времени некоторой длины  $T_A$ , предшествующие переворотам – на них проявляются существенные отклонения от функции  $f(m)$ . Запишем отклонения количественно. Объединение интервалов длины  $T_A$ , предшествующих переворотам, обозначается через  $I_p$ , а полная длина каталога через  $I$ . Обозначим через  $N_-(m)$  – число событий магнитуды  $m$ , имевших место во время  $I \setminus I_p$ . Зафиксируем некоторые положительные числа  $m_0$  и  $m_f$ ,  $m_0 < m_f$ . Естественно положить  $m_f = \log_{10} R_f$ . Пусть  $N_t(m)$  при  $t > T_A$  и  $m < m_f$  – число событий магнитуды  $m$ , произошедших за время  $[t - T_A, t]$ . При  $m \geq m_f$  положим, что  $N_t(m)$  равно числу событий магнитуды не меньшей  $m_f$ , произошедших за время  $[t - T_A, t]$ . Нормируем функцию  $N_-(m)$ , разделив ее на константу  $N_-(m_f)$  (если последняя не равна нулю). Положим  $y_t(m) = \log_{10} (N_-(m) + N_t(m))$ .

Методом наименьших квадратов подберем коэффициенты  $a_1, a_2$  и  $A$  так, чтобы функция

$$-a_1 m + a_2 + Ae^{\alpha m},$$

(где  $\alpha$  – некоторое положительное фиксированное число) приближала  $y_t(m)$  на интервале  $[m_0, m_f]$  наилучшим образом. Фиксируется некоторое пороговое значение  $A_0$  параметра  $A$ , который является численным выражением, определяющим загиб графика повторяемости. Тревога в момент времени  $t$  объявляется в случае, если  $A = A(t) > A_0$ . Тревога длится на интервале  $[t, t + 1)$ . Затем значение  $A$  пересчитывается.

Рис. 9 и 10 показывают диаграмму ошибок и функцию потерь предвестника “загиб”. Из рис. 10 видно, что близкие к минимуму значения функции  $n(A) + \tau(A)$ , лежащие на интервале  $[0.25, 0.3]$ , достигаются на большом диапазоне параметра  $A$ .

Определение предвестника “взрыв афтершоков” принципиально отличается от предыдущих. Зафиксируем некоторые числа  $m_1, m_2, m_3$ , такие, что  $0 < m_1 < m_2 < m_3, m_3 \simeq m_f$ . Назовем события, магнитуды которых лежат на интервале  $[m_2, m_3]$ , толчками. Зададим некоторые  $T_\nu$  и  $T_a$ , где  $0 < T_a \leq T_\nu$ . Пусть  $X$  – некоторый толчок магнитуды  $m_X$ , происшедший в момент  $t_X$ .

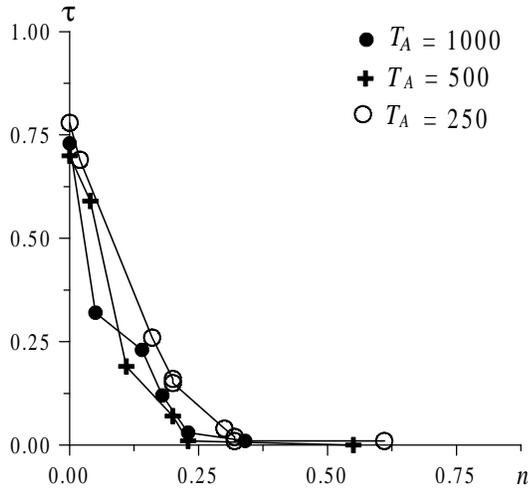


Рис. 9. Диаграмма ошибок предвестника “загиб” при трех длинах  $T_A$  скользящего окна,  $\alpha = 0.7$

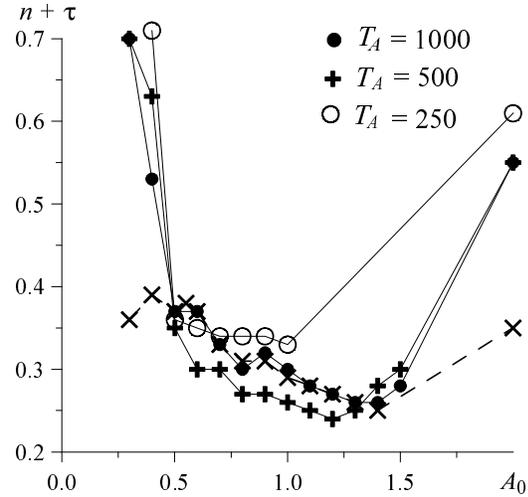


Рис. 10. Функция потерь предвестника “загиб” при трех длинах  $T_A$  скользящего окна,  $\alpha = 0.7$  (сплошные линии) и функция потерь объединения предвестников “загиб”, “средняя магнитуда” и “взрыв афтершоков” при  $T_A = 1000$  (штриховая линия)

Если на интервале  $[t_X, t_X + T_a]$  толчок  $X$  является единственным, то его афтершоком назовем любое событие магнитуды  $m \in [m_2, m_X]$ , имевшее место на этом временном интервале. В противном случае, пусть следующий после  $X$  толчок  $Y$  произошел в момент времени  $t_Y \in [t_X, t_X + T_a]$ . Тогда афтершоком толчка  $X$  назовем любое событие магнитуды  $m \in [m_2, m_X]$ , имевшее место на интервале  $[t_X, t_Y]$  (см. [20]).

Пусть  $\nu(t)$  равно числу таких афтершоков толчков, которые произошли на интервале  $[t - T_\nu, t]$ . В момент  $t$  объявляется тревога, если  $\nu(t)$  больше некоторого порогового значения  $\nu_0$ . Диаграмма ошибок  $(n, \tau)$  и зависимость суммы  $n(\nu_0) + \tau(\nu_0)$  от порога  $\nu_0$  показаны на рис. 11 и 12.

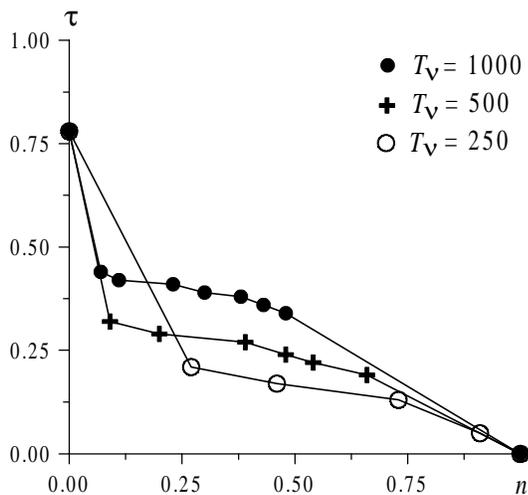


Рис. 11. Диаграмма ошибок предвестника “взрыв афтершоков” при трех длинах  $T_\nu$  скользящего окна и  $T_a = T_\nu$ ;  $m_1 = 0.5$ ,  $m_2 = 1.5$ ,  $m_3 = 2$

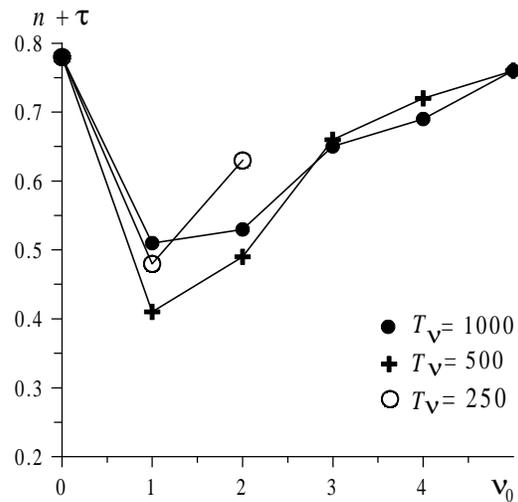


Рис. 12. Функция потерь предвестника “взрыв афтершоков” при трех длинах  $T_\nu$  скользящего окна и  $T_a = T_\nu$ ;  $m_1 = 0.5$ ,  $m_2 = 1.5$ ,  $m_3 = 2$

### 3. Сравнительный анализ предвестников

Изучаемые предвестники были представлены в разделе 2. Ниже обсуждаются их положительные и отрицательные стороны с точки зрения прогноза. Исследуются попытки объединения полученных предвестников. При объединении прогноз может, вообще говоря, как улучшиться, так и ухудшиться.

Предположим, что функция  $\sigma(t)$ , соответствующая предвестнику “сумма размеров”, возрастает на интервале  $[t - T_\sigma, t]$ , где  $T_\sigma > 0$  – длина скользящего окна. Функция  $\bar{m}(t)$ , вычисленная на интервале  $[t - T_\sigma, t]$ , растёт, если и только если увеличение суммы размеров достигается за счет одиночных событий достаточно большого размера, а не большого числа событий меньшего размера. Например, если на рассматриваемом интервале произошли два события размера  $x$ , то  $\bar{m} = \log_{10} x$ , а если произошло одно событие размера  $2x$ , то  $\bar{m} = \log_{10} 2x > \log_{10} x$ . Умение различать количество событий, внесших вклад в  $\sigma(t)$ , приводит к тому, что предвестник “средняя магнитуда” заметно информативнее предвестника “сумма размеров” в терминах функции  $L(n, \tau)$  (см. рис. 6 и 8).

Предвестник “загиб”, как и только что рассмотренные предвестники, чувствителен к событиям размера  $R_f$ , определенного в разделе 2. Он, как и предвестник “средняя магнитуда”, учитывает возможность большого разброса в размере самых больших событий, предшествующих перевороту.

Предвестник “загиб” информативнее предвестника “средняя магнитуда” в смысле функции потерь  $L(n, \tau)$ . Одна из причин состоит в том, что загиб графика повторяемости, задаваемый функцией  $A(t)$ , увеличивается при росте количества мелких по величине событий и уменьшается при увеличении количества средних. Заметим, что указанные изменения  $A(t)$  заметны при отсутствии событий магнитуды  $m_f$  и больше. Лучшая информативность предвестника “загиб” по сравнению с предвестником “средняя магнитуда” прогноза может свидетельствовать о том, что первая возможность реализуется чаще второй перед переворотами.

Основную роль в трех перечисленных предвестниках играло ожидание события размера  $R_f$  перед переворотами. Поэтому длину скользящего окна естественно выбрать достаточно малой, но так, чтобы ожидаемое предшествующее событие и переворот могли быть в него вложены одновременно. Естественно, что именно при такой длине скользящего окна каждый предвестник имеет наилучший результат прогноза.

Исследуем возможные объединения предвестников. Пусть фиксированы некоторые  $k > 1$  предвестников и соответствующие им правила объявления тревог. Их  $m$ -объединением назовем предвестник, которому соответствует следующее правило. В момент времени  $t$  объявляется тревога на интервале  $[t, t + 1)$ , если и только если она объявляется согласно хотя бы  $m$  из зафиксированных правил. Здесь  $m$ ,  $1 \leq m \leq k$ , – некоторая константа, определяющая количество предвестников, “голосующих” за тревогу.

Пусть  $P_\sigma$ ,  $P_m$  и  $P_A$  – множества успешно предсказанных переворотов предвестниками “сумма размеров”, “средняя магнитуда” и “загиб”, соответственно, при одинаковом  $\tau$ . Так как эти предвестники основаны на похожих свойствах каталога, то множества переворотов  $P_\sigma$ ,  $P_m$  и  $P_A$  почти полностью вкладываются одно в другое:

$$P_\sigma \subseteq P_m \subseteq P_A. \quad (2)$$

Вложения неполные, но, чтобы сделать формулу (2) справедливой, нужно отбросить из каталога часть переворотов – малую, по сравнению с их общим числом. Следовательно, 2-объединение любой пары из трех рассмотренных предвестников не делает прогноз информативнее.

Вообще говоря, имеет смысл объединять предвестники при разных порогах и (или) длинах скользящих окон. В данном случае ввиду плохой дополняемости предвестников естественно их объединять самих с собой. Аналогичная идея применена, например, в алгоритме M8 [5].

Предвестник “взрыв афтершоков” принципиально отличается от рассмотренных выше предвестников. Он приносит хорошие результаты, если перед переворотами и только перед ними происходят одно или несколько событий, имеющих размер больший, чем фон, с сериями собственных афтершоков. Так как  $R_f$  на порядок превосходит размер фона, то в качестве события, у которого исследуются афтершоки, может выступать как событие размера  $R_f$ , так и более мелкие события. Также возможно, что после события размера  $R_f$  произошло событие меньшего, чем  $R_f$ , размера, но большего, чем фон. Тогда количество его афтершоков подсчитывается функцией  $\nu(\cdot)$ . Итак, достоинством алгоритма является его чувствительность к любым событиям, выделяющимся над фоном, которые обладают афтершоками и, следовательно, возможность его применения при малых по длине скользящих окнах. А основные недостатки алгоритма – необязательное наличие серии афтершоков у достаточно больших событий, предшествующих переворотам, и существование достаточно больших событий, имеющих афтершоки в далекое от переворотов время.

Согласно сделанному анализу, предвестник “взрыв афтершоков” использует некоторые другие свойства каталогов по сравнению с предвестниками “сумма размеров”, “средняя магнитуда” и “загиб”. Значит, он может сделать любой из этих предвестников информативнее, объединившись с ним.

Понятно, что объединение двух предвестников может показывать их хорошую или плохую дополняемость, но не приводит к оптимальному численному результату, потому что количество  $m$  предвестников, голосующих за тревогу, может быть слишком мало при  $m = 1$  и слишком велико при  $m = 2$ . Уже при  $k = 3$  возникает бóльшая свобода выбора  $m$ . Поэтому естественно объединять предвестник “взрыв афтершоков” с парой других предвестников. Пусть число  $m$ , “голосующих” за тревогу, равно 2. Таким образом рассматриваются 2-объединения предвестников при  $k = 3$ .

Значения порогов при  $m$ -объединении  $k$  предвестников имеет смысл фиксировать как близко, так и далеко от оптимальных значений, полученных для одиночных предвестников. В данном случае порог  $\nu_0$  предвестника “взрыв афтершоков” фиксируется в точке, которой соответствует минимум функции  $L(n, \tau)$  данного предвестника. Рассмотрены две возможности: первая – фиксируется порог  $M_0$  предвестника “средняя магнитуда”, а порог  $A_0$  переменный; вторая – фиксируется порог  $A_0$ , а  $M_0$  меняется. В обоих случаях зафиксированный порог отвечает точке с малым  $\tau$  на  $(n, \tau)$ -диаграмме, полученной для соответствующего предвестника. На рис. 13 дана диаграмма ошибок для обоих указанных случаев 2-объединения предвестников.

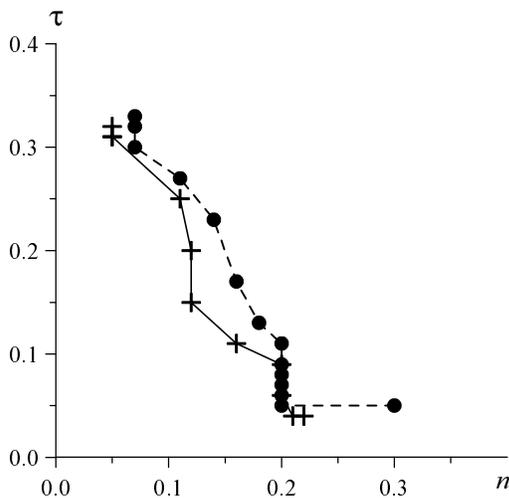


Рис. 13. Диаграмма ошибок объединения предвестников при  $\nu_0 = 1$  и переменном  $A_0$  (точки), при  $A_0 = 1.3$  и переменном  $\nu_0$  (крестики)  
 $T_m = 500$ ,  $T_\nu = 500$ ,  $T_A = 1000$ ,  $M_0 = 0.45$

Из рис. 10 и 13 видно, что при фиксированном пороге  $M_0$  результаты 2-объединения предвестников практически совпадают с результатами предвестника “загиб” в достаточно большой области значений  $A_0$ .

В то же время, если порог  $A_0$  фиксирован указанным выше способом, то  $L(n(\nu_0), \tau(\nu_0))$  2-объединения трех предвестников лежит ниже функции потерь  $L(n(\nu_0), \tau(\nu_0))$  одиночного предвестника “средняя магнитуда” (см. рис.8) при той же длине скользящего окна. Более того, при фиксированном  $A_0$  минимум функции потерь 2-объединения трех предвестников оказывается наименьшим по сравнению с полученными ранее минимумами. Далее, на диаграмме ошибок рис. 13 график второй возможности 2-объединения (порог  $M_0$  переменный) лежит под другими графиками в области малых  $n$ . Следовательно, такое 2-объединение также делает прогноз информативнее в случае, если убыток  $l_n$  больше, чем  $l_\tau$  в формуле (1).

Итак, 2-объединение трех предвестников повышает информативность прогноза в терминах функции потерь  $L(n, \tau)$  и делает его более устойчивым (см. рис.7, 10) относительно порогов. Наилучшие результаты достигаются, если пороги лежат в такой области, что одиночным предвестникам соответствуют малое время тревог при не очень частых пропусках цели.

Все исследованные предвестники возникли в теории землетрясений и применяются прежде всего именно в ней [5, 18, 20, 23]. Для адаптации их к данному искусственному каталогу и улучшения числового результата прогноза нужно учитывать не только размер событий, но также их знак. Например, предвестник “загиб” дает лучшие результаты, если

- при вычислении  $N_t(m)$  выбирать только те события магнитуды  $m$ , которые имеют знак прогнозируемого переворота;
- тревогу объявлять не в момент времени  $t$ , для которого  $A(t) > A_0$ , а в более поздний момент  $t + \Delta$ , где  $\Delta > 0$  фиксируется наилучшим образом.

## Заключение

При некоторых значениях параметров двузнаковая модель типа классической модели Бака приводит к внезапной потере симметрии. Сумма элементов решетки имеет долгие периоды знакопостоянства и быстрые перемены знака, называемые переворотами. Эта схема соответствует переменам полярности магнитного поля Земли.

Полученный модельный каталог прогнозируем в терминах функции убытка. Исследованы информативные предвестники: “сумма размеров”, “средняя магнитуда”, “загиб” и “взрыв афтершоков”. Первые три предвестника плохо дополняют друг друга. Их объединение увеличивает  $L(n, \tau)$ . Предвестник “взрыв афтершоков”, напротив, хорошо дополняет любой из перечисленных предвестников.

Прогноз может быть улучшен за счет рассмотрения нескольких предвестников одновременно. В статье определен предвестник, являющийся  $m$ -объединением  $k$  предвестников,  $m \leq k$ . Соответствующая ему функция потерь достигает минимума, несколько меньшего, чем функции потерь одиночных предвестников. Полученный минимум устойчив. Функция потерь близка к своему минимальному значению в большой области значений порогов. Последнее свойство не имеет места для одиночных предвестников. Можно также ожидать, что, если при определении функции потерь формулой (1) взять отличные от 1 числа  $n$  и  $\tau$ , то  $m$ -объединение  $k$  предвестников окажется лучшим предвестником, чем каждый из  $k$  предвестников в отдельности.

Мы не ставим перед собой цель получить минимум функции убытка за счет регулирования параметров алгоритмов прогноза. Приведенные рассуждения и графики позволяют сравнивать предвестники между собой.

Рассмотренные предвестники применяются в прогнозе землетрясений. То, что они достаточно эффективны в модели, предназначенной для совершенно иного явления, дает лишний аргумент в пользу идеи универсальности симптомов неустойчивости систем с большим числом степеней свободы. Между тем, такие предвестники, так же как и данная модель, могут оказаться полезными при изучении переворотов магнитного поля Земли. Нельзя исключать также то, что используемые в сейсмичности предвестники достаточно универсальны и применимы и в других областях – например, в экономике и финансах.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Merrill R.T., McElhinny M.W., McFadden P.L.* The magnetic field of the Earth // San Diego: Academic, 1996. 531 p.
2. *Bak P., Tang C.* Earthquakes as a self-organized critical phenomenon // J. Geophys. Res. 1989. Vol.94. P.15635–15637.
3. *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* Self-organized criticality // Phys. Rev. A. 1988. Vol.38. P.364–374.
4. *Keilis-Borok V.I.* Intermediate-term earthquake prediction // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1996. Vol.93. P.3748–3755.
5. *Keilis-Borok V.I., Kossobokov V.G.* Preliminary activation of seismic flow: Algorithm M8 // Phys. Earth Planet. Inter. 1990. Vol.61. P.73–83.
6. *Keilis-Borok V.I., Rotwain I.M.* Diagnosis of time of increased probability of strong earthquakes in different regions of the world: algorithm CN // Phys. Earth Planet. Inter. 1990. Vol.61. P.57–72.
7. *Кейлис-Борок В.И., Кособок В.Г.* Комплекс долгосрочных предвестников для сильнейших землетрясений мира // Землетрясения и предупреждение стихийных бедствий. 27-й Междунар. геол. конгр., 4–14 августа 1984 г., Москва. М.: Наука, 1984. С.56–66. (Коллоквиум С.6; Т.61.).
8. *Аллен К, Кейлис-Борок В.И., Кузнецов И.В., Ротвайн И.М., Хаттен К.* Долгосрочный прогноз землетрясений и автомодельность сейсмических предвестников // Достижения и проблемы современной геофизики. М.: ИФЗ АН СССР, 1984. С.152–165.
9. *Gabrielov A.M., Keilis-Borok V.I., Zaliapin I.V., Newman W.I.* Critical transitions in colliding cascades // Phys. Rev. E. 2000. Vol.62. P.237–249.
10. *Gabrielov A.M., Zaliapin I.V., Newman W.I., Keilis-Borok V.I.* Colliding cascade model for earthquake prediction // Geophys. J. Inter. 2000. Vol.143. P.427–437.
11. *Молчан Г.М.* Оптимальные стратегии в прогнозе землетрясений // Современные методы интерпретации сейсмологических данных. М.: Наука, 1991. С. 3–18. (Вычисл. сейсмология; Вып.24).
12. *Gutenberg B., Richter C.F.* Seismicity of the Earth and associated Phenomena. Princeton Univ., 1949. 273 p.
13. *Gardner J., Knopoff L.* Is the sequence of earthquakes in S. California with aftershocks removed Poissonian? Yes // Bull. Seism. Soc. Amer. 1974. Vol.64, N 5. P.1363–1367.
14. *Прозоров А.Г.* Динамический алгоритм выделения афтершоков для мирового каталога землетрясений // Математические методы в сейсмологии и геодинамике. М.: Наука, 1986. С.56–62. (Вычисл. сейсмология; Вып.19).
15. *Молчан Г.М., Дмитриева О.Е.* Идентификация афтершоков: Обзор и новые подходы // Современные методы интерпретации сейсмологических данных. М.: Наука, 1991. С. 19–50. (Вычисл. сейсмология; Вып.24).
16. *Shnirman M.G., Sharoval A.B.* Two-signed avalanche model // Phys. Rev. E. (in press).
17. *Наркунская Г.С., Шнирман М.Г.* Иерархическая модель дефектообразования и сейсмичность // Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука, 1989. С.56–62. (Вычисл. сейсмология; Вып.22).
18. *Keilis-Borok V.I., Malinovskaya L.N.* One regularity in the occurrence of strong earthquakes // J. Geophys. Res. 1964. Vol.69. P.3019–3024.
19. *Blanter E.M., Shnirman M.G., Le Mouel J.-L.* Temporal variation of predictability in a hierarchical model of dynamical self-organized criticality // Phys. Earth. Planet. Inter. 1999. Vol.111. P.317–327.
20. *Keilis-Borok V.I., Knopoff L., Rotwain I.M.* Bursts of aftershocks long term precursors of strong earthquakes // Bull. Seism. Soc. Amer. 1982. Vol.72, N 5. P.1663–1675.
21. *Bak P.* How nature works. Oxford: Oxford Univ. Press., 1997. 73 p.
22. *Dhar D.* The abelian sandpile and related models // Physica A. 1999. Vol.263. P.4–25.
23. *Наркунская Г.С., Шнирман М.Г.* Об одном алгоритме прогноза землетрясений // Компьютерный анализ геофизических полей. М.: Наука, 1990. С.27–36. (Вычисл. сейсмология; Вып.23).