УДК 550.311

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ ЗЕМЛИ

О.Д. Воевода

Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук, Москва, Россия

Целью работы является анализ условий применения уравнений Эйлера и Лиувилля для описания вращения деформируемой Земли. Методом моментов получены уравнения внутренней и внешней задач динамики массивного вращающегося деформируемого шарообразного тела, которое представляет собою модель Земли. Тело удалено от других аналогичных тел, с которыми оно взаимодействует в соответствии с законом тяготения. В материале тел реализуются малые перемещения, деформации и медленные изменения перемещений. Полученные уравнения описывают как орбитальное движение и вращение тела как целого, так и движения материала тела. С учетом строения Земли получена система уравнений, которая устанавливает взаимосвязь ее возможных движений и их влияние на угловую скорость вращения Земли. Выяснены условия применения уравнений Эйлера и Лиувилля в геодинамике.

ABOUT EQUATIONS OF THE EARTH MOTIONS

O.D. Voevoda

International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

The paper discusses equations of motion of self-gravitating and rotating elastic bodies. The equations governing internal and external dynamics of these bodies were obtained by the "virial equations" method. The size of each body is small in comparison with the distance between bodies. Displacements within the body are much less than the size of the body. The strains are also small. The obtained set of equations controls the motion within the body, the orbital motion, and rotation of the body as a whole. Geodynamical applications of these equations are also discussed.

Введение

Гравитация и вращение есть те факторы, в присутствии которых происходят все процессы в недрах Земли. Изучение этих процессов проводится путем совместного анализа экспериментальных данных и результатов решений соответствующих модельных задач. Такой подход позволяет сформировать логически непротиворечивое и физически содержательное представление о возможной и реализуемой природе процессов в Земле.

Одной из основных является задача описания наблюдаемых движений, в частности, – вращения, массивной деформируемой Земли. Общее представление о постановке и методах решения этой задачи, а также геофизической интерпретации результатов можно получить из многочисленных публикаций [1–12]. В книге Морица и Мюллера [11] подробно рассмотрены основные проблемы, которые связаны с вращением Земли.

Простейшей моделью Земли является материальная точка, которая находится в гравитационном поле всех остальных космических тел. Описание движения Земли в рамках модели взаимодействующих материальных точек верно с погрешностью, равной отношению размера крупнейшего из тел к минимальному расстоянию между этими телами. Выход за рамки этого ограничения приводит к задаче об анализе движения массивных вращающихся тел конечных размеров.

Обычно, закономерности вращения Земли исследуются с помощью уравнения, которое следует из закона изменения момента импульса. В связанной с вращающейся Землей неинерциальной системе координат этот закон определяется уравнением [11]:

$$\frac{d\vec{\mathbf{\Omega}}}{dt} \bullet \widehat{\mathbf{J}} + \vec{\mathbf{\Omega}} \bullet \frac{d\widehat{\mathbf{J}}}{dt} + \vec{\mathbf{\Omega}} \times (\vec{\mathbf{\Omega}} \bullet \widehat{\mathbf{J}}) = \vec{\mathbf{M}}, \tag{1}$$

где $\widehat{\mathbf{J}}$ – тензор инерции; $\vec{\mathbf{\Omega}}$ – угловая скорость вращения Земли массой M и объемом $\mathbf{V}$; $\vec{\mathbf{M}}$ – суммарный момент внешних сил относительно центра масс Земли. Тензор инерции зависит от конфигурации Земли и распределения плотности внутри Земли. При $\vec{\mathbf{M}} = 0$ реализуется так называемое свободное вращение.

Так как все точки недеформируемого тела вращаются с одинаковой угловой скоростью, то ни плотность материала тела, ни его конфигурация не изменяются в процессе движения. В этом случае в уравнении (1), называемом уравнением Эйлера, $d\widehat{\mathbf{J}}/dt = 0$.

Способность материала Земли деформироваться проявляется в изменении положения точек материала Земли относительно ее центра масс. Это приводит к изменению тензора инерции во времени и к соответствующему изменению угловой скорости вращения Земли. Существует большое число работ, которые посвящены анализу влияния изменений тензора инерции на угловую скорость вращения. Эти изменения могут быть как медленными, так и быстрыми. Медленные изменения обусловлены движениями в мантии и ядре Земли, движением материков, эволюцией рельефа, океана, атмосферы и т.п. Быстрые изменения в первую очередь обусловлены процессом возникновения очагов очень сильных землетрясений в земной коре.

Уравнение (1) можно применить для описания вращения деформируемой Земли следующим образом. Принято считать [11], что

$$\vec{\mathbf{\Omega}} = \vec{\Omega} + \vec{\boldsymbol{\omega}}, \qquad \widehat{\mathbf{J}} = \widehat{J} + \widehat{\mathbf{j}},$$

где $\vec{\Omega}$ и $\widehat{J}$, – соответственно, угловая скорость и тензор инерции недеформируемой Земли; $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ и $\widehat{\mathbf{j}}$, – соответственно, возмущения угловой скорости и тензора инерции, которые обусловлены способностью материала Земли деформироваться. Такое предположение позволяет исключить из уравнения (1) вращение Земли как недеформируемого тела и получить уравнение Лиувилля. При известных $\vec{\Omega}$, $\widehat{J}$ и $\widehat{\mathbf{j}}$ уравнение Лиувилля позволяет найти угловую скорость $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ вращения деформируемой Земли.

В известных автору работах не обсуждается физический смысл угловой скорости $\vec{\mathbf{\Omega}}$ как характеристики вращения деформируемой Земли. В уравнении Лиувилля присутствует угловая скорость $\vec{\Omega}$, которая характеризует вращение недеформируемой Земли. Так как недеформированное состояние Земли не реализуется в реальности, то не вполне ясно, в каких случаях уравнения Эйлера и Лиувилля можно применить для описания вращения деформируемой Земли. Это затрудняет анализ и корректную интерпретацию данных наблюдений на основе решения различных модельных задач.

Основная цель работы состоит в выяснении условий применения уравнения (1) и его следствий для описания вращения деформируемой Земли.

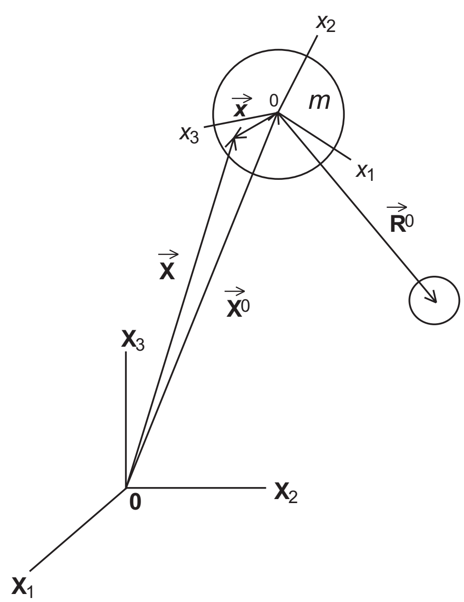
Как оказалось, достижение этой цели возможно только путем последовательного вывода системы уравнений, которые описывают возможные движения массивного вращающегося деформируемого тела – Земли.

Для описания движений массивного вращающегося деформируемого тела целесообразно применить метод моментов. В 1939 г. этот метод был применен В.А. Фоком для вывода уравнений движения вращающихся газовых или жидких масс [13]. Затем метод моментов был систематически использован С. Чандрасекхаром для анализа фигур равновесия вращающихся жидких масс [14]. В настоящей статье с помощью метода моментов получены уравнения движения массивного вращающегося деформируемого тела и выяснены условия их применения в геодинамике.

1. Основные соотношения

Пусть имеется совокупность $n = 1, 2, \ldots, N$ массивных деформируемых тел, которые взаимодействуют между собой в соответствии с законом тяготения. Количество тел и масса каждого из них не изменяются во времени. Гравитационное взаимодействие тел проявляется в их наблюдаемых движениях: в изменении взаимного положения центров масс тел, вращении каждого из тел относительно своего центра масс, изменении взаимного положения точек материала каждого тела.

Для количественного описания движения тел введем инерциальную систему координат $\{0,\, \vec{X}\}$ и неинерциальные системы координат $\{o_n,\, \vec{x}_n\}$, начало каждой из которых совпадает с центром масс соответствующего тела (рисунок).



Система тел

Выделим тело с номером m, которое будем считать моделью Земли.

Обозначим $\vec{\mathbf{X}}^0(t)$ и $\vec{\mathbf{X}}(t)$, соответственно, векторы мгновенного (текущего) положения центра масс тела и любой другой его точки относительно $\{0,\, \vec{X}\}$ в момент времени t. Вектор

$$\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}^0$$

определяет мгновенное положение точки тела относительно его центра масс (см. рисунок). Вектор перемещений точек материала тела равен [15]:

$$\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{x}} - \vec{x},$$

где $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}(\vec{x}, t)$; $\vec{x}$ – вектор положения точки материала тела в так называемом отсчетном состоянии. Жирным и тонким шрифтом, соответственно, обозначены величины в текущем и отсчетном состоянии тела. Отсчетное состояние тела может быть как физически реализуемым, так и гипотетическим, а его выбор определяется природой реального процесса и удобством решения соответствующей модельной задачи.

Пусть отсчетное состояние реального тела соответствует гипотетической модели тела из недеформируемого материала. В этом случае

$$d\vec{x}/dt = 0, \tag{2}$$

где производная по времени d/dt определена в системе координат $\{o, \vec{x}\}$.

По определению масса тела M и вектор положения его центра масс $\vec{\mathbf{X}}^0$ равны [16]:

$$M = \int\limits_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\rho} dV, \tag{3}$$

$$M\vec{\mathbf{X}}^0 = \int\limits_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\rho}\vec{\mathbf{X}} dV, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\rho}(\vec{x}, t)$ – плотность материала тела объемом $\mathbf{V}(t)$.

В инерциальной системе координат $\{0, \vec{X}\}$ движение элементарного объема деформируемого тела определяется уравнением [15]

$$\boldsymbol{\rho}_m \frac{d^2\vec{\mathbf{X}}_m}{dt_X^2} = \nabla \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_m + \vec{\mathbf{f}}_{mm} + \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m}}^{N} \vec{\mathbf{f}}_{mn}. \tag{5}$$

В уравнении (5) $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\vec{x}, t)$ – симметричный тензор (второго ранга) напряжений; $\nabla\bullet = \mathrm{div}$, точка $\bullet$ означает скалярное произведение. Производная по времени d/dt_X определена в системе координат $\{0, \vec{X}\}$.

Объемные силы $\vec{\mathbf{f}}_{mm}$ и $\vec{\mathbf{f}}_{mn}$ равны [9]:

$$\vec{\mathbf{f}}_{mm} = G\boldsymbol{\rho}_m \int\limits_{\mathbf{V}'_m} \boldsymbol{\rho}' \frac{\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'}{|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'|^3} \, dV, \tag{6}$$

$$\vec{\mathbf{f}}_{mn} = G\boldsymbol{\rho}_m \int\limits_{\mathbf{V}_n} \boldsymbol{\rho} \frac{\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n}{|\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n|^3} \, dV, \tag{7}$$

где G – гравитационная постоянная; $|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'|$ – расстояние между различными точками одного тела; $|\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n|$ – расстояние между точками различных тел.

Левая часть уравнения (5) есть сила инерции элементарного объема тела, правая часть уравнения (5) есть сумма поверхностных $\nabla \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}}$ и объемных $\vec{\mathbf{f}}_{mm}$ и $\vec{\mathbf{f}}_{mn}$ сил, которые действуют на элементарный объем тела. Вектор $\vec{\mathbf{f}}_{mm}$ есть сила гравитационного притяжения между точкой $\vec{\mathbf{x}}$ и всеми другими точками $\vec{\mathbf{x}}'$ этого же тела, а вектор $\vec{\mathbf{f}}_{mn}$ – сила гравитационного притяжения между точкой $\vec{\mathbf{X}} \in \mathbf{V}_m$ и любым другим телом $\mathbf{V}_n$.

Для простоты будем считать, что на гладкой поверхности тела $\mathbf{S}$ вектор напряжений равен нулю, т.е.

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \bullet \vec{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{при} \;\; \vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{S}, \tag{8}$$

где $\vec{\mathbf{n}}$ – вектор единичной нормали к $\mathbf{S}$. Положительным считается направление внешней к $\mathbf{S}$ нормали (см. рисунок).

Из формулы (4) следует тождество

$$\int\limits_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\rho}(\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}^0) dV \equiv 0. \tag{9}$$

При неизменной массе тела справедливо равенство [15]:

$$\int\limits_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\rho} \frac{d^\alpha \mathbf{q}}{dt^\alpha} dV = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \int\limits_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\rho}\mathbf{q} dV, \tag{10}$$

где α – порядок производной, а $\mathbf{q}$ – векторная или тензорная функция координат и времени.

Пусть за бесконечномалый интервал времени происходят бесконечно малые изменения взаимного положения и ориентации систем координат $\{o, \vec{x}\}$ и $\{0, \vec{X}\}$.

В деформируемом теле вектор поворота точки тела относительно мгновенной оси вращения зависит от положения этой точки в теле, т.е.

$$\vec{\mathbf{\Phi}} = \vec{\mathbf{\Phi}}(\vec{\mathbf{x}}, t).$$

Обозначим

$$< \vec{\mathbf{\Phi}} > = \frac{1}{\mathbf{V}} \int\limits_{\mathbf{V}} \vec{\mathbf{\Phi}} dV$$

средний по объему тела вектор поворота. Соответствующая мгновенная угловая скорость вращения деформируемого тела как целого есть

$$\vec{\mathbf{\Omega}} = \frac{d}{dt} < \vec{\mathbf{\Phi}} > .$$

Производные по времени вектора $\vec{\mathbf{X}}$ в системах координат $\{0, \vec{X}\}$ и $\{o, \vec{x}\}$ связаны формулами (см. Приложение):

$$\frac{d\vec{\mathbf{X}}}{dt_X} = \frac{d\vec{\mathbf{X}}^0}{dt_X} + \frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt} + \vec{\mathbf{\Omega}} \times \vec{\mathbf{x}}, \tag{11}$$

$$\frac{d^2\vec{\mathbf{X}}}{dt_X^2} = \frac{d^2\vec{\mathbf{X}}^0}{dt_X^2} + \frac{d^2\vec{\mathbf{x}}}{dt^2} + 2\vec{\mathbf{\Omega}} \times \frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt} + \vec{\mathbf{\Omega}} \times (\vec{\mathbf{\Omega}} \times \vec{\mathbf{x}}) + \frac{d\vec{\mathbf{\Omega}}}{dt} \times \vec{\mathbf{x}}. \tag{12}$$

Символ $\times$ означает векторное умножение. Величины $d\vec{\mathbf{X}}^0/dt_X$ и $d^2\vec{\mathbf{X}}^0/dt_X^2$, соответственно, равны скорости и ускорению центра масс тела относительно системы координат $\{0, \vec{X}\}$. Величины $d\vec{\mathbf{x}}/dt$ и $d^2\vec{\mathbf{x}}/dt^2$, соответственно, равны скорости и ускорению точки тела относительно его центра масс. В формуле (12) слагаемые, содержащие угловую скорость, соответственно, равны ускорению Кориолиса, центробежному ускорению и ускорению, которое обусловлено нестационарным вращением тела. В Приложении показано, что

$$\vec{\mathbf{\Omega}} = < \vec{\mathbf{\Omega}} > + \frac{1}{\mathbf{V}} \int\limits_{\mathbf{V}} \vec{\mathbf{\Phi}} \nabla \bullet \frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial t} dV - < \vec{\mathbf{\Phi}} > \frac{1}{\mathbf{V}} \int\limits_{\mathbf{V}} \nabla \bullet \frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial t} dV, \tag{13}$$

где

$$< \vec{\mathbf{\Omega}} > = \frac{1}{\mathbf{V}} \int\limits_{\mathbf{V}} \frac{d\vec{\mathbf{\Phi}}}{dt} dV \tag{14}$$

есть средняя по объему тела угловая скорость его вращения.

Пусть

$$\vec{\mathbf{\Phi}} = \vec{\Phi} + \vec{\boldsymbol{\varphi}}, \tag{15}$$

где $\vec{\Phi}(t)$ – вектор поворота недеформируемого тела, а $\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{x}, t)$ – его возмущение, которое обусловлено способностью материала тела деформироваться. Подставив (15) в формулы (13), (14), получим:

$$\vec{\mathbf{\Omega}} = \vec{\Omega} + \frac{1}{\mathbf{V}} \int\limits_{\mathbf{V}} \frac{d\vec{\boldsymbol{\varphi}}}{dt} dV + \frac{1}{\mathbf{V}} \int\limits_{\mathbf{V}} \vec{\boldsymbol{\varphi}} \nabla \bullet \frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial t} dV - < \vec{\boldsymbol{\varphi}} > \frac{1}{\mathbf{V}} \int\limits_{\mathbf{V}} \nabla \bullet \frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{dt} dV. \tag{16}$$

В формуле (16)

$$\vec{\Omega} = \frac{d\vec{\Phi}}{dt}, \quad <\vec{\boldsymbol{\varphi}}> = \frac{1}{\mathbf{V}} \int\limits_{\mathbf{V}} \vec{\boldsymbol{\varphi}} dV,$$

где $\vec{\Omega}(t)$ – угловая скорость вращения недеформируемого тела.

Из (16) следует, что формально угловую скорость вращения деформируемого тела как целого можно представить в виде

$$\vec{\boldsymbol{\Omega}} = \vec{\Omega} + \vec{\boldsymbol{\omega}},$$

где $\vec{\boldsymbol{\omega}}(t)$ – возмущение угловой скорости, которое обусловлено способностью материала тела деформироваться.

Сформулированные выше предположения и соответствующие им формулы позволяют найти уравнения, которые описывают возможные движения массивного вращающегося деформируемого тела. Одни из этих уравнений будут определять движение каждой точки материала тела, а другие – движение тела как целого. Соответствующие группы уравнений будем относить к внутренней и внешней задачам динамики массивного вращающегося деформируемого тела.

2. Внутренняя задача динамики массивного вращающегося деформируемого тела

Внутренняя задача динамики массивного вращающегося деформируемого тела определяется уравнением, которое позволяет найти вектор перемещений в любой точке материала тела известной реологии при заданных начальных и граничных условиях. Эти условия определяются содержанием конкретного процесса и соответствующей ему модельной задачи.

Подставим $\vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{X}}^0 + \vec{x} + \vec{\mathbf{u}}$ в левую часть уравнения (5) и используем формулы (2), (11), (12). В результате, в неинерциальной системе координат $\{o, \vec{x}\}$, получим уравнение движения элементарного объема тела:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\rho}_m \frac{d^2\vec{\mathbf{u}}_m}{dt^2} + 2\boldsymbol{\rho}_m \vec{\boldsymbol{\Omega}}_m \times \frac{d\vec{\mathbf{u}}_m}{dt} - \nabla \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_m = \\ &= \vec{\mathbf{f}}_{mm} - \boldsymbol{\rho}_m \vec{\boldsymbol{\Omega}}_m \times (\vec{\boldsymbol{\Omega}}_m \times \vec{\mathbf{x}}_m) - \boldsymbol{\rho}_m \frac{d\vec{\boldsymbol{\Omega}}_m}{dt} \times \vec{\mathbf{x}}_m + \vec{\mathbf{f}}_{mN}, \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\vec{\mathbf{f}}_{mN} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{N} \vec{\mathbf{f}}_{mn} - \boldsymbol{\rho}_m \frac{d^2\vec{\mathbf{X}}_m^0}{dt_x^2}. \tag{18}$$

Проинтегрируем уравнение (5) по объему тела $\mathbf{V}_m$ и учтем формулу (10). В результате получим выражение, которое содержит несколько объемных интегралов, часть которых оказывается равной нулю. Интеграл $\int\limits_{\mathbf{V}} \vec{\mathbf{f}}_{mm} \vec{\mathbf{u}} dV = 0$ в силу антисимметрии подинтегрального выражения (6) относительно перестановки $\vec{\mathbf{x}}$ и $\vec{\mathbf{x}}'$. Равенство нулю этого интеграла отражает факт равенства нулю главного вектора сил гравитационного притяжения между внутренними точками тела. Интеграл по объему от поверхностных сил равен интегралу по поверхности тела от вектора напряжений $\int\limits_{\mathbf{V}} \nabla \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}} dV = \int\limits_{\mathbf{S}} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \bullet \vec{\mathbf{n}} dS = 0$ в силу условия (8).

Сделанные преобразования позволяют получить уравнение движения центра масс тела конечных размеров

$$M_m \frac{d^2\vec{\mathbf{X}}_m^0}{dt_X^2} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{N} \int\limits_{\mathbf{V}_m} \vec{\mathbf{f}}_{mn} dV. \tag{19}$$

Правая часть этого уравнения есть главный вектор внешних гравитационных сил, которые действуют на тело.

Из (18), (19) следует, что в уравнении (17):

$$\vec{\mathbf{f}}_{mN} = \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{N} (\vec{\mathbf{f}}_{mn} - \frac{\boldsymbol{\rho}_m}{M_m} \int\limits_{\mathbf{V}_m} \vec{\mathbf{f}}_{mn} dV). \qquad (20)$$

Уравнение (17) нелинейно относительно вектора перемещений, так как входящие в него величины зависят от текущего положения точек материала тела. Для этого уравнения невозможна классическая постановка внутренней задачи динамики. Поэтому необходимо найти линейное относительно перемещений уравнение. Правая часть этого уравнения и коэффициенты перед вектором перемещений и его производными по времени в левой части должны быть определены для отсчетного состояния тела. Такое линейное уравнение можно найти, если существуют некоторые малые параметры, которые определяют характер движений тела.

Рассмотрим силу $\vec{\mathbf{f}}_{mN}$ в случае удаленных друг от друга тел при

$$\frac{l}{R} < 1, \quad \frac{l^2}{R^2} \ll 1,$$

где l и R, – соответственно, характерные размер тела и расстояние между телами.

В этом случае вектор $(\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n)/|\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n|^3$ мало изменяется на расстоянии порядка размера тела l и этот вектор можно представить в виде ряда по степеням малого параметра l/R. Пусть изменение указанного вектора по порядку величины одинаково вдоль любого из направлений в теле. Это значит, что конфигурация тела мало отличается от шара.

Разложим вектор $(\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n)/|\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n|^3$ в ряд Тэйлора около положения $\vec{\mathbf{X}}^0_m$ центра масс тела $\mathbf{V}_m$. В этом разложении ограничимся первыми тремя слагаемыми. Каждое из этих слагаемых также разложим в ряд Тэйлора около положений $\vec{\mathbf{X}}^0_n$ центров масс тел $\mathbf{V}_n$. В этих разложениях также ограничимся первыми тремя слагаемыми. Так как пространственные производные $\nabla \sim 1/R^\alpha$, а $x_{\max} \approx l$, то в результате с погрешностью $o(l^3/R^3)$ получим:

$$\begin{aligned}
(\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n)/|\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n|^3 &\approx \frac{\vec{\mathbf{R}}^0_{mn}}{|\vec{\mathbf{R}}^0_{mn}|^3} + \left(\nabla_m \frac{\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}^0_n}{|\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}^0_n|^3}\right)\Bigg|_{\vec{\mathbf{X}}^0_m} \bullet \vec{\mathbf{x}}_m + \\
+ \left(\nabla_n \frac{\vec{\mathbf{X}}^0_m - \vec{\mathbf{X}}_n}{|\vec{\mathbf{X}}^0_m - \vec{\mathbf{X}}_n|^3}\right)\Bigg|_{\vec{\mathbf{X}}^0_n} &\bullet \vec{\mathbf{x}}_n + \left(\nabla_n \left(\nabla_m \frac{\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n}{|\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n|^3}\right)\Bigg|_{\vec{\mathbf{X}}^0_m}\right)\Bigg|_{\vec{\mathbf{X}}^0_n} \bullet\bullet \vec{\mathbf{x}}_m \vec{\mathbf{x}}_n + \\
+ \frac{1}{2}\left(\nabla_m \nabla_m \frac{\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}^0_n}{|\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}^0_n|^3}\right)\Bigg|_{\vec{\mathbf{X}}^0_m} &\bullet\bullet \vec{\mathbf{x}}_m \vec{\mathbf{x}}_m + \frac{1}{2}\left(\nabla_n \nabla_n \frac{\vec{\mathbf{X}}^0_m - \vec{\mathbf{X}}_n}{|\vec{\mathbf{X}}^0_m - \vec{\mathbf{X}}_n|^3}\right)\Bigg|_{\vec{\mathbf{X}}^0_n} \bullet\bullet \vec{\mathbf{x}}_n \vec{\mathbf{x}}_n, \qquad (21)
\end{aligned}$$

где $\vec{\mathbf{R}}^0_{mn} = \vec{\mathbf{X}}^0_m - \vec{\mathbf{X}}^0_n$ – вектор взаимного положения центров масс тел. Индекс около оператора ∇ указывает – по координатам какого из тел действует этот оператор. В разложении (21) были учтены только каждые три слагаемых, так как остальные впоследствии вносят малые добавки от величин, которые не имеют очевидного физического смысла.

Подставим ряд (21) в формулу (7) и учтем формулы (3) и (9). В результате получим:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{f}}_{mn} = G\boldsymbol{\rho}_m &\left(\frac{\vec{\mathbf{R}}^0_{mn}}{|\vec{\mathbf{R}}^0_{mn}|^3} M_n + \vec{\mathbf{x}}_m \bullet \left(\nabla_m \frac{\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}^0_n}{|\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}^0_n|^3}\right)\Bigg|_{\vec{\mathbf{X}}^0_m} M_n + \right. \\
+ &\left. \frac{1}{2}\vec{\mathbf{x}}_m \vec{\mathbf{x}}_m \bullet\bullet \left(\nabla_m \nabla_m \frac{\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}^0_n}{|\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}^0_n|^3}\right)\Bigg|_{\vec{\mathbf{X}}^0_m} M_n + \frac{1}{2}\left(\nabla_n \nabla_n \frac{\vec{\mathbf{X}}^0_m - \vec{\mathbf{X}}_n}{|\vec{\mathbf{X}}^0_m - \vec{\mathbf{X}}_n|^3}\right)\Bigg|_{\vec{\mathbf{X}}^0_n} \bullet\bullet \hat{\mathbf{I}}_n\right).
\end{aligned}$$

Симметричный мультипликативный тензор второго ранга

$$\widehat{\mathbf{I}} = \int\limits_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\rho}\vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{x}}\, dV \tag{22}$$

назовем тензором инерции тела.

С учетом формул (3), (9), (22) получим:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbf{V}_m} \vec{\mathbf{f}}_{mn} dV &= G\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{N}\left(\frac{\vec{\mathbf{R}}^0_{mn}}{|\vec{\mathbf{R}}^0_{mn}|^3}M_m M_n + \frac{1}{2}M_n\widehat{\mathbf{I}}_m \bullet\bullet \left(\nabla_m\nabla_m\frac{\vec{\mathbf{X}}_m-\vec{\mathbf{X}}^0_n}{|\vec{\mathbf{X}}_m-\vec{\mathbf{X}}^0_n|^3}\right)\Bigg|_{\vec{\mathbf{X}}^0_m} +\right.\\ &+ \left.\frac{1}{2}\left(\nabla_n\nabla_n\frac{\vec{\mathbf{X}}^0_m-\vec{\mathbf{X}}_n}{|\vec{\mathbf{X}}^0_m-\vec{\mathbf{X}}_n|^3}\right)\Bigg|_{\vec{\mathbf{X}}^0_n}\bullet\bullet\widehat{\mathbf{I}}_n M_m\right).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{f}}_{mN} &= G\boldsymbol{\rho}_m\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{N}\left(M_n\left(\vec{\mathbf{x}}_m\bullet\left(\nabla_m\frac{\vec{\mathbf{X}}_m-\vec{\mathbf{X}}^0_n}{|\vec{\mathbf{X}}_m-\vec{\mathbf{X}}^0_n|^3}\right)\Bigg|_{\vec{\mathbf{X}}^0_m} +\right.\right.\\ &+ \left.\left.\frac{1}{2}\left(\vec{\mathbf{x}}_m\vec{\mathbf{x}}_m-\frac{\widehat{\mathbf{I}}_m}{M_m}\right)\bullet\bullet\left(\nabla_m\nabla_m\frac{\vec{\mathbf{X}}_m-\vec{\mathbf{X}}^0_n}{|\vec{\mathbf{X}}_m-\vec{\mathbf{X}}^0_n|^3}\right)\Bigg|_{\vec{\mathbf{X}}^0_m}\right)\right).\end{aligned}$$

Сделав вычисления, получим:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{f}}_{mN} &= G\boldsymbol{\rho}_m\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{N}M_n\left(\frac{\vec{\mathbf{x}}_m}{|\vec{\mathbf{R}}^0_{mn}|^3} - 3\frac{\vec{\mathbf{R}}^0_{mn}\vec{\mathbf{R}}^0_{mn}}{|\vec{\mathbf{R}}^0_{mn}|^5}\bullet\vec{\mathbf{x}}_m + \frac{3}{2}\left(5\frac{\vec{\mathbf{R}}^0_{mn}\vec{\mathbf{R}}^0_{mn}\vec{\mathbf{R}}^0_{mn}}{|\vec{\mathbf{R}}^0_{mn}|^7}\bullet\bullet\left(\vec{\mathbf{x}}_m\vec{\mathbf{x}}_m-\frac{\widehat{\mathbf{I}}_m}{M_m}\right) -\right.\right.\\ &- \left.\left.\frac{\vec{\mathbf{R}}^0_{mn}}{|\vec{\mathbf{R}}^0_{mn}|^5}\left(\vec{\mathbf{x}}_m\bullet\vec{\mathbf{x}}_m-\frac{\mathbf{I}_m}{M_m}\right) - 2\frac{\vec{\mathbf{R}}^0_{mn}}{|\vec{\mathbf{R}}^0_{mn}|^5}\bullet\left(\vec{\mathbf{x}}_m\vec{\mathbf{x}}_m-\frac{\widehat{\mathbf{I}}_m}{M_m}\right)\right)\right),\end{aligned}$$

где $\mathbf{I}$ – первый инвариант тензора $\widehat{\mathbf{I}}$.

В уравнении (17) при $\vec{\boldsymbol{\Omega}}_m = 0$ только наличие объемных сил $\vec{\mathbf{f}}_{mm}$ и $\vec{\mathbf{f}}_{mN}$ вызывает взаимные перемещения точек материала тела. Сила $\vec{\mathbf{f}}_{mN}$ зависит от взаимного положения тел и отлична от нуля всюду, за исключением центра масс тела. Поэтому силу $\vec{\mathbf{f}}_{mN}$ естественно назвать приливообразующей силой. С погрешностью $o(l^3/R^3)$ эта сила не зависит от тензоров инерции тех тел, которые удалены от рассматриваемого тела. Из (20) следует, что главный вектор приливообразующей силы $\int\limits_{\mathbf{V}_m}\vec{\mathbf{f}}_{mN}dV = 0$, а главный момент этой силы $\int\limits_{\mathbf{V}_m}\vec{\mathbf{x}}\times\vec{\mathbf{f}}_{mN}dV \neq 0$.

Представим тензор инерции в виде:

$$\widehat{\mathbf{I}} = \widehat{I} + \widehat{\mathbf{i}},$$

где $\widehat{I}$ – тензор инерции в отсчетном состоянии тела, а $\widehat{\mathbf{i}}$ – его возмущение, которое обусловлено способностью материала тела деформироваться. В линейном по $\vec{\mathbf{u}}$ приближении:

$$\widehat{\mathbf{i}} = \int\limits_{\mathbf{V}}\boldsymbol{\rho}(\vec{x}\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{u}}\vec{x})dV.$$

Пусть малы перемещения $\vec{\mathbf{u}}$ точек материала каждого из тел и компоненты тензора дисторсий $\nabla\vec{\mathbf{u}} \ll \widehat{1}$, где $\widehat{1}$ – единичный тензор Кронекера. Пусть изменение перемещений в единицу времени $d|\vec{\mathbf{u}}|/dt$ много меньше характерной скорости распространения возмущений в материале тела w_0. Принятые предположения позволяют ввести малые параметры:

$$\frac{|\vec{\mathbf{u}}|}{l} \ll 1, \quad \nabla\vec{\mathbf{u}} \ll \hat{1}, \quad \beta = \frac{1}{w_0}\frac{d|\vec{\mathbf{u}}|}{dt}. \tag{23}$$

Линеаризация уравнений механики сплошной среды при малых параметрах (23) описана во многих работах [12,17].

Полные производные по времени от вектора перемещений равны [15]:

$$\frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt} = \frac{\partial\vec{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt}\bullet\nabla)\vec{\mathbf{u}}, \qquad \frac{d^2\vec{\mathbf{u}}}{dt^2} = \frac{\partial^2\vec{\mathbf{u}}}{\partial t^2} + (\frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt}\bullet\nabla)\frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt}. \tag{24}$$

Левая часть формул (24) называется материальной производной. Первые слагаемые в правых частях формул (24) называются локальными производными. Они равны изменению во времени соответствующей функции в точке тела, которая неподвижна относительно $\{o,\vec{x}\}$. Вторые слагаемые в правых частях формул (24) называются конвективными производными. Они определяют вклад изменения положения точки тела относительно $\{o,\vec{x}\}$ в изменение соответствующей функции. Можно показать,что при малых деформациях и медленных изменениях перемещений имеют место приближенные равенства:

$$\boldsymbol{\rho} \approx \rho, \quad \mathbf{V} \approx V, \qquad \frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt} \approx \frac{\partial\vec{\mathbf{u}}}{\partial t}, \qquad \frac{d^2\vec{\mathbf{u}}}{dt^2} \approx \frac{\partial^2\vec{\mathbf{u}}}{\partial t^2}, \qquad \vec{\boldsymbol{\Omega}} \approx \vec{\Omega}.$$

Приведенные формулы позволяют получить линейное уравнение внутренней задачи динамики массивного деформируемого тела:

$$\rho_m\frac{\partial^2\vec{\mathbf{u}}_m}{\partial t^2} + 2\rho_m\vec{\Omega}_m \times \frac{\partial\vec{\mathbf{u}}_m}{\partial t} + \rho_m\vec{\Omega}_m \times (\vec{\Omega}_m \times \vec{\mathbf{u}}_m) + \rho_m\frac{d\vec{\Omega}_m}{dt} \times \vec{\mathbf{u}}_m - \nabla\bullet\hat{\boldsymbol{\sigma}}_m =$$
$$= \vec{f}_{mm} - \rho_m\vec{\Omega}_m \times (\vec{\Omega}_m \times \vec{x}_m) - \rho_m\frac{d\vec{\Omega}_m}{dt} \times \vec{x}_m + \vec{f}_{mN}, \tag{25}$$

где

$$\vec{f}_{mm} = G\rho_m\int\limits_{V'_m}\rho'\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\,dV,$$

$$\begin{aligned}\vec{f}_{mN} \;&=\; G\rho_m\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{N} M_n\left(\frac{\vec{x}_m}{|\vec{R}^0_{mn}|^3} - 3\frac{\vec{R}^0_{mn}\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^5}\bullet\vec{x}_m + \frac{3}{2}\left(5\frac{\vec{R}^0_{mn}\vec{R}^0_{mn}\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^7}\bullet\bullet\left(\vec{x}_m\vec{x}_m - \frac{\hat{I}_m}{M_m}\right) - \right.\right.\\ &- \left.\left.\frac{\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^5}\left(\vec{x}_m\bullet\vec{x}_m - \frac{I_m}{M_m}\right) - 2\frac{\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^5}\bullet\left(\vec{x}_m\vec{x}_m - \frac{\hat{I}_m}{M_m}\right)\right)\right).\end{aligned}$$

Уравнение (25) справедливо для удаленных друг от друга тел, в материале которых реализуются малые перемещения и дисторсии, а также медленные изменения перемещений. В граничном условии (8) все величины также отнесены к отсчетному состоянию тела, т.е. $\hat{\sigma}\bullet\vec{n} = 0$ на S.

При малых дисторсиях можно считать, что реологическая модель материала тела соответствует линейно упругому телу [15]:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{c}\bullet\bullet\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tag{26}$$

где $\hat{c}$ – симметричный тензор (четвертого ранга) коэффициентов жесткости материала тела, а симметричная часть тензора дисторсий

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{u}}\nabla)$$

есть тензор (второго ранга) деформаций.

Уравнение состояния (26) линейно упругого тела может быть сведено к уравнениям состояния для вязкоупругого тела, в том числе, – жидкого [15].

Для постановки внутренней задачи необходимо знать: конфигурацию тела в отсчетном состоянии, угловую скорость его вращения, плотность и реологическую модель материала тела, а также все величины в правой части уравнения (25). Начальные и граничные условия определяются содержанием конкретных геофизических приложений.

3. Внешняя задача динамики массивного вращающегося тела

Внешняя задача динамики массивного вращающегося тела определяется уравнениями, которые описывают движение тела как целого. В материале тела реализуются малые перемещения, деформации и медленные изменения перемещений. Для получения уравнений внешней задачи удобно использовать метод моментов [13, 14].

Найдем главный вектор сил, которые действуют на тело. Проинтегрируем уравнение (5) по объему $\mathbf{V}_m$ тела, что после преобразований приводит к уравнению движения центра масс тела конечных размеров

$$M_m \frac{d^2\vec{\mathbf{X}}_m^0}{dt_X^2} = \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{N} \vec{\mathbf{F}}_{mn}, \tag{27}$$

где

$$\vec{\mathbf{F}}_{mn} = \int\limits_{\mathbf{V}_m} \vec{\mathbf{f}}_{mn} dV$$

– главный вектор внешних гравитационных сил, которые действуют на тело. Закон изменения орбитального момента импульса тела получается путем векторного умножения $\vec{\mathbf{X}}_m^0$ на обе части уравнения (27).

Для удаленных друг от друга тел вектор $\vec{\mathbf{F}}_{mn}$ с погрешностью $o(l^3/R^3)$ равен:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}}_{mn} &= G\left(\frac{\vec{\mathbf{R}}_{mn}^0}{|\vec{\mathbf{R}}_{mn}^0|^3} M_m M_n + \frac{1}{2}\left(\left(\nabla_m \nabla_m \frac{\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n^0}{|\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n^0|^3}\right)\Bigg|_{\vec{\mathbf{X}}_m^0} \bullet\bullet \widehat{\mathbf{I}}_m M_n + \right.\right.\\ &+ \left.\left.\left(\nabla_n \nabla_n \frac{\vec{\mathbf{X}}_m^0 - \vec{\mathbf{X}}_n}{|\vec{\mathbf{X}}_m^0 - \vec{\mathbf{X}}_n|^3}\right)\Bigg|_{\vec{\mathbf{X}}_n^0} \bullet\bullet \widehat{\mathbf{I}}_n M_m\right)\right).\end{aligned}$$

Сделав вычисления, получим:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}}_{mn} &= G\frac{\vec{\mathbf{R}}_{mn}^0}{|\vec{\mathbf{R}}_{mn}^0|^3} M_m M_n + \frac{3}{2} G\left(5\frac{\vec{\mathbf{R}}_{mn}^0 \vec{\mathbf{R}}_{mn}^0 \vec{\mathbf{R}}_{mn}^0}{|\vec{\mathbf{R}}_{mn}^0|^7} \bullet\bullet (\widehat{\mathbf{I}}_m M_n + \widehat{\mathbf{I}}_n M_m) - \right.\\ &- \left.\frac{\vec{\mathbf{R}}_{mn}^0}{|\vec{\mathbf{R}}_{mn}^0|^5} (\mathbf{I}_m M_n + \mathbf{I}_n M_m) - 2\frac{\vec{\mathbf{R}}_{mn}^0}{|\vec{\mathbf{R}}_{mn}^0|^5} \bullet (\widehat{\mathbf{I}}_m M_n + \widehat{\mathbf{I}}_n M_m)\right),\end{aligned}$$

где $\mathbf{I}$ – первый инвариант тензора $\widehat{\mathbf{I}}$.

Представим тензор инерции в виде:

$$\widehat{\mathbf{I}} = \widehat{I} + \widehat{\mathbf{i}},$$

где $\widehat{I}$ – тензор инерции тела в отсчетном состоянии, а $\widehat{\mathbf{i}}$ – его возмущение, которое обусловлено способностью материала тела деформироваться. В линейном по $\vec{\mathbf{u}}$ приближении:

$$\widehat{\mathbf{i}} = \int\limits_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\rho}(\vec{x}\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{u}}\vec{x}) dV.$$

Можно показать, что с погрешностью $o(\mathbf{u}/l)$ уравнение (27) имеет вид:

$$\begin{aligned} M_m \frac{d^2 \vec{X}^0_m}{dt^2_X} &= G \sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{N} \frac{\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^3} M_m M_n + \frac{3}{2} G \sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{N} \left(5 \frac{\vec{R}^0_{mn} \vec{R}^0_{mn} \vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^7} \bullet\bullet (\widehat{I}_m M_n + \widehat{I}_n M_m) - \right. \\ &- \left. \frac{\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^5} (I_m M_n + I_n M_m) - 2 \frac{\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^5} \bullet (\widehat{I}_m M_n + \widehat{I}_n M_m) \right). \end{aligned} \tag{28}$$

Уравнение (28) определяет движение центра масс недеформируемого тела конечных размеров, которое удалено от других тел. Таким образом, при малых перемещениях $\vec{\mathbf{X}}^0 = \vec{X}^0 + o(\mathbf{u}/R)$, т.е. практически совпадают положения центров масс деформируемого и недеформируемого тел.

Умножим вектор $\vec{\mathbf{X}}^0_m$ как слева, так и справа на обе части уравнения (27), что дает:

$$M_m \vec{\mathbf{X}}^0 \frac{d\vec{\mathbf{W}}^0_m}{dt_X} = \sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{N} \vec{\mathbf{X}}^0_m \vec{\mathbf{F}}_{mn}, \qquad M_m \frac{d\vec{\mathbf{W}}^0_m}{dt_X} \vec{\mathbf{X}}^0_m = \sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{N} \vec{\mathbf{F}}_{mn} \vec{\mathbf{X}}^0_m, \tag{29}$$

где $\vec{\mathbf{W}}^0 = d\vec{\mathbf{X}}^0/dt_X$. Из формул (29) образуем следующую комбинацию:

$$M_m \left(\vec{\mathbf{X}}^0_m \frac{d\vec{\mathbf{W}}^0_m}{dt_X} \pm \frac{d\vec{\mathbf{W}}^0_m}{dt_X} \vec{\mathbf{X}}^0_m \right) = \sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{N} (\vec{\mathbf{X}}^0_m \vec{\mathbf{F}}_{mn} \pm \vec{\mathbf{F}}_{mn} \vec{\mathbf{X}}^0_m). \tag{30}$$

Формула (30) определяет как симметричную (знак + в верхней строке), так и антисимметричную (знак − в нижней строке) части мультипликативного тензора второго ранга.

Проделав аналогичные операции с вектором $\vec{\mathbf{X}}_m$ и обеими частями уравнения (5) и учитывая, что $\vec{\mathbf{W}} = d\vec{\mathbf{X}}/dt_X$, получим:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_m \left(\vec{\mathbf{X}}_m \frac{d\vec{\mathbf{W}}_m}{dt_X} \pm \frac{d\vec{\mathbf{W}}_m}{dt_X} \vec{\mathbf{X}}_m \right) &= (\vec{\mathbf{X}}_m (\nabla \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_m) \pm (\nabla \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_m) \vec{\mathbf{X}}_m) + \\ &+ (\vec{\mathbf{X}}_m \vec{\mathbf{f}}_{mm} \pm \vec{\mathbf{f}}_{mm} \vec{\mathbf{X}}_m) + \sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{N} (\vec{\mathbf{X}}_m \vec{\mathbf{f}}_{mn} \pm \vec{\mathbf{f}}_{mn} \vec{\mathbf{X}}_m). \end{aligned} \tag{31}$$

Проинтегрируем (31) по объему тела $\mathbf{V}_m$ и учтем, что, так как $\vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{X}}^0 + \vec{\mathbf{x}}$, то $\vec{\mathbf{W}} = \vec{\mathbf{W}}^0 + \vec{\mathbf{w}}$, а $\vec{\mathbf{w}} = d\vec{\mathbf{x}}/dt_X$. В результате получим формулу, которая содержит несколько объемных интегралов. Преобразуем некоторые из них.

Интеграл $\int\limits_{\mathbf{V}} \nabla \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}} dV = \int\limits_{\mathbf{S}} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \bullet \vec{\mathbf{n}} dS = 0$ в силу условия (8) на поверхности тела.

Интеграл $\int\limits_{\mathbf{V}} \vec{\mathbf{x}} (\nabla \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}}) dV = -\int\limits_{\mathbf{V}} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} dV$ в силу равенства $\vec{\mathbf{x}}(\nabla \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}}) = \nabla \bullet (\vec{\mathbf{x}} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}) - \widehat{\boldsymbol{\sigma}}$ и условия (8). Сделанные преобразования позволяют получить формулу:

$$\begin{aligned} M_m \left(\vec{\mathbf{X}}^0_m \frac{d\vec{\mathbf{W}}^0_m}{dt_X} \pm \frac{d\vec{\mathbf{W}}^0_m}{dt_X} \vec{\mathbf{X}}^0_m \right) + \int\limits_{\mathbf{V}_m} \boldsymbol{\rho} \left(\vec{\mathbf{x}} \frac{d\vec{\mathbf{w}}}{dt_X} \pm \frac{d\vec{\mathbf{w}}}{dt_X} \vec{\mathbf{x}} \right) dV = -\vec{\mathbf{V}}_m (\langle \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_m \rangle \pm \langle \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_m \rangle) + \\ + \int\limits_{\mathbf{V}_m} (\vec{\mathbf{x}} \vec{\mathbf{f}}_{mm} \pm \vec{\mathbf{f}}_{mm} \vec{\mathbf{x}}) dV + (\vec{\mathbf{X}}^0_m \vec{\mathbf{F}}_{mn} \pm \vec{\mathbf{F}}_{mn} \vec{\mathbf{X}}^0_m) + \sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{N} \int\limits_{\mathbf{V}_m} (\vec{\mathbf{x}} \vec{\mathbf{f}}_{mn} \pm \vec{\mathbf{f}}_{mn} \vec{\mathbf{x}}) dV, \end{aligned} \tag{32}$$

где

$$\langle\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\rangle = \frac{1}{\mathbf{V}}\int\limits_{\mathbf{V}} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} dV$$

– средний по объему тела тензор напряжений.

Сравнение формул (30) и (32) дает:

$$\int\limits_{\mathbf{V}_m} \boldsymbol{\rho}\left(\vec{\mathbf{x}}\frac{d\vec{\mathbf{w}}}{dt_X} \pm \frac{d\vec{\mathbf{w}}}{dt_X}\vec{\mathbf{x}}\right) dV = -\vec{\mathbf{V}}_m(\langle\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_m\rangle \pm \langle\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_m\rangle) +$$
$$+ \int\limits_{\mathbf{V}_m} (\vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{f}}_{mm} \pm \vec{\mathbf{f}}_{mm}\vec{\mathbf{x}}) dV + \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{N} \int\limits_{\mathbf{V}_m} (\vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{f}}_{mn} \pm \vec{\mathbf{f}}_{mn}\vec{\mathbf{x}}) dV. \tag{33}$$

В (30), (33) найдем вектор симметричной и антисимметричной частей. Этот вектор равен векторному произведению тех векторов, которые образуют мультипликативный тензор. В формуле (30) вектор симметричной части равен нулю, а вектор антисимметричной части можно представить в виде:

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_m^0}{dt_X} = \vec{\mathbf{X}}_m^0 \times \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{N} \vec{\mathbf{F}}_{mn}, \tag{34}$$

где

$$\vec{\mathbf{L}}_m^0 = \vec{\mathbf{X}}_m^0 \times M_m \vec{\mathbf{W}}_m^0$$

есть орбитальный момент импульса тела. Формула (34) представляет закон изменения орбитального момента импульса тела в инерциальной системе координат $\{0, \vec{X}\}$.

Рассмотрим антисимметричную часть формулы (33). В правой ее части первые два слагаемых являются симметричными мультипликативными тензорами. Равенство нулю антисимметричной части первого слагаемого в правой части (33) обусловлено симметрией тензора напряжений. Равенство нулю антисимметричной части второго слагаемого в правой части (33) отражает факт равенства нулю главного момента сил гравитационного притяжения между внутренними точками тела.

Антисимметричная часть мультипликативного тензора (33) равна:

$$\int\limits_{\mathbf{V}_m} \boldsymbol{\rho}\left(\vec{\mathbf{x}}\frac{d\vec{\mathbf{w}}}{dt_X} - \frac{d\vec{\mathbf{w}}}{dt_X}\vec{\mathbf{x}}\right) dV = \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{N} \int\limits_{\mathbf{V}_m} (\vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{f}}_{mn} - \vec{\mathbf{f}}_{mn}\vec{\mathbf{x}}) dV. \tag{35}$$

Так как $\vec{\mathbf{x}}(d\vec{\mathbf{w}}/dt_X) - (d\vec{\mathbf{w}}/dt_X)\vec{\mathbf{x}} = d(\vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{w}}\vec{\mathbf{x}})/dt_X$, то с учетом (10), формулу (35) можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt_X}\int\limits_{\mathbf{V}_m} \boldsymbol{\rho}(\vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{w}}\vec{\mathbf{x}}) dV = \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{N} \int\limits_{\mathbf{V}_m} (\vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{f}}_{mn} - \vec{\mathbf{f}}_{mn}\vec{\mathbf{x}}) dV. \tag{36}$$

Вектор мультипликативного тензора (36) равен:

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_m}{dt_X} = \vec{\mathbf{M}}_{mN}, \tag{37}$$

где

$$\vec{\mathbf{L}}_m = \int\limits_{\mathbf{V}_m} \vec{\mathbf{x}} \times \rho\vec{\mathbf{w}}\, dV \tag{38}$$

– вектор момента импульса деформируемого тела относительно его центра масс, а

$$\vec{\mathbf{M}}_{mN} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{N} \int\limits_{\mathbf{V}_m} (\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{f}}_{mn} - \vec{\mathbf{f}}_{mn} \times \vec{\mathbf{x}})dV \tag{39}$$

– суммарный момент внешних сил относительно центра масс тела. Формула (37) представляет закон изменения момента импульса тела относительно инерциальной системы координат $\{0, \vec{X}\}$.

Из (11) следует, что $\vec{\mathbf{w}} = d\vec{\mathbf{x}}/dt + \vec{\mathbf{\Omega}} \times \vec{\mathbf{x}}$. Подставив эту формулу под знак интеграла (38), получим:

$$\vec{\mathbf{L}}_m = \int\limits_{\mathbf{V}_m} \vec{\mathbf{x}} \times \rho\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}dV + \int\limits_{\mathbf{V}_m} \rho\vec{\mathbf{x}} \times (\vec{\mathbf{\Omega}} \times \vec{\mathbf{x}})dV. \tag{40}$$

Поскольку тензор $\vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{x}}$ симметричен, то первый интеграл в правой части формулы (40) равен нулю. Так как $\vec{\mathbf{x}} \times (\vec{\mathbf{\Omega}} \times \vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{\Omega}} \bullet (|\vec{\mathbf{x}}|^2\widehat{1} - \vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{x}})$ то:

$$\vec{\mathbf{L}}_m = M_m\vec{\mathbf{\Omega}}_m \bullet \widehat{\mathbf{J}}_m, \tag{41}$$

где

$$\widehat{\mathbf{J}} = \frac{1}{M}\int\limits_{\mathbf{V}} \rho(|\vec{\mathbf{x}}|^2\widehat{1} - \vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{x}})dV \tag{42}$$

есть тензор инерции тела, как он обычно определяется в механике [16].

Связь между тензорами инерции $\widehat{\mathbf{J}}$ и $\widehat{\mathbf{I}}$ очевидна:

$$\widehat{\mathbf{I}} = M(\mathbf{J}\widehat{\mathbf{1}} - \widehat{\mathbf{J}}), \quad \widehat{\mathbf{J}} = \frac{1}{M}(\mathbf{I}\widehat{\mathbf{1}} - \widehat{\mathbf{I}}),$$

где $\mathbf{J}$ и $\mathbf{I}$ – первые инварианты соответствующих тензоров.

Подставив формулу (41) в формулу (38), получим:

$$\frac{d\vec{\mathbf{\Omega}}_m}{dt_X} \bullet \widehat{\mathbf{J}}_m + \vec{\mathbf{\Omega}}_m \bullet \frac{d\widehat{\mathbf{J}}_m}{dt_X} = \vec{\mathbf{M}}_{mN}. \tag{43}$$

Из формулы (П.17) (см. Приложение) следует:

$$d\widehat{\mathbf{J}}/d\,t_X = d\widehat{\mathbf{J}}/d\,t + \vec{\mathbf{\Omega}} \times \widehat{\mathbf{J}}. \tag{44}$$

Подставив эту формулу в соотношение (43) и учитывая, что $\vec{\mathbf{\Omega}} \bullet (\vec{\mathbf{\Omega}} \times \widehat{\mathbf{J}}) = \vec{\mathbf{\Omega}} \times (\vec{\mathbf{\Omega}} \bullet \widehat{\mathbf{J}})$, получим уравнение Лиувилля:

$$\frac{d\vec{\mathbf{\Omega}}_m}{dt} \bullet \widehat{\mathbf{J}}_m + \vec{\mathbf{\Omega}}_m \bullet \frac{d\widehat{\mathbf{J}}_m}{dt} + \vec{\mathbf{\Omega}}_m \times (\vec{\mathbf{\Omega}}_m \bullet \widehat{\mathbf{J}}_m) = \vec{\mathbf{M}}_{mN}. \tag{45}$$

В случае удаленных друг от друга тел подынтегральное выражение в формуле (39) с погрешностью $o(l^3/R^3)$ равно:

$$\begin{aligned}
&\vec{\mathbf{x}}_m \times \frac{\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n}{|\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n|^3} - \frac{\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n}{|\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n|^3} \times \vec{\mathbf{x}}_m = \vec{\mathbf{x}}_m \times \frac{\vec{\mathbf{R}}^0_{mn}}{|\vec{\mathbf{R}}^0_{mn}|^3} - \frac{\vec{\mathbf{R}}^0_{mn}}{|\vec{\mathbf{R}}^0_{mn}|^3} \times \vec{\mathbf{x}}_m + \\
&+\vec{\mathbf{x}}_m\vec{\mathbf{x}}_m \times \bullet\left(\nabla_m \frac{\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}^0_n}{|\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}^0_n|^3}\right)\Bigg|_{\vec{\mathbf{X}}^0_m} - \left(\nabla_m \frac{\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}^0_n}{|\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}^0_n|^3}\right)\Bigg|_{\vec{\mathbf{X}}^0_m} \bullet \times \vec{\mathbf{x}}_m\vec{\mathbf{x}}_m + \\
&+\vec{\mathbf{x}}_m\vec{\mathbf{x}}_n \times \bullet\left(\nabla_n \frac{\vec{\mathbf{X}}^0_m - \vec{\mathbf{X}}_n}{|\vec{\mathbf{X}}^0_m - \vec{\mathbf{X}}_n|^3}\right)\Bigg|_{\vec{\mathbf{X}}^0_n} - \left(\nabla_n \frac{\vec{\mathbf{X}}^0_m - \vec{\mathbf{X}}_n}{|\vec{\mathbf{X}}^0_m - \vec{\mathbf{X}}_n|^3}\right)\Bigg|_{\vec{\mathbf{X}}^0_n} \bullet \times \vec{\mathbf{x}}_n\vec{\mathbf{x}}_m.
\end{aligned} \tag{46}$$

Подставим (46) в формулу (39) и примем во внимание (3), (9). В результате получим:

$$\vec{\mathbf{M}}_{mN} = \frac{1}{2}G\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{N} M_n\left(\widehat{\mathbf{I}}_m \times \bullet\left(\nabla_m \frac{\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n^0}{|\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n^0|^3}\right)\bigg|_{\vec{\mathbf{X}}_m^0} - \left(\nabla_m \frac{\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n^0}{|\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n^0|^3}\right)\bigg|_{\vec{\mathbf{X}}_m^0} \bullet \times \widehat{\mathbf{I}}_m\right).$$

Сделав вычисления, получим:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{M}}_{mN} &= \frac{1}{2}G\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{N}\left(M_n\left(3\left(\widehat{\mathbf{I}}_m \times \bullet\frac{\vec{\mathbf{R}}_{mn}^0\vec{\mathbf{R}}_{mn}^0}{|\vec{\mathbf{R}}_{mn}^0|^5} - \frac{\vec{\mathbf{R}}_{mn}^0\vec{\mathbf{R}}_{mn}^0}{|\vec{\mathbf{R}}_{mn}^0|^5}\bullet\times\widehat{\mathbf{I}}_m\right)+\right.\right.\\&+ \left.\left.\widehat{\mathbf{I}}_m \times \bullet\frac{\widehat{1}}{|\vec{\mathbf{R}}_{mn}^0|^3} - \frac{\widehat{1}}{|\vec{\mathbf{R}}_{mn}^0|^3}\bullet\times\widehat{\mathbf{I}}_m\right)\right).\end{aligned}$$

Тензор инерции и угловую скорость вращения тела как целого представим в виде:

$$\widehat{\mathbf{I}} = \widehat{J} + \widehat{\mathbf{j}}, \quad \vec{\mathbf{\Omega}} = \vec{\Omega} + \vec{\boldsymbol{\omega}},$$

где $\widehat{\mathbf{J}}$ и $\vec{\Omega}$, – соответственно, тензор инерции и угловая скорость тела в отсчетном состоянии; $\widehat{\mathbf{j}}$ и $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ – возмущения соответствующих величин, которые обусловлены способностью материала тела деформироваться. При малых деформациях в линейном по $\vec{\mathbf{u}}$ приближении из формулы (42) получим:

$$\widehat{\mathbf{j}} = \frac{1}{2M}\int\limits_{\mathbf{V}}\rho((\vec{\mathbf{u}}\bullet\vec{x} + \vec{x}\bullet\vec{\mathbf{u}})\widehat{1} - (\vec{\mathbf{u}}\vec{x} + \vec{x}\vec{\mathbf{u}}))dV.$$

Уравнение Эйлера вращения жесткого тела в присутствии внешних гравитационных сил имеет вид [11, 16]:

$$\frac{d\vec{\Omega}_m}{dt}\bullet\widehat{J}_m + \vec{\Omega}_m \times (\vec{\Omega}_m \bullet \widehat{J}_m) = \vec{M}_{mN}, \tag{47}$$

где

$$\begin{aligned}\vec{M}_{mN} &= \frac{1}{2}G\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{N}\left(M_n\left(3\widehat{I}_m \times \bullet\frac{\vec{R}_{mn}^0\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^5} - \frac{\vec{R}_{mn}^0\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^5}\bullet\times\widehat{I}_m\right)+\right.\\&+ \left.\left.\widehat{I}_m \times \bullet\frac{\widehat{1}}{|\vec{R}_{mn}^0|^3} - \frac{\widehat{1}}{|\vec{R}_{mn}^0|^3}\bullet\times\widehat{I}_m\right)\right).\end{aligned} \tag{48}$$

Сравнение формул (45) и (47) показывает, что уравнение

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{\Omega}_m}{dt}\bullet\widehat{\mathbf{j}}_m &+ (\vec{\Omega}_m + \vec{\boldsymbol{\omega}}_m)\bullet\frac{d\widehat{\mathbf{j}}_m}{dt} + \vec{\Omega}_m \times (\vec{\Omega}_m \bullet \widehat{\mathbf{j}}_m) + \frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt}\bullet\widehat{J}_m + \vec{\Omega}_m \times (\vec{\boldsymbol{\omega}}_m \bullet \widehat{J}_m) +\\&+ \vec{\boldsymbol{\omega}}_m \times (\vec{\boldsymbol{\omega}}_m \bullet \widehat{J}_m) + \vec{\boldsymbol{\omega}}_m \times (\vec{\Omega}_m \bullet \widehat{J}_m) = 0\end{aligned} \tag{49}$$

в линейном по $\vec{u}$ приближении связывает характеристики $\widehat{J}$, $\vec{\Omega}$, $\widehat{\mathbf{j}}$, $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ вращения гипотетического недеформируемого тела и реального деформируемого тела.

Для недеформируемого тела

$$d\widehat{J}/d\,t_X = \vec{\Omega} \times \widehat{J}. \tag{50}$$

Сравнение формул (44) и (49) показывает, что в линейном по $\vec{u}$ приближении:

$$d\widehat{\mathbf{j}}_m/d\,t_X = \frac{d\widehat{\mathbf{j}}_m}{d\,t} + \vec{\Omega}_m \times \widehat{\mathbf{j}}_m + \vec{\boldsymbol{\omega}}_m \times \widehat{J}_m. \tag{51}$$

При известных массах тел уравнения (28), (47)–(50) определяют внешнюю задачу динамики массивного вращающегося деформируемого тела .

4. Уравнения движения Земли

В предыдущих разделах получены уравнения внутренней и внешней задач динамики массивного вращающегося деформируемого тела. Эти уравнения описывают движения удаленных друг от друга шарообразных тел неизменной массы, которые взаимодействуют между собой в соответствии с законом тяготения. В материале тел реализуются малые перемещения, дисторсии и медленные изменения перемещений.

Полученные уравнения в принципе могут быть использованы для исследования возможных движений Земли. Однако такое исследование затруднено из-за сложности этих уравнений. Анализ реальной ситуации позволяет упростить уравнения внутренней и внешней задач динамики массивного вращающегося деформируемого тела.

Пусть в отсчетном состоянии каждое из тел является шаром. Пусть в отсчетном состоянии плотность материала в любой точке тела зависит только от расстояния между этой точкой и центром масс тела, т.е. [6]:

$$\rho(\vec{x}, t) = \rho(|\vec{x}|).$$

В этом случае тензор инерции $\widehat{J}$ каждого из тел (в том числе и Земли) в начальном состоянии является шаровым и изотропным:

$$\widehat{J} = J\,\widehat{1}, \tag{52}$$

а

$$\widehat{I} = 0. \tag{53}$$

Подставив формулу (53) в уравнение (28), получим, что центр масс Земли двигается как материальная точка той же массы. Умножив $\vec{X}^0_m$ векторно на обе части уравнения движения центра масс, получим закон изменения орбитального момента импульса Земли. Этот закон совместно с уравнением движения центра масс позволяет определить эволюцию элементов орбиты Земли [1].

Подставив тензоры инерции (52), (53) в уравнение (47) вращения Земли в отсчетном состоянии, получим, что в этом состоянии Земля вращается стационарно, т.е.

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = 0. \tag{54}$$

Подставив (53), (54) в уравнение (25) внутренней задачи, получим:

$$\begin{aligned} \rho_m \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{u}}_m}{\partial t^2} \quad &+ \quad 2\rho_m \vec{\Omega}_m \times \frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial t} + \rho_m \vec{\Omega}_m \times (\vec{\Omega}_m \times \vec{\mathbf{u}}_m) - \nabla \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_m = \\ &= \quad \vec{f}_{mm} - \rho_m \vec{\Omega}_m \times (\vec{\Omega}_m \times \vec{x}_m) + \vec{f}_{mN}, \end{aligned} \tag{55}$$

где приливообразующая сила

$$\begin{aligned} \vec{f}_{mN} \quad &= \quad G\rho_m \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m}}^{N} M_n \Bigg(\frac{\vec{x}_m}{|\vec{R}^0_{mn}|^3} - 3\frac{\vec{R}^0_{mn}\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^5} \bullet \vec{x}_m + \frac{3}{2}\Bigg(5\frac{\vec{R}^0_{mn}\vec{R}^0_{mn}\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^7} \bullet\bullet \vec{x}_m\vec{x}_m - \\ &- \quad \frac{\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^5}(\vec{x}_m \bullet \vec{x}_m) - 2\frac{\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^5} \bullet (\vec{x}_m\vec{x}_m) \Bigg)\Bigg) \end{aligned} \tag{56}$$

не зависит от тензоров инерции тел.

Подставив (52) в уравнения (49), (51), получим:

$$J_m \frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}_m}{dt} + (\vec{\Omega}_m + \vec{\boldsymbol{\omega}}_m) \bullet \frac{d\widehat{\mathbf{j}}_m}{dt} + \vec{\Omega}_m \times (\vec{\Omega}_m \bullet \widehat{\mathbf{j}}_m) = 0, \tag{57}$$

$$\frac{d\widehat{\mathbf{j}}_m}{dt_X} = \frac{d\mathbf{j}_m}{dt} + \vec{\Omega}_m \times \widehat{\mathbf{j}}_m. \tag{58}$$

Уравнения (55)–(58) описывают возможные движения упругой Земли, тензор инерции которой в отсчетном состоянии является шаровым и изотропным. Эти движения Земли обусловлены процессами, характерная длительность τ которых произвольна по сравнению с периодом ее вращения $T = 1/|\vec{\Omega}|$.

Для уравнений (55)–(58) можно выделить несколько практически важных модельных задач. Например, в случае $\tau \approx T$ эти уравнения могут быть использованы как в динамической теории земных приливов, так и для анализа колебаний Земли, которые возбуждаются возникновением и развитием в ее недрах очагов сильных землетрясений. Быстрые ($\tau/T \to 0$) и медленные ($\tau/T \to \infty$) движения также представляют интерес для многих задач геофизики. Асимптотическое представление уравнения (55) для быстрых движений описывает распространение волн в Земле в рамках лучевой теории. Асимптотическое представление уравнений (55)–(58) для медленных движений описывает процессы, которые могут быть обусловлены возможными течениями в мантии и ядре Земли, движением материков, эволюцией рельефа и т.п.

В случае медленных процессов уравнения (55)–(58) можно существенно упростить. Рассмотрим такое движение материала Земли, при котором характерное время τ изменения вектора перемещений много больше периода вращения T, т.е. $\tau/T \gg 1$. В случае очень медленных движений ($\tau/T \to \infty$) указанные уравнения допускают так называемую квазистатическую асимптотику

$$\begin{aligned}
\rho_m \vec{\Omega}_m \times (\vec{\Omega}_m \times \vec{\mathbf{u}}_m) - \nabla \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_m &= \vec{f}_{mm} - \rho_m \vec{\Omega}_m \times (\vec{\Omega}_m \times \vec{x}_m) + \vec{f}_{mN}, \\
\vec{\Omega}_m \times (\vec{\Omega}_m \bullet \widehat{\mathbf{j}}_m) &= 0, \\
\frac{d\widehat{\mathbf{j}}_m}{d\,t_X} &= \vec{\Omega}_m \times \widehat{\mathbf{j}}_m.
\end{aligned}$$

В этих уравнениях ни одна из величин не зависит от времени.

5. Основные результаты и выводы

Целью настоящей работы являлся анализ условий применения уравнений Эйлера и Лиувилля для описания вращения деформируемой Земли. Для достижения этой цели методом моментов получены уравнения, которые описывают орбитальное движение Земли, ее вращение и взаимные перемещения материала Земли.

Угловая скорость вращения Земли определена как величина, которая зависит от конфигурации Земли, ее строения и характера движений недр Земли.

Показано, что уравнение Лиувилля и его следствия являются основой исследования движений Земли. Уравнение Эйлера используется только как вспомогательное для вывода необходимых соотношений.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Производные по времени вектора и тензора в инерциальной и неинерциальной системах координат

Пусть инерциальная система координат $\{0, \vec{X}\}$ связана с пространством, а неинерциальная – $\{o, \vec{x}\}$ – с телом, которое занимает часть пространства. Система $\{o, \vec{x}\}$ изменяет свое положение и ориентацию относительно системы $\{0, \vec{X}\}$.

В деформируемом теле вектор поворота точки тела относительно мгновенной оси вращения зависит от положения этой точки в теле, т.е.

$$\vec{\mathbf{\Phi}} = \vec{\mathbf{\Phi}}(\vec{\mathbf{x}}, t). \tag{П.1}$$

Обозначим

$$\langle\vec{\mathbf{\Phi}}\rangle = \frac{1}{\mathbf{V}}\int\limits_{\mathbf{V}} \vec{\mathbf{\Phi}}\, d\mathbf{V} \tag{П.2}$$

– средний по объему тела вектор поворота. Соответствующая мгновенная угловая скорость вращения есть

$$\vec{\mathbf{\Omega}} = \frac{d}{dt}\langle\vec{\mathbf{\Phi}}\rangle. \tag{П.3}$$

Из (П.1)–(П.3) следует

$$\vec{\mathbf{\Omega}} = \left(\frac{d}{dt}\frac{1}{\mathbf{V}}\right)\mathbf{V}\langle\vec{\mathbf{\Phi}}\rangle + \frac{1}{\mathbf{V}}\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbf{V}} \vec{\mathbf{\Phi}}\, d\mathbf{V}. \tag{П.4}$$

Так как [15]

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbf{V}} \vec{\mathbf{\Phi}}\, d\mathbf{V} = \int\limits_{\mathbf{V}} \left(\frac{d\vec{\mathbf{\Phi}}}{dt} + \vec{\mathbf{\Phi}}\nabla \bullet \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t}\right) d\mathbf{V}, \quad \text{а} \tag{П.5}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\mathbf{V}}\mathbf{V}\right) = \left(\frac{d}{dt}\frac{1}{\mathbf{V}}\right)\mathbf{V} + \frac{1}{\mathbf{V}}\frac{d\mathbf{V}}{dt} = 0, \quad \text{то}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{\mathbf{V}}\right)\mathbf{V} = -\frac{1}{\mathbf{V}}\frac{d\mathbf{V}}{dt}, \tag{П.6}$$

где

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \int\limits_{\mathbf{V}} \left(\frac{d}{dt} d\mathbf{V}\right) = \int\limits_{\mathbf{V}} \nabla \bullet \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t}\, d\mathbf{V}. \tag{П.7}$$

Из (П.4)–(П.7) следует:

$$\vec{\mathbf{\Omega}} = \langle\vec{\mathbf{\Omega}}\rangle + \frac{1}{\mathbf{V}}\int\limits_{\mathbf{V}} \vec{\mathbf{\Phi}}\nabla \bullet \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t}\, d\mathbf{V} - \langle\vec{\mathbf{\Phi}}\rangle\frac{1}{\mathbf{V}}\int\limits_{\mathbf{V}} \nabla \bullet \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t}\, d\mathbf{V}, \tag{П.8}$$

где вектор

$$\langle\vec{\mathbf{\Omega}}\rangle = \frac{1}{\mathbf{V}}\int\limits_{\mathbf{V}} \frac{d\vec{\mathbf{\Phi}}}{dt}\, d\mathbf{V}$$

есть средняя по объему тела $\mathbf{V}$ угловая скорость вращения.

Так как $\vec{\mathbf{x}} = \vec{x} + \vec{\mathbf{u}}$, а $d\vec{x}/dt = 0$, то из (П.8) получим:

$$\vec{\mathbf{\Omega}} = \langle\vec{\mathbf{\Omega}}\rangle + \frac{1}{\mathbf{V}}\int\limits_{\mathbf{V}} \vec{\mathbf{\Phi}}\nabla \bullet \frac{\partial\vec{\mathbf{u}}}{\partial t}\,d\mathbf{V} - \langle\vec{\mathbf{\Phi}}\rangle\frac{1}{\mathbf{V}}\int\limits_{\mathbf{V}} \nabla \bullet \frac{\partial\vec{\mathbf{u}}}{\partial t}\,d\mathbf{V}.$$

Пусть векторная или тензорная функция $\mathbf{q}$ есть характеристика тела постоянной массы. Вывод связи производных от $\mathbf{q}$ по t в инерциальной и неинерциальной системах координат проведем в соответствии с [16].

Пусть за бесконечно малый интервал времени dt эта функция испытывает бесконечно малое изменение $d\mathbf{q}$. Составляющие этого изменения будут различны в системах координат $\{0, \vec{X}\}$ и $\{o, \vec{x}\}$, причем:

$$d\mathbf{q}|_X = d\mathbf{q}|_x - d\mathbf{q}|_{rot}. \tag{П.9}$$

Индекс около вертикальной черты указывает – в какой из систем координат определено изменение величины $\mathbf{q}$. Второе слагаемое в правой части формулы (П.9) есть изменение величины $\mathbf{q}$, которое вызвано вращением $\{o, \vec{x}\}$ относительно $\{0, \vec{X}\}$. При бесконечно малых вращениях:

$$d\mathbf{q}|_{rot} = \mathbf{q} \times d\langle\vec{\mathbf{\Phi}}\rangle. \tag{П.10}$$

Так как

$$d\langle\vec{\mathbf{\Phi}}\rangle = \vec{\mathbf{\Omega}}dt, \tag{П.11}$$

то, с учетом равенства $\mathbf{q} \times d\langle\vec{\mathbf{\Phi}}\rangle = -d\langle\vec{\mathbf{\Phi}}\rangle \times \mathbf{q}$, из (П.9)–(П.11) получим:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt_X} = \frac{d\mathbf{q}}{dt_x} + \vec{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{q}. \tag{П.12}$$

Формулу (П.12) можно рассматривать как оператор

$$\frac{d}{dt_X} = \frac{d}{dt_x} + \vec{\mathbf{\Omega}} \times\ . \tag{П.13}$$

Применив (П.13) к правой части формулы (П.12), получим:

$$\frac{d^2\mathbf{q}}{dt_X^2} = \frac{d^2\mathbf{q}}{dt_x^2} + 2\vec{\mathbf{\Omega}} \times \frac{d\mathbf{q}}{dt_x} + \vec{\mathbf{\Omega}} \times (\vec{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{q}) + \frac{d\vec{\mathbf{\Omega}}}{dt_X} \times \mathbf{q}. \tag{П.14}$$

Если $\mathbf{q} = \vec{\mathbf{\Omega}}$, то из формулы (П.12) получим $d\vec{\mathbf{\Omega}}/dt_X = d\vec{\mathbf{\Omega}}/dt_x$, что позволяет интерпретировать $\vec{\mathbf{\Omega}}$ как угловую скорость вращения тела как целого.

Если $\mathbf{q} = \vec{\mathbf{X}}$, то из формул (П.12), (П.14) получим формулы (11), (12).

Пусть существует функция $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t)$:

$$\mathbf{Q} = \int\limits_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\rho}\mathbf{q}dV,$$

а ее значение в центре масс тела $\mathbf{Q}^0 = 0$. Из формулы (10) следует:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt_X} = \int\limits_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\rho}\frac{d\mathbf{q}}{dt_X}dV. \tag{П.15}$$

Из (П.12), (П.14), (П.15) следует:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt_X} = \frac{d\mathbf{Q}}{dt_x} + \vec{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{Q}, \tag{П.16}$$

$$\frac{d^2\mathbf{Q}}{dt_X^2} = \frac{d^2\mathbf{Q}}{dt_x^2} + 2\vec{\mathbf{\Omega}} \times \frac{d\mathbf{Q}}{dt_x} + \vec{\mathbf{\Omega}} \times (\vec{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{Q}) + \frac{d\vec{\mathbf{\Omega}}}{dt_x} \times \mathbf{Q}. \tag{П.17}$$

В [13] приведена формула (П.16) для случая, когда $\mathbf{Q}$ – тензор инерции недеформируемого тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смарт У.М.* Небесная механика. М.: Мир, 1965. 504 с.
2. *Вуллард Э.* Теория вращения Земли около центра масс. М.: Физматгиз, 1953. 167 с.
3. *Мунк В., Макдоналд Г.* Вращение Земли: Геофизические приложения. М.: Мир, 1960. 323 с.
4. *Магнус К.* Гироскоп: Теория и применение. М.:Мир, 1974. 526 с.
5. *Мельхиор П.* Физика и динамика планет. М.: Мир. Т.1. 1975. 576 с.; Т. 2. 1976. 483 с.
6. *Буллен К.Е.* Плотность Земли. М.: Мир, 1978. 442 с.
7. *Lambeck K.* Earth's variable rotation. Cambr.: Cambr. Univ. Press., 1980. 449 p.
8. *Ержанов Ж.С., Калыбаев А.А.* Общая теория вращения Земли. М.: Наука, 1984. 255 с.
9. *Moritz H.* The figure of the Earth: Theoretical geodesy and the Earth's interior. Karlsruhe: Wichmann. 1990. 279 p.
10. *Молоденский М.С.* Общая теория упругих колебаний Земли. М.: Недра, 1989. 78 с.
11. *Мориц Г., Мюллер А.* Вращение Земли: Теория и наблюдения. Киев: Наук. думка, 1992. 512 с.
12. *Dahlen E.A.* Theoretical global seismology. Prinston: Prinston Univ. Pr., 1998. 1025 p.
13. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гостехтеориздат, 1955. 504 с.
14. *Чандрасекхар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973. 288 с.
15. *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974. 318 с.
16. *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Наука, 1975. 415 с.
17. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк., 1983. 400 с.