

И. ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ СЕЙСМОЛОГИИ

УДК 550.311: 517.984.54

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СРЕДЫ ПО МОДАМ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН: ОТ ЛЯВА К РЭЛЕЮ

В.М. Маркушевич, С.Г. Киселев

Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук, Москва

Рассматривается задача восстановления скоростей Р- и S-волн и плотности горизонтально-однородного полупространства по характеристикам поверхностных волн Рэлея. Приведены примеры численного восстановления для полупространства с квадратично убывающей плотностью и однородного слоя на отражающем полупространстве.

LAYERED MODEL RECONSTRUCTION BY SURFACE WAVE MODES: FROM LOVE TO RAYLEIGH

V.M. Markushevich, S.G. Kiselev

International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow

The paper deals with the problem of determination of the P- and S-wave velocities and density in a layered half-space by the amplitudes and wave-numbers of the Rayleigh waves. An examples of determination for half-space with quadratically decreasing density and for uniform layer underlying reflecting half-space are given.

Введение

В этой работе продолжено изучение следующей задачи: найти достаточно хорошую оценку параметров упругой среды по характеристикам мод поверхностных волн, которые возбуждаются в такой среде

на некоторой фиксированной частоте. Это исследование продвинуто существенно дальше для простых колебаний типа Лява, чем для более сложных рэлеевских колебаний. Особенно заметна разница в нашем умении моделировать задачи лявовского и рэлеевского типов. Для поверхностных волн Лява разработаны компьютерные программы, которые позволяют рассчитывать моды и обращать их, т.е. преобразовывать их в оценки параметров упругой среды. Для волн Рэлея формулы решения обратной задачи хотя и были получены, но нет ни одного примера их использования.

Основная цель настоящей работы – проверка формул решения обратной задачи для волн Рэлея и исследование некоторых свойств этих формул. Заметим, что мы рассматриваем только такие среды, у которых модуль сдвига вблизи поверхности постоянен, т.е. его производная на поверхности равна нулю. Для этого частного случая решение обратной задачи получено в работах [1, 2], а общая ситуация рассмотрена в [3].

При тестировании формул мы руководствовались следующими соображениями. Краевая задача Рэлея в форме Штурма–Лиувилля является более сложной, чем матричная краевая задача Штурма–Лиувилля, так как содержит спектральный параметр в краевом условии. Поэтому в качестве промежуточного звена между скалярной краевой задачей Штурма–Лиувилля, собственными функциями которой являются волны Лява, и рэлеевской краевой задачей полезно рассмотреть матричную краевую задачу Штурма–Лиувилля. Матричная краевая задача в некоторых случаях распадается на две скалярные, следовательно и решение обратной матричной задачи в этих случаях должно даваться проверенными формулами для решения скалярной задачи. Постепенно усложняя краевые условия, мы можем следить за появляющимися особенностями решения.

Работа строится следующим образом. В разд. 1 приводятся формулы для восстановления потенциала по собственным значениям краевой задачи и соответствующим вычетам функции Вейля. В сейсмологической терминологии те же исходные данные для решения обратной задачи имеют смысл волновых чисел и нормированных амплитуд мод поверхностных волн. Формулы приводятся для волн Лява и Рэлея.

В разд. 2 рассматривается матричная обратная задача Штурма–Лиувилля с таким потенциалом и краевым условием, что она распадается на две скалярные задачи. Показано, что формулы обращения для матричной задачи сводятся при этом к скалярным.

В разд. 3 краевые условия усложняются так, чтобы спектр матричной задачи все еще оставался объединением спектров двух скалярных задач, но вычеты функции Вейля уже не сводились к скалярным.

В разд. 4 вводится понятие о допустимых краевых условиях, чтобы перейти к более общим краевым условиям. Рассматривая только допустимые краевые условия, мы показываем, что при некоторых из них исходный потенциал не восстанавливается.

В разд. 5 исследуется рэлеевская краевая задача, описывающая конкретное непрерывно слоистое полупространство. Мы ослабляем требование к решению обратной задачи, стремясь найти не весь матричный потенциал, а только его слагаемое, которое пропорционально квадрату частоты. Показано, что это слагаемое определяется тем лучше, чем выше частота. При решении обратной задачи Лява квадрат частоты умножается на квадрат медленности, т.е. обратной величины к скорости. Поэтому плотностной разрез по этой функции не определяется. В случае Рэля матричная функция при квадрате частоты более информативна. В этом разделе доказывается, что по этой матричной функции можно найти обе скорости Р- и S-волн и плотность как функции глубины.

1. Основные формулы решения обратной спектральной задачи

Рассмотрим скалярное уравнение Штурма–Лиувилля

$$y''(x) - \xi^2 y(x) = -q(x)y(x) \quad (1)$$

на полуоси $x \in [0, \infty)$. При $x = 0$ решение должно удовлетворять краевому условию

$$y'(0) - \theta y(0) = 0 \quad \text{или} \quad y(0) = 0. \quad (2)$$

При $x \rightarrow \infty$ предполагается, что $y(x) \rightarrow 0$. Рассматривается ограниченный и быстро убывающий при $x \rightarrow \infty$ потенциал $q(x)$. Заметим, что решение $y(x)$ является функцией не только независимого аргумента x , но и спектрального параметра ξ . Поэтому удобно ввести обозначение $y(x) = y(x, \xi)$. При решении обратной задачи ее исходными данными являются полюса и вычеты функции Вейля

$$E(\xi) = y(0, \xi) \left(\frac{dy}{dx}(0, \xi) - \theta y(0, \xi) \right)^{-1},$$

или ее особого случая – импеданса

$$J(\xi) = \left(\frac{dy}{dx}(0, \xi) \right) / y(0, \xi).$$

По этим данным требуется восстановить потенциал $q(x)$. Под восстановлением понимается вычисление $\tilde{q}(x)$ – достаточно точной оценки потенциала $q(x)$. В качестве критерия достаточной точности восстановления было выбрано совпадение дискретных спектров краевой задачи (1)–(2) для исходного и восстановленного потенциалов. Непрерывные части спектра при этом могут и не совпадать. Такой подход основан на экспериментальных наблюдениях, которые показывают, что при достаточно высокочастотных колебаниях почти вся информация о потенциале сосредоточена в дискретном спектре соответствующей краевой задачи. В некоторых случаях это соображение можно точно доказать [2].

В работе [4] доказано следующее.

Предложение 1. Потенциал $\tilde{q}(x)$ определяется по формуле

$$\tilde{q}(x) = 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \det \mathbf{W}(x). \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{W}(x)$ – квадратная матрица порядка $n \times n$, где n – количество полюсов у функции Вейля или у импеданса. Для случая, когда задана функция Вейля $E(\xi)$, общий элемент матрицы $\mathbf{W}(x)$ имеет вид

$$w_{sr} = 2 \left(\frac{sh((\xi_s + \xi_r)x)}{\xi_s + \xi_r} + (1 - \delta_{sr}) sh \frac{((\xi_s - \xi_r)x)}{\xi_s - \xi_r} + \delta_{sr} \left(x + \frac{2}{C_s} \right) \right). \quad (4)$$

Здесь ξ_i – волновые числа мод Лява, C_i – вычеты функции Вейля, а $\delta_{sr} = \begin{cases} 1, & s = r \\ 0, & s \neq r \end{cases}$ – символ Кронекера.

Если задан импеданс, то общий элемент матрицы $\mathbf{W}(x)$ имеет вид

$$w_{sr} = 2 \left(\frac{sh((\xi_s + \xi_r)x)}{\xi_s + \xi_r} - (1 - \delta_{sr}) sh \frac{((\xi_s - \xi_r)x)}{\xi_s - \xi_r} - \delta_{sr} \left(x - \frac{2\xi_s^2}{C_s} \right) \right).$$

В работе [5] доказано, что более сложный случай задачи Рэля сводится к матричной краевой задаче Штурма–Лиувилля. При этом уравнение и краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{Y}}{dx^2} - \xi^2 \mathbf{Y} &= \mathbf{U} \mathbf{Y}(x, \xi), & 0 \leq x, \xi < \infty, \\ \frac{d \mathbf{Y}}{dx} - \Theta(\xi^2) \mathbf{Y} &= 0 & \text{при } x = 0, \\ \mathbf{Y} &\rightarrow 0 & \text{при } x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь \mathbf{U} и Θ – матрицы 2×2 ; $\mathbf{Y}(x, \xi)$ – также матрица 2×2 , являющаяся решением краевой задачи (5); $\mathbf{Y}(x, \xi)$ можно также рассматривать как объединение двух линейно независимых решений-столбцов краевой задачи (5).

Предполагается, что потенциал \mathbf{U} достаточно быстро стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$. Он не является, вообще говоря, симметричным и определяется с помощью матрицы-функции \mathbf{Q} по формуле

$$\mathbf{U} = \mathbf{Q}' + \mathbf{Q}^2, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{Q} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{G}, \quad (7)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{\mu'}{\mu} & -\frac{\mu(3\mu+\lambda)}{2\kappa(2\mu+\lambda)} \\ \kappa \left(\frac{\rho\omega^2}{\mu^2} + \left(\frac{1}{\mu}\right)'' \right) & -\frac{\mu'}{\mu} \end{pmatrix}.$$

Матрица-функция \mathbf{G} удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{G}' = \mathbf{L} \mathbf{G},$$

$$\mathbf{G}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu(\lambda+\mu)}{2\kappa(\lambda+2\mu)} \\ -\kappa \left(\frac{1}{\mu}\right)'' & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где λ, μ – параметры Ламе; ρ – плотность; ω – круговая частота; κ – фиксированная константа, например $\mu(0)$. Матрица Θ из краевого условия задается формулой

$$\Theta = \begin{pmatrix} \frac{\mu'}{\mu} & -\frac{\mu^2}{2\kappa(\lambda+2\mu)} \\ \frac{-2\kappa\xi^2}{\mu} + \frac{\kappa\rho\omega^2}{\mu^2} + \kappa \left(\frac{1}{\mu}\right)'' & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Еще раз обратим внимание на то, что матрица Θ содержит спектральный параметр ξ^2 ; задача с такими краевыми условиями создает значительные сложности даже в скалярном случае и называется задачей с упругим закреплением.

В работе [1] доказано:

Предложение 2. Приближение $\tilde{\mathbf{U}}(x) = \{\tilde{u}_{sr}\}$, $s, r = 1, 2$, к потенциалу $\mathbf{U}(x)$ определяется по формуле

$$\tilde{u}_{sr} = (-1)^{m+1} \frac{d}{dx} \frac{\det \Gamma_{\beta_r \alpha_s}}{\det \Gamma}, \quad \Gamma_{\beta_r \alpha_s} = \begin{pmatrix} \alpha_s & 0 \\ \Gamma & \beta_r \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где m – число принятых во внимание точек ξ_j дискретного спектра.

Вычет \mathbf{M}_j функции Вейля

$$\mathbf{E}(\xi) = \mathbf{Y}(0, \xi) \left(\frac{d}{dx} \mathbf{Y}(0, \xi) - \Theta \mathbf{Y}(0, \xi) \right)^{-1}$$

или ее особого случая – импеданса

$$\mathbf{J}(\xi) = \left(\frac{d}{dx} \mathbf{Y}(0, \xi) \right) \mathbf{Y}(0, \xi)^{-1} \quad (11)$$

в точке ξ_j равен вырожденной матрице

$$\mathbf{M}_j = \begin{pmatrix} k_j C_{j1} & l_j C_{j1} \\ k_j C_{j2} & l_j C_{j2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_j \\ l_j \end{pmatrix} (C_{j1} \ C_{j2}).$$

В формуле (10) $\mathbf{\Gamma}$ – квадратная матрица порядка m , у которой на пересечении s -й строки и j -го столбца стоит элемент

$$\gamma_{sj} = \begin{cases} C_{j1}(k_j b_{j11} + l_j b_{j21}) + C_{j2}(k_j b_{j12} + l_j b_{j22}) + \frac{2e^{-2\xi_j x}}{\Delta}, & s = j \\ C_{j1}(k_s d_{sj11} + l_s d_{sj21}) + C_{j2}(k_s d_{sj12} + l_s d_{sj22}), & s \neq j \end{cases} \quad (12)$$

В формуле (12) $\Delta = 1 - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}$, b_{jpq} и d_{sjpq} – p -, q -элементы матриц \mathbf{B}_j и \mathbf{D}_{sj} , соответственно; $p, q = 1, 2$, где

$$\mathbf{B}_j = \left(\frac{\mathbf{J}_0(-i2\xi_j) - e^{-4\xi_j x} \mathbf{J}_0(i2\xi_j)}{4\xi_j} + e^{-2\xi_j x} x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \Delta - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} e^{-2\xi_j x},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{j\nu} &= \Delta \left(\frac{\mathbf{J}_0(-i(\xi_j + \xi_\nu)) - e^{-2(\xi_j + \xi_\nu)x} \mathbf{J}_0(i(\xi_j + \xi_\nu))}{2(\xi_j + \xi_\nu)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-2\xi_\nu x} \mathbf{J}_0(-i(\xi_j - \xi_\nu)) - e^{-2\xi_j x} \mathbf{J}_0(i(\xi_j - \xi_\nu))}{2(\xi_j - \xi_\nu)} \right), \end{aligned}$$

а матрица-функция $\mathbf{J}_0(x)$ задается формулой

$$\mathbf{J}_0(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2ix & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\Delta}.$$

Элементы α_{js} строки α_s ($s = 1, 2, j = 1, \dots, m$) и элементы β_{ir} столбца β_r ($r = 1, 2, i = 1, \dots, m$) определяются выражениями

$$\begin{aligned} \alpha_{j1} &= k_j h_{j11} + l_j h_{j21}, & \alpha_{j2} &= k_j h_{j12} + l_j h_{j22}, \\ \beta_{j1} &= g_{j11} C_{j1} + g_{j12} C_{j2}, & \beta_{j2} &= g_{j21} C_{j1} + g_{j22} C_{j2}. \end{aligned}$$

Здесь h_{jpq} и g_{jpq} ($p, q = 1, 2$) – элементы матриц \mathbf{H}_j и \mathbf{G}_j , соответственно, где

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_j &= -\frac{\mathbf{H}_j}{\Delta^2}, \\ \mathbf{H}_j &= -\mathbf{J}_0(i\xi_j)^{-1} - e^{-2\xi_j x} \mathbf{J}_0(-i\xi_j)^{-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Кроме обратной задачи для волн Лява и матричной обратной задачи для волн Рэлея мы рассматриваем также обратную задачу для матричного уравнения Штурма–Лиувилля. Эта задача проще, чем задача Рэлея, так как в краевом условии в начале координат не участвует спектральный параметр ξ^2 . Эта задача получается из задачи Рэлея, если положить \mathbf{J}_0 равным единичной матрице $\mathbf{J}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. При этом матрицы \mathbf{V}_j , $\mathbf{D}_{j\nu}$, \mathbf{H}_j и \mathbf{G}_j становятся скалярными.

В работе [1] также доказано:

Предложение 3. 1) потенциал $\tilde{q}(x)$, задаваемый формулой (3), удовлетворяет соотношению $\tilde{q}(0) = 0$; 2) элементы \tilde{u}_{sr} потенциала $\tilde{\mathbf{U}}(x)$, задаваемые формулой (10), удовлетворяют соотношениям

$$\tilde{u}_{sr}(0) = 0.$$

Предложение 3 доказывается непосредственным вычислением.

2. Матричная краевая задача Штурма–Лиувилля, распадающаяся на две скалярные

Рассмотрим простейший случай матричной задачи Штурма–Лиувилля, которая сводится к двум скалярным. Пусть потенциал

$$\mathbf{U}(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \text{const}, & 0 \leq x \leq \alpha, \\ 0, & \alpha < x < \infty, \end{cases}$$

а краевое условие

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Y}}{dx} - \Theta\mathbf{Y} &= 0 && \text{при } x = 0, \\ \mathbf{Y} &\rightarrow 0 && \text{при } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Рассмотрим линейное преобразование

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}\mathbf{Z},$$

где матрица \mathbf{T} выбрана так, чтобы потенциал в преобразованном уравнении стал диагональным

$$\mathbf{V} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица \mathbf{T} при этом оказывается равной

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} b & \lambda_2 - d \\ \lambda_1 - a & c \end{pmatrix},$$

где $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(a + d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc})$.

Допустим, что матрица Θ в краевом условии при преобразовании \mathbf{T} также становится диагональной

$$\mathbf{Z}' - \mathbf{T}^{-1}\Theta\mathbf{T}\mathbf{Z} = 0, \quad x = 0,$$

где $\mathbf{T}^{-1}\Theta\mathbf{T} = \Theta_1 = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_4 \end{pmatrix}$,

причем здесь и дальше мы будем использовать следующую индексацию элементов матрицы 2×2 :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда матричная краевая задача распадается на две скалярные краевые задачи

$$z''_{1,2} - \xi^2 z_{1,2} = \lambda_{1,2}^2 z_{1,2}$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} z'_{1,2} - \theta_{1,4} z_{1,2} &= 0 \quad \text{при } x = 0, \\ z_{1,2} &\rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{14}$$

Решения этих задач даются формулами (3) и (4). Выясним, какой вид при этом приобретают матрицы $\mathbf{\Gamma}$ и $\mathbf{\Gamma}_{\beta_r \alpha_s}$ ($s, r = 1, 2$), определяющие решение матричной краевой задачи. Допустим, что дискретный спектр первой скалярной задачи равен ξ_1, \dots, ξ_{n_1} с вычетами в этих точках A_1, \dots, A_{n_1} ; а второй скалярной задачи — $\eta_1, \dots, \eta_{n_2}$ с вычетами B_1, \dots, B_{n_2} .

Тогда функция Вейля матричной задачи выражается через функции Вейля скалярных задач следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\xi) &= \mathbf{Y}(0, \xi) \left(\frac{d\mathbf{Y}}{dx}(0, \xi) - \Theta\mathbf{Y}(0, \xi) \right)^{-1} = \\ &= \mathbf{T}\mathbf{Z}(0, \xi) \left(\frac{d\mathbf{Z}}{dx}(0, \xi) - \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_4 \end{pmatrix} \mathbf{Z}(0, \xi) \right)^{-1} \mathbf{T}^{-1} = \\ &= \mathbf{T} \begin{pmatrix} z_1(z'_1 - \theta_1 z_1)^{-1} & 0 \\ 0 & z_2(z'_2 - \theta_4 z_2)^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{T}^{-1} = \\ &= \mathbf{T} \begin{pmatrix} E_1(\xi) & 0 \\ 0 & E_2(\xi) \end{pmatrix} \mathbf{T}^{-1}. \end{aligned}$$

Пусть функции Вейля скалярных задач задаются формулами

$$E_1(\xi) = \frac{-1}{\xi + \theta_1} - \sum_{i=1}^{n_1} \frac{A_i}{\xi^2 - \xi_i^2},$$

$$E_2(\xi) = \frac{-1}{\xi + \theta_4} - \sum_{i=1}^{n_2} \frac{B_i}{\xi^2 - \eta_i^2}.$$

Аппроксимируя функции Вейля таким образом, мы сохраняем дискретные спектральные функции скалярных задач и асимптотический характер поведения функций Вейля на бесконечности. Что касается непрерывной части спектральной функции, то она, конечно, искажается. Этим вычетам скалярных функций соответствуют следующие вычеты матричной функции Вейля:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\xi^2=\xi_i^2} \mathbf{E}(\xi) &= -A_i \mathbf{T} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{T}^{-1} = \\ &= \frac{-A_i}{\det \mathbf{T}} \begin{pmatrix} bc & -b(\lambda_2 - d) \\ (\lambda_1 - a)c & -(\lambda_1 - a)(\lambda_2 - d) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\xi^2=\eta_i^2} \mathbf{E}(\xi) &= -B_i \mathbf{T} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{T}^{-1} = \\ &= \frac{-B_i}{\det \mathbf{T}} \begin{pmatrix} -(\lambda_1 - a)(\lambda_2 - d) & b(\lambda_2 - d) \\ -(\lambda_1 - a)c & bc \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (16)$$

Положим $\eta_i = \xi_{i+n_1}$, $n_1 = n$, $n_1 + n_2 = m$. Воспользуемся формулой (12), где матрицы \mathbf{B}_j , $\mathbf{D}_{j\nu}$, \mathbf{H}_j и \mathbf{G}_j являются скалярными, так как рассматривается матричная задача Штурма–Лиувилля, а не задача Рэлея. Тогда

$$\begin{aligned} d_{sj11} = d_{sj22} &= \frac{\operatorname{sh}(\xi_i + \xi_s)x}{\xi_i + \xi_s} + \frac{\operatorname{sh}(\xi_i - \xi_s)x}{\xi_i - \xi_s}, \\ b_{j11} = b_{j22} &= \frac{\operatorname{sh}2\xi_i x}{2\xi_i} + x, \\ h_{j11} = h_{j22} &= -2\operatorname{ch}\xi_j x, \\ g_{j11} = g_{j22} &= 2\operatorname{ch}\xi_j x. \end{aligned}$$

Теперь элементы матрицы $\mathbf{\Gamma}$ вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma_{jj} &= b_{j11}(C_{j1}k_j + C_{j2}l_j) + 2, \\ \gamma_{sj} &= d_{j11}(C_{j1}k_s + C_{j2}l_s); \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} k_i &= \frac{A_i}{\det \mathbf{T}} c & C_{i1} &= b \\ l_i &= -\frac{A_i}{\det \mathbf{T}} (\lambda_2 - d) & C_{i2} &= \lambda_1 - a \end{aligned} \right\} \text{при } 1 \leq i \leq n;$$

$$\left. \begin{aligned} k_i &= -\frac{B_i}{\det \mathbf{T}} (\lambda_1 - a) & C_{i1} &= \lambda_2 - d \\ l_i &= \frac{B_i}{\det \mathbf{T}} b & C_{i2} &= c \end{aligned} \right\} \text{при } n < i \leq m;$$

$$C_{i1}k_j + C_{i2}l_j = \begin{cases} A_j, & 1 \leq j \leq n \\ B_j, & n < j \leq m; \end{cases}$$

$$C_{j1}k_s + C_{j2}l_s = \begin{cases} A_s, & 1 \leq j, s \leq n \\ B_s, & n < j, s \leq m \\ 0, & j \text{ и } s \text{ в разных интервалах.} \end{cases}$$

Заметим, что в приведенных формулах допущена некоторая некорректность: мы пользуемся видом потенциала $\mathbf{U}(x)$ и матрицей \mathbf{T} , которые в обратной задаче нам неизвестны. Однако нашей задачей сейчас является выяснение структуры матрицы $\mathbf{\Gamma}$, которая не зависит от того, что нам известно из прямой задачи.

Матрицы $\mathbf{\Gamma}_{\beta_r \alpha_s}$ вычисляются с помощью матрицы $\mathbf{\Gamma}$ и векторов

$$\alpha_{j1} = \begin{cases} \frac{A_j}{\det \mathbf{T}} ch_{j11}, & 1 \leq j \leq n \\ -\frac{B_j}{\det \mathbf{T}} (\lambda_1 - a) h_{j11}, & n < j \leq m, \end{cases}$$

$$\alpha_{j2} = \begin{cases} -\frac{A_j}{\det \mathbf{T}} (\lambda_2 - d) h_{j11}, & 1 \leq j \leq n \\ \frac{B_j}{\det \mathbf{T}} bh_{j11}, & n < j \leq m, \end{cases}$$

$$\beta_{j1} = \begin{cases} bg_{j11}, & 1 \leq j \leq n \\ (\lambda_2 - d)g_{j11}, & n < j \leq m, \end{cases}$$

$$\beta_{j2} = \begin{cases} (\lambda_1 - a)g_{j11}, & 1 \leq j \leq n \\ cg_{j11}, & n < j \leq m. \end{cases}$$

Следовательно, $\det \mathbf{\Gamma}$ распадается на произведение $\det \mathbf{\Gamma}_1 \times \det \mathbf{\Gamma}_2$, где $\mathbf{\Gamma}_1$ и $\mathbf{\Gamma}_2$ соответствуют скалярным задачам. Матрица $\mathbf{\Gamma}_{\beta_r \alpha_s}(x)$ имеет вид

$$\Gamma_{\beta_r \alpha_s} = \begin{matrix} & \begin{matrix} n & m-n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \Gamma_1^T & 0 & \beta_1 \\ 0 & \Gamma_2^T & \beta_2 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Производные элементов матриц Γ_i представляются в виде произведения соответствующих элементов строки α и столбца β . Благодаря этому свойству отношение детерминанта матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha_i & 0 \\ \Gamma_i^T & \beta_i \end{pmatrix}$$

к детерминанту матрицы Γ_i^T равно $(-1)^{m+1} \frac{d}{dx} \ln \det \Gamma_i$.

Так как разумным приближением является $\lambda_i = 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \det \Gamma_i$, то, например, для элемента a получаем следующее приближение:

$$\bar{a} = (-1)^{m+1} \frac{d}{dx} \frac{\det \Gamma_{\beta_1 \alpha_1}}{\det \Gamma} = \frac{bc\lambda_1 - (bc - \det \mathbf{T})\lambda_2}{\det \mathbf{T}}.$$

Аналогичный ответ получается для других элементов матричного потенциала. Точность этого приближения такая же, как и при решении скалярных обратных задач, на которые распадается матричная.

Пример. Приведем пример восстановления потенциала в рассматриваемом случае распада матричной задачи на две скалярные.

Пусть потенциал

$$\mathbf{U}(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -130 & -3969 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{const}, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & 2 < x < \infty, \end{cases}$$

а матрица в краевом условии

$$\Theta = \begin{pmatrix} \frac{565}{16} & \frac{19845}{16} \\ -\frac{5}{16} & -\frac{85}{16} \end{pmatrix}.$$

Можно проверить, что преобразование подобия с матрицей

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -3969 & -81 \\ 81 & 1 \end{pmatrix}$$

потенциал приводится к диагональному виду

$$\mathbf{V} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{U} \mathbf{T} = \begin{pmatrix} -49 & 0 \\ 0 & -81 \end{pmatrix},$$

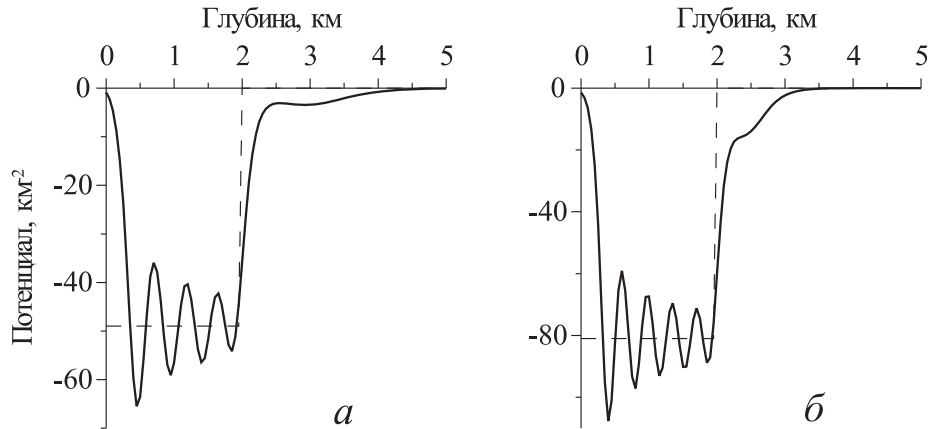


Рис. 1. Восстановленные скалярные потенциалы первой (а) и второй (б) скалярных задач. Пунктиром показаны точные потенциалы

а краевое условие при $x = 0$ распадается на два скалярных краевых условия (14) с $\theta_1 = 10$ и $\theta_4 = 20$. Тогда потенциалы скалярных задач восстанавливаются, как показано на рис.1.

Элементы же матричного потенциала определяются по формуле (10), в которой матричные вычеты M_j есть вычеты в полюсах функции Вейля (11); они являются вырожденными матрицами ранга 1. Результат восстановления элементов матричного потенциала показан на рис. 2.

Если матричная задача распадается на две скалярные, то матричные вычеты также можно получить из скалярных по формулам (15), (16). Заметим, что в рассматриваемом примере количество точек в спектре первой скалярной задачи равно 5, а во второй: 6.

3. Случай объединения спектров скалярных задач

Рассмотрим несколько более сложный случай, когда система уравнений распадается на два независимых скалярных уравнения, а краевые условия не распадаются, но один из внедиагональных элементов матрицы Θ_1 в преобразованном краевом условии оказывается равным нулю. В этом случае спектр матричной задачи, как и прежде, оказывается объединением спектров скалярных задач, но матричные вычеты уже не могут быть получены только из скалярных вычетов.

Действительно, если

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 \\ \theta_3 & \theta_4 \end{pmatrix},$$

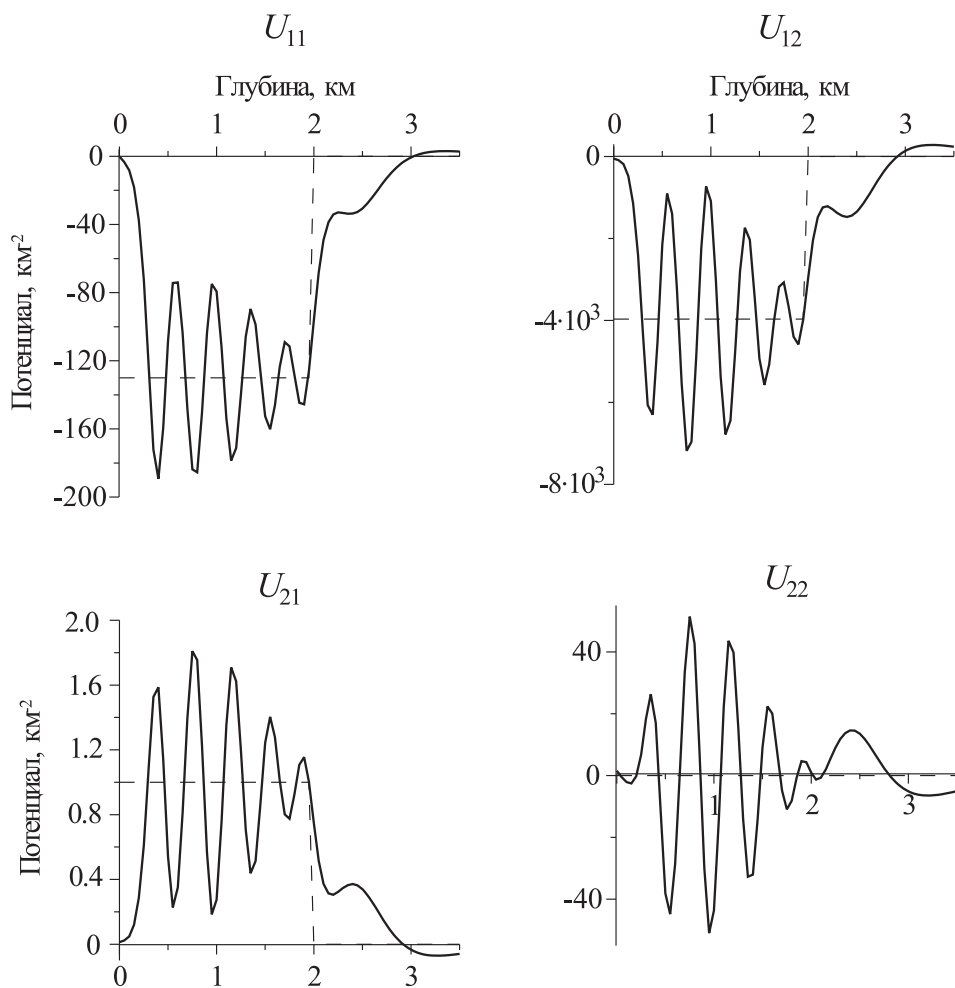


Рис. 2. Восстановленный матричный потенциал (расположение рисунков соответствует расположению элементов в матрице потенциала U). Пунктиром показан точный потенциал

то вычет функции Вейля определяется, например, в точке ξ_i , $1 \leq i \leq n$, следующим образом:

$$\operatorname{Res}_{\xi^2 = \xi_i^2} \mathbf{E}(\xi) = \operatorname{Res}_{\xi^2 = \xi_i^2} \begin{pmatrix} E_1(\xi) & 0 \\ \theta_3 E_1(\xi) E_2(\xi) & E_2(\xi) \end{pmatrix}.$$

Пример. Пример восстановления потенциала в данном случае при $\theta_3 = -500$ показан на рис. 3. Изменение θ_3 в диапазоне от -100 до $+100$ слабо влияет на результат восстановления. При положительных θ_3 размах колебаний увеличивается, а при отрицательных – уменьшается;

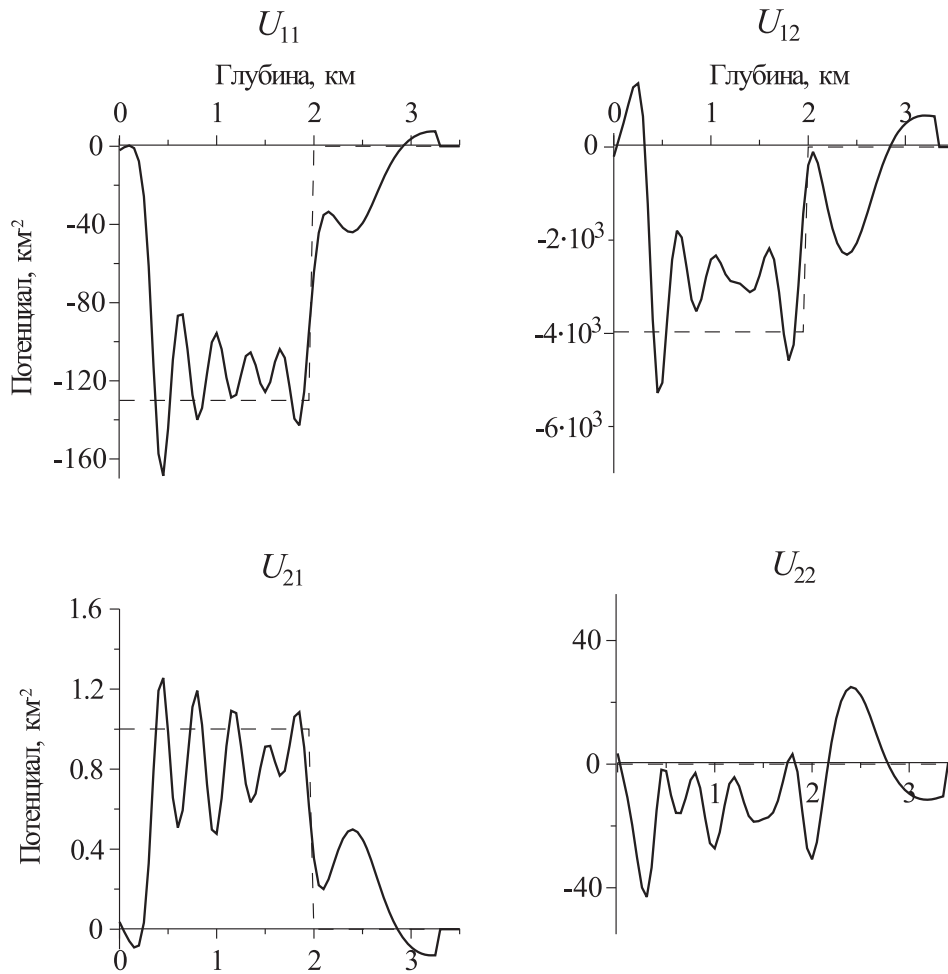


Рис. 3. Восстановленный матричный потенциал при недиагональной матрице Θ (расположение рисунков соответствует расположению элементов в матрице потенциала U). Пунктиром показан точный потенциал

однако при отрицательных θ_3 среднее значение восстановленного потенциала оказывается немного смещенным по отношению к точному значению.

4. Общее граничное условие для матричной задачи

Пусть теперь и элемент θ_2 в матрице Θ_1 из граничного условия не равен нулю. В этом случае краевая задача становится более сложной в двух отношениях: во-первых, ее спектр не обязан быть вещественным и,

во-вторых, на матрицу Θ_1 необходимо наложить дополнительные ограничения. Начнем с этих ограничений.

Допустимые граничные условия. Аппроксимация потенциала, которую мы используем, основана на предположении, что потенциал может быть в основном восстановлен по дискретному спектру задачи и вычетам в точках спектра, т.е. по дискретной части спектральной функции. Поэтому в приближении к функции Вейля, которое используется нами, дискретная часть спектральной функции совпадает с той, которую имеет исходная функция Вейля, а непрерывная часть такая же, как у нулевого потенциала. При этом мы предполагаем, что дискретный спектр нашей краевой задачи в том случае, когда потенциал нулевой, является пустым, т.е. не содержит ни одной точки. С этим и связано понятие о допустимых краевых условиях.

Определение. Допустимым краевым условием называется такое условие, при котором для нулевого потенциала дискретный спектр пуст. Для матричной задачи Штурма–Лиувилля в случае нулевого потенциала $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\xi x}$, поэтому краевое условие

$$\det(\mathbf{Z}' - \Theta_1 \mathbf{Z}) = 0 \text{ при } x = 0$$

переписывается в виде

$$\det \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \theta_3 & \theta_4 \end{pmatrix} \right) = 0$$

или $\xi^2 + (\theta_1 + \theta_4)\xi - \theta_2\theta_3 + \theta_1\theta_4 = 0$.

Это квадратное уравнение не должно иметь корней в правой комплексной полуплоскости, т.е. выполняется условие

$$\operatorname{Re} \left(-\theta_1 - \theta_4 \pm \sqrt{(\theta_1 - \theta_4)^2 + 4\theta_2\theta_3} \right) < 0.$$

Заметим, что в примерах, рассмотренных в предыдущих разделах, знаки θ_1 и θ_4 выбирались в соответствие с этим требованием. Заметим также, что в более сложном случае краевых условий для задачи Рэля, которую мы будем рассматривать дальше, в коэффициенты краевого условия входит спектральный параметр ξ^2 . Это более сложное краевое условие, как оказывается, удовлетворяет введенному ограничению, т.е. является допустимым.

Перейдем теперь ко второму усложнению, которое вызывается использованием общего краевого условия, а именно – к появлению комплексных точек в спектре. Покажем, что их действительно нужно учитывать для того, чтобы получить достаточно точную аппроксимацию

потенциала, по крайней мере, если их мнимые части не слишком велики. С появлением комплексных корней матрицы Γ и $\Gamma_{\beta_r\alpha_s}$ становятся также комплексными, что, в принципе, не приводит к дополнительным сложностям. Однако, используя сопряженность комплексных корней и матричных вычетов, эти матрицы можно преобразовать к вещественным. Опишем это преобразование.

Преобразование комплексных матриц Γ и $\Gamma_{\beta_r\alpha_s}$ в вещественные. Пусть матрица Γ содержит две пары комплексно сопряженных точек спектра, расположенных на первом и m -м местах. Тогда ее схематически можно изобразить в следующем виде:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{a}_{12}^T & \dots & \mathbf{A}_{1m} & \dots & \mathbf{a}_{1k}^T \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \dots & \dots & \mathbf{a}_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{m1} & \mathbf{a}_{m2}^T & \dots & \mathbf{A}_{mm} & \dots & \mathbf{a}_{mk}^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_{k1} & \mathbf{a}_{k2} & \dots & \mathbf{a}_{km} & \dots & \mathbf{a}_{kk} \end{pmatrix},$$

где блок-матрицы \mathbf{A}_{ik} и \mathbf{a}_{ik} имеют структуру

$$\mathbf{A}_{ik} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2^* & z_1^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_{ik} = (z_3, z_3^*),$$

а элементы a_{ik} являются скалярными вещественными величинами.

Применим к этой матрице преобразование $\tilde{\Gamma} = \mathbf{O}\Gamma\mathbf{O}^T$, где

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

– матрица с определителем $\det \mathbf{O} = i^p$ (p – количество пар комплексных полюсов).

В результате получим матрицу $\tilde{\Gamma}$, у которой элементы –

$$\tilde{\mathbf{A}}_{ik} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(z_2 + z_1) & \operatorname{Im}(z_1 - z_2) \\ \operatorname{Im}(z_1 + z_2) & \operatorname{Re}(z_2 - z_1) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{a}}_{ik} = \sqrt{2}(\operatorname{Re}(z_3), \operatorname{Im}(z_3)), \quad \tilde{a}_{ik} = a$$

располагаются на тех же местах, где и соответствующие элементы без знака волны в матрице Γ . Матрица $\Gamma_{\beta_r\alpha_s}$ преобразуется следующим образом:

$$\tilde{\Gamma}_{\beta_r\alpha_s} = \mathbf{O}_2 \Gamma_{\beta_r\alpha_s} \mathbf{O}_1^T,$$

где $\mathbf{O}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{O}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{O} \end{pmatrix}$.

Преобразование матриц Γ и $\Gamma_{\beta r \alpha_s}$ к вещественному виду является, вообще говоря, улучшением техническим, а не принципиальным. Но это преобразование позволяет избежать комплексной арифметики и ускоряет счет приблизительно в два раза.

Пример. В случае общих граничных условий восстановление потенциала иногда получается неудовлетворительным, хотя это условие и является допустимым. Причина этого нам пока не ясна.

Приведем пример неудовлетворительного восстановления. Пусть при прежнем потенциале матрица Θ_1 в краевом условии равна

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}.$$

Можно проверить, что это краевое условие является допустимым. Тогда потенциал получается таким, как на рис. 4.

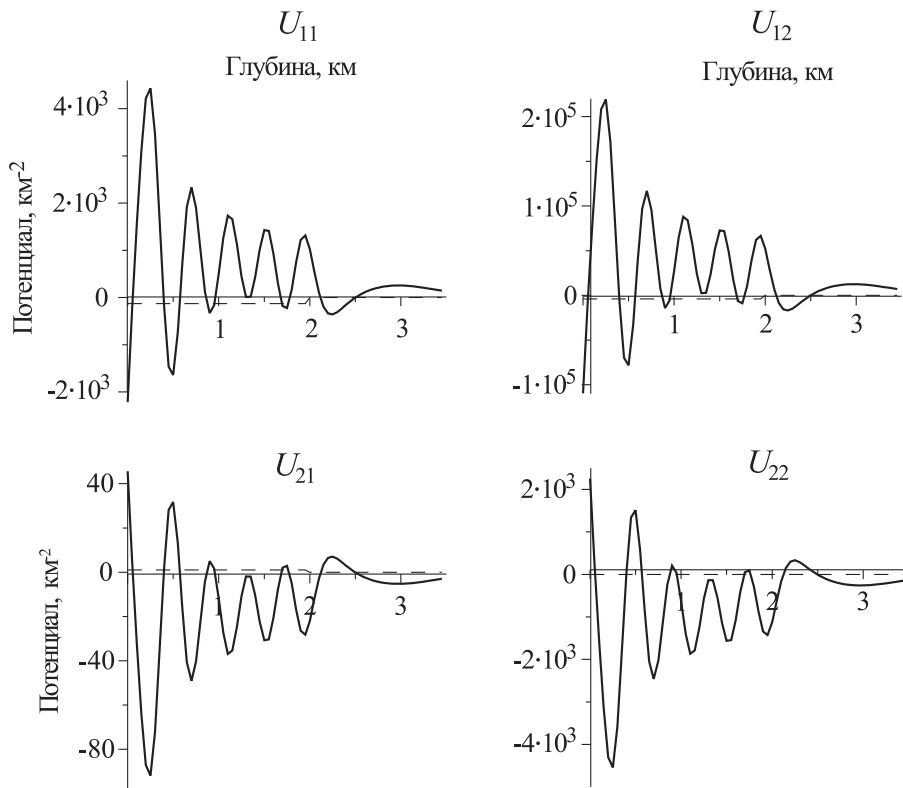


Рис. 4. Восстановленный матричный потенциал при краевой матрице Θ общего вида (расположение рисунков соответствует расположению элементов в матрице потенциала U). Пунктиром показан точный потенциал, соответствующий рис. 3

Интересно отметить, что, хотя потенциал фактически не восстановился, формула $2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \det \Gamma$ дает хорошее приближение к следу матричного потенциала.

Таким образом, матрица Θ_1 общего вида в граничных условиях бывает связана с неудачным решением обратной задачи. Естественно попытаться выяснить, какие же матрицы Θ_1 в граничном условии характерны для задачи, имеющей физическое содержание, т.е. для обратной задачи Рэлея. В этом случае матрица Θ_1 содержит два параметра ξ^2 и ω^2 , т.е. волновое число и частоту. Кроме того, матрица Θ_1 и потенциал связаны некоторым соотношением [6]. Эти особенности, как мы надеялись, облегчат восстановление потенциала по спектральной функции. В следующих разделах мы приведем примеры, которые показывают, что эта надежда в общем оправдалась.

5. Обратная задача Рэлея

Некоторые замечания об обратной задаче. Краевая задача Рэлея сформулирована в разд.1 в формулах (5)–(9). Для дальнейшего нам удобно привести выражение для потенциала \mathbf{U} , выделив при этом его зависимость от частоты ω [5]:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{G}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{G}; \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_1 + \omega^2 \mathbf{B}_2, \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} (\mu^{-1})'' \mu \frac{(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} + \frac{\mu''}{\mu} & \kappa^{-1} \left(\frac{\lambda' \mu^2 + \mu' (\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu (\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \right)' \right) \\ \kappa \left(\frac{2\mu'}{\mu} (\mu^{-1})'' + (\mu^{-1})^{(3)} \right) & \frac{-1}{2} (\mu^{-1})'' \mu \frac{(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} + (\mu^{-1})'' \lambda \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-\rho}{\mu} & 0 \\ \kappa \left(\frac{\rho}{\mu^2} \right)' & \frac{-\rho}{\lambda+2\mu} \end{pmatrix}.$$

Введем также обозначение

$$\mathbf{U}_\omega = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{B}_2 \mathbf{G}. \quad (17)$$

Рассмотрим два примера, которые покажут, что по формулам решения обратной задачи Рэлея (10)–(13) получается приемлемая аппроксимация для составляющей \mathbf{U}_ω потенциала. По аналогии с решением обратной задачи для волн Лява [7] можно высказать предположение, что эта аппроксимация становится все лучше с ростом частоты. Рассматриваемые примеры построены таким образом, что $\mathbf{B}_1 = 0$, и, следовательно, $\mathbf{U} = \omega^2 \mathbf{U}_\omega$. Относительно краевых условий задачи Рэлея отметим следующее свойство.

Предложение 4. Краевое условие задачи Рэлея является допустимым при достаточно больших частотах, если $\mu'(0) \geq 0$.

Доказательство. Подставляя в краевое условие (5) матрицу Θ из выражения (9) и решение

$$\mathbf{Y}(x, \xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\xi x},$$

для пустого полупространства, получим

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{d\mathbf{Y}}{dx} - \Theta(\xi^2) \mathbf{Y} \right) \Big|_{x=0} &= \\ &= \frac{2(\lambda + 2\mu)\xi\mu' + \mu((\mu^{-1})''\mu^2 + 2\xi^2\mu + 2\lambda\xi^2 + \rho\omega^2)}{2\mu(\lambda + 2\mu)} = 0, \end{aligned}$$

$$\xi_{1,2} = -\frac{2(\lambda + 2\mu)\mu' \pm \sqrt{4(\lambda + 2\mu)^2(\mu')^2 - 8\mu^2(\lambda + \mu)((\mu^{-1})''\mu^2 + \rho\omega^2)}}{4\mu(\lambda + \mu)}$$

откуда и следует доказываемое предложение.

Определение параметров упругой среды по элементам потенциала. Из выражения для \mathbf{B}_2 немедленно следует, что скорости Р- и S-волн можно определить по элементам матрицы \mathbf{U}_ω . Действительно,

$$\begin{aligned} \det \mathbf{U}_\omega &= \det \mathbf{B}_2 = v_S^{-2} v_P^{-2}, \\ \text{tr} \mathbf{U}_\omega &= \text{tr} \mathbf{B}_2 = -(v_S^{-2} + v_P^{-2}). \end{aligned} \quad (18)$$

Таким образом, по решению обратной задачи Рэлея можно найти приближение к скоростям обоих типов объемных волн. Однако для волн Рэлея можно определить также и плотность. Мы приведем здесь доказательство того, что плотность определяется по элементам \mathbf{U}_ω единственным образом. Фактическое вычисление ее связано с непростой задачей устойчивости, которая здесь не разбирается.

Предложение 5. Пусть известна матрица-функция \mathbf{U}_ω , по ней единственным образом определяется $\mu(x)$ из уравнения относительно $t(x)$

$$a_3 t'(x) + a_2 t^2(x) + a_1 t(x) + a_0 = 0, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} a_3 &= v(h - v)^2 / (2h); \\ a_2 &= -(h - 2v)(h - v)^2 / (4h); \\ a_1 &= ((h' + v')h^2 - 4vh'h + 2v^2h')(h - v) / (2h^2); \\ a_0 &= -\det U'_\omega + hh''(h - v)^3 + 2h'(h^3v' - (h - v)^3h') / (2h^3); \end{aligned}$$

$h = v_S^{-2}$; $v = v_P^{-2}$; $f = \mu_0/\mu$; $t = \ln'(fh)$; с начальным условием $t(0) = \ln'(fh)|_{x=0}$, которое выражается через $\mu(0) = \mu_0$ и $\mu'(0) = \mu'_0$. Зная $t(x)$, можно определить $\mu(x)$, а, следовательно, и $\rho(x)$.

Доказательство. В принятых обозначениях

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} -h & 0 \\ (hf)' & -v \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Дифференцируя (17), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{U}'_\omega &= \mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}'\mathbf{G}^{-1}\mathbf{B}_2\mathbf{G} + \mathbf{G}^{-1}\mathbf{B}'_2\mathbf{G} + \mathbf{G}^{-1}\mathbf{B}_2\mathbf{G}' = \\ &= \mathbf{G}^{-1}(-\mathbf{L}\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}'_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{L})\mathbf{G}, \end{aligned} \quad (21)$$

причем в последнем равенстве использовано уравнение (8), в котором, с учетом принятых обозначений,

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{p}{2f} \\ -f'' & 0 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где введено $p = (h - v)/h$. Обозначим в (20)

$$\mathbf{M}_2 = -\mathbf{L}\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}'_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{L}. \quad (23)$$

Поскольку преобразование подобия сохраняет детерминант, то

$$\det \mathbf{U}'_\omega = \det \mathbf{M}_2. \quad (24)$$

Левая часть данного равенства известна из решения обратной задачи. Вычислим правую часть. Подставляя (20) и (22) в (23), получим

$$\begin{aligned} \det \mathbf{M}_2 &= -(f^{-2}/4)\{h^2p^2(f')^2 - 2fhp[f'(v' - (p-1)h') + vf'' + fh''] + \\ &+ f[fp^2(h')^2 - 4fv'h' + 2p(f''v^2 + 2f'h'v + fh''v + (h')^2f - fh'v')]\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Подставляя далее выражение для детерминанта (25) в (24), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для определения $f(x)$, т.е. модуля сдвига $\mu(x)$. Это несколько громоздкое уравнение сводится к уравнению Рикатти, если ввести новую искомую функцию $t(x)$. Оно и приведено в формулировке доказанного предложения.

Пример с квадратично убывающей плотностью. Рассмотрим среду с параметрами

$$\lambda(x) = \mu(x) = \mu_0, \quad \rho(x) = \rho_0/(kx + 1)^2,$$

где k – некоторая произвольная константа.

Тогда матрица \mathbf{L} в уравнении (8), где положено $\kappa = \mu_0$, равна

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а решение задачи Коши (8)

$$\mathbf{G}(x) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В уравнении (7) матрица $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{\rho_0 \omega^2}{(kx+1)^2 \mu_0} & 0 \end{pmatrix}$, а матрица

$$\mathbf{Q} = \frac{\rho_0 \omega^2}{(kx+1)^2 \mu_0} \begin{pmatrix} -\frac{x}{3} & -\frac{x^2+6}{9} \\ 1 & \frac{x}{3} \end{pmatrix}.$$

Тогда потенциал \mathbf{U} , согласно формуле (6), равен

$$\mathbf{U} = \frac{\rho_0 \omega^2}{(kx+1)^3 \mu_0} \begin{pmatrix} -\frac{(kx+3)}{3} & -\frac{2x}{9} \\ -2k & -\frac{(3kx+1)}{3} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Выбор данной среды объясняется наличием аналитического решения уравнения (5) с потенциалом в виде (26). Решение уравнения (5):

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-(\zeta-1/k)}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \psi_1'(\zeta) - 2\psi_1(\zeta) & \zeta \psi_2(\zeta) \\ 3 \left(\psi_1'(\zeta) + \frac{a\psi_1(\zeta)}{3\zeta} \right) & 3\psi_2(\zeta) \end{pmatrix}, \quad (27)$$

где $\zeta = x + \frac{1}{k}$, а $\psi_1(\zeta)$ и $\psi_2(\zeta)$ – решения уравнений

$$\psi_1''(\zeta) = \left(\zeta^2 - \frac{a}{3} \frac{1}{\zeta^2} \right) \psi_1(\zeta) \quad \text{и} \quad \psi_2''(\zeta) = \left(\zeta^2 - \frac{a}{\zeta^2} \right) \psi_2(\zeta), \quad (28)$$

соответственно, где параметром a обозначена следующая часто встречающаяся комбинация величин $a = \rho_0 \omega^2 k^{-2} \mu_0^{-1}$. Общие решения уравнений (28) можно записать в виде

$$\psi_1(\zeta) = \sqrt{\zeta} I_{-\frac{1}{6}\sqrt{9-12a}}(\zeta\xi) c_1 + \sqrt{\zeta} I_{\frac{1}{6}\sqrt{9-12a}}(\zeta\xi) c_2, \quad (29)$$

$$\psi_2(\zeta) = \sqrt{\zeta} I_{-\frac{1}{2}\sqrt{1-4a}}(\zeta\xi) c_3 + \sqrt{\zeta} I_{\frac{1}{2}\sqrt{1-4a}}(\zeta\xi) c_4, \quad (30)$$

где c_i – произвольные постоянные, а $I_p(x)$ обозначает модифицированную функцию Бесселя первого рода.

Чтобы решить краевую задачу (5), необходимо выбрать постоянные c_i в формулах (29) и (30) так, чтобы функции $\psi_1(\zeta)$ и $\psi_2(\zeta)$ убывали на

бесконечности. Этого можно достичь, если положить $c_1 = -c_2 = -i c_5$, $c_3 = -c_4 = -i c_6$. Тогда (29) и (30) можно записать в виде

$$\psi_1(\zeta) = c_5 \frac{2\sqrt{\zeta}}{\pi} K_{\frac{1}{6}\sqrt{9-12a}}(\zeta\xi) \operatorname{sh} \left(\frac{\pi}{6} \sqrt{12a-9} \right), \quad (31)$$

$$\psi_2(\zeta) = c_6 \frac{2\sqrt{\zeta}}{\pi} K_{\frac{1}{2}\sqrt{1-4a}}(\zeta\xi) \operatorname{sh} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{4a-1} \right), \quad (32)$$

где $K_p(x)$ обозначает модифицированную функцию Бесселя второго рода. Константы c_5 и c_6 определяются из краевого условия при $x = 0$ задачи (5), в котором крайевая матрица Θ , определяемая по формуле (9), для данной среды имеет вид

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6} \\ ak^2 - 2\xi^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Тогда краевое условие $\mathbf{Y}' - \Theta \mathbf{Y} = 0$ при $x = 0$ разрешимо лишь для таких ξ , которые удовлетворяют уравнению

$$\det(\mathbf{Y}' - \Theta \mathbf{Y}) = 0.$$

Подставляя в него решение $\mathbf{Y}(x)$ из (27), получаем следующее уравнение для собственных значений ξ :

$$\begin{aligned} & \psi'_1(1/k) \left((3ak^3 - 8k\xi^2) \psi_2(1/k) - (9k^2 + 4\xi^2) \psi'_2(1/k) \right) + \psi_1(1/k) \times \\ & \times \left((a^2k^4 - (4a-1)\xi^2k^2 + 4\xi^4) \psi_2(1/k) + k(8\xi^2 - 3ak^2) \psi'_2(1/k) \right) = 0, \end{aligned} \quad (34)$$

в котором предполагается, что ψ_1 и ψ_2 вычисляются по формулам (31) и (32) при $c_5 = c_6 = 1$.

Решения уравнения (34) находятся численными методами. Как показали расчеты, корни этого уравнения сгущаются к точке $\xi = 0$, так что численным исследованием нельзя определить, конечно ли их число. Для целей обращения использовались наибольшие значения ξ . Например, при параметрах $k = 2$, $\mu_0/\rho_0 = 10$ на частоте $\omega = 60$ использовалось 17 наибольших корней, а на частоте $\omega = 120$ количество учтенных корней составляло 35. Результат восстановления подвергался сглаживанию с помощью арифметического среднего по 11 точкам. Окончательные графики показаны на рис. 5.

Пример однородного слоя на отражающем полупространстве. В предыдущем примере имеется достаточно богатый спектр мод, но большинство их концентрируется в области малых волновых чисел ξ , что негативно сказывается на восстановлении. Возможная причина этого – слишком медленное убывание потенциала с глубиной.

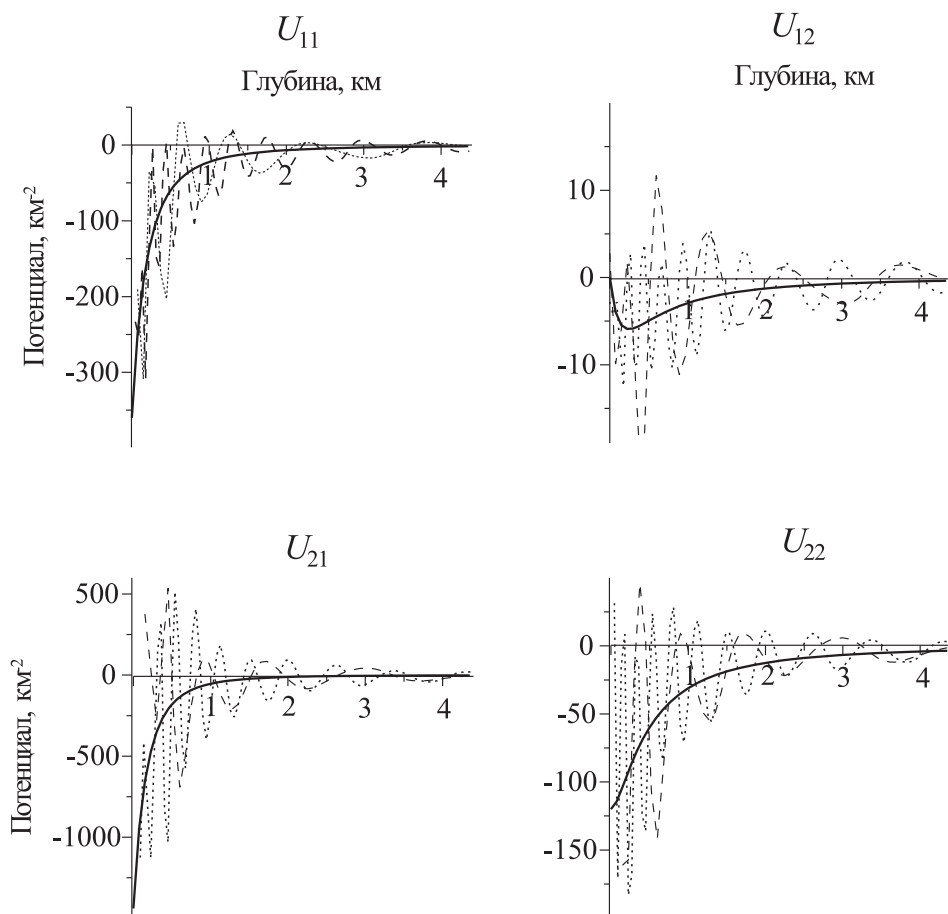


Рис. 5. Элементы восстановленного потенциала (расположение рисунков соответствует расположению элементов в матрице 2×2) для пуассоновской среды с постоянными модулями упругости и линейно растущей скоростью (сплошная линия).

Результаты восстановления на частоте 10 Гц показаны штриховой линией, на частоте 20 Гц – пунктирной

С этой точки зрения более удачным может оказаться следующий пример, в котором, начиная с некоторой глубины, потенциал равен нулю. Как видно из формулы (26), такое полупространство можно понимать как невесомое, получаемое при $\rho_0 \rightarrow 0$. Очевидно, энергия проникать в него не будет.

Выражение матричного потенциала для однородного слоя можно получить аналогичным образом, как и в предыдущем примере. Однако проще положить $k = 0$ в формуле (26) и, таким образом, для данного

примера получим потенциал в виде

$$\mathbf{U} = \begin{cases} \frac{\rho_0 \omega^2}{\mu_0} \begin{pmatrix} -1 & -2x/9 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}, & 0 \leq x \leq \alpha, \\ 0, & \alpha < x < \infty. \end{cases} \quad (35)$$

Переход к пределу при $k \rightarrow 0$ в последующих формулах является более сложной процедурой, чем непосредственное решение уравнения (5) с потенциалом в виде (35). Решение уравнения (5) имеет вид

$$\mathbf{Y} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{x}{3} - \frac{\chi_1}{\Omega^2} & -\frac{x}{3} + \frac{\chi_1}{\Omega^2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{-x\chi_2} \\ c_2 e^{x\chi_2} \\ c_3 e^{-x\chi_1} \\ c_4 e^{x\chi_1} \end{pmatrix}, & 0 \leq x \leq \alpha, \\ e^{-x\xi} \begin{pmatrix} c_5 \\ c_6 \end{pmatrix}, & \alpha < x < \infty, \end{cases} \quad (36)$$

где $\Omega^2 = \rho_0 \omega^2 / \mu_0$, $\chi_1 = \sqrt{\xi^2 - \Omega^2/3}$, $\chi_2 = \sqrt{\xi^2 - \Omega^2}$. Отметим, что в решении (37) уже учтено краевое условие при $x \rightarrow \infty$. Из условия непрерывности решения в точке $x = \alpha$ исключаются константы c_{1-4} :

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 & \dots \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_5 \\ c_6 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (37)$$

где $y_i = e^{-\xi\alpha - (x+\alpha)\chi_i} (e^{2x\chi_i} (\chi_i - \xi) + e^{2\alpha\chi_i} (\xi + \chi_i)) / (2\chi_i)$.

Подставляя решение (37) в краевое условие при $x = 0$ задачи (5), в котором матрица Θ получена из формулы (34) при $k = 0$, найдем аналогичное уравнению (35) из предыдущего примера дисперсионное уравнение для собственных значений ξ , которое в данном случае ввиду громоздкости не приводится.

Для численного моделирования выбраны следующие параметры среды: $\alpha = 2$, $\mu_0/\rho_0 = 10$. Расчеты были проведены на частотах 6 и 9 Гц; для восстановления на первой частоте было использовано 16 мод, на второй – 18, причем три пары комплексных корней не были использованы из-за большой величины мнимой части. Результат восстановления потенциала также сглаживался арифметическим средним по 11 точкам и приведен на рис. 6. По найденным элементам потенциала с помощью формул (18) легко находятся скорости P- и S-волн, графики которых приведены на рис. 7 – видно, что с ростом частоты точность восстановления улучшается. Однако восстановить плотность, численно интегрируя уравнение (19), из-за неустойчивости алгоритма пока не удалось.

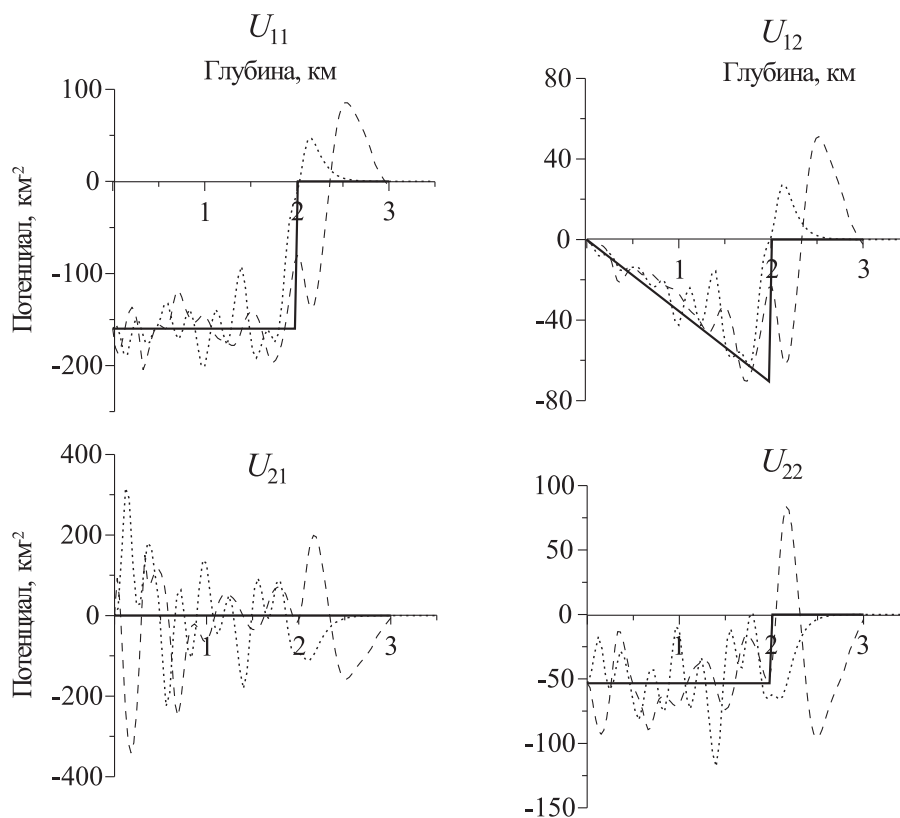


Рис. 6. Элементы восстановленного потенциала (расположение рисунков соответствует расположению элементов в матрице 2×2) для среды, состоящей из однородного слоя толщиной 2 км и отражающего полупространства (сплошная линия).

Результаты восстановления на частоте 6 Гц показаны штриховой линией, на частоте 9 Гц – пунктирной

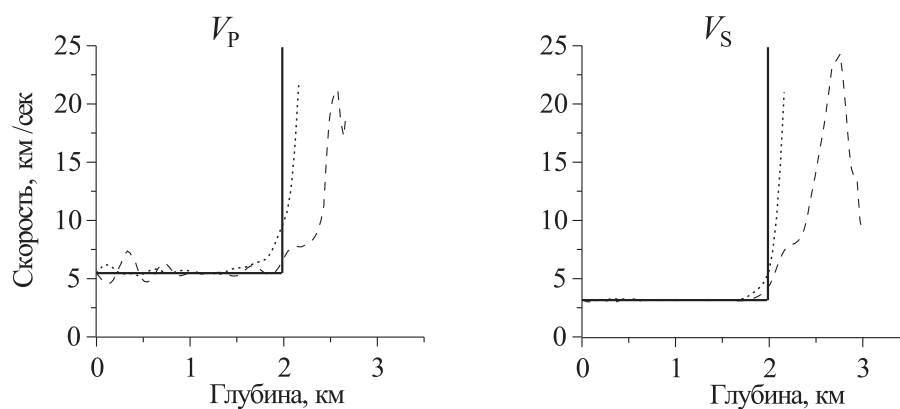


Рис. 7. Скорости P- и S-волн (V_P и V_S), полученные по элементам потенциала, показанного на рис. 6. Соответствие линий и частот то же, что и на рис. 6

Заключение

Эти примеры только демонстрируют возможности метода. При работе над ними обнаружались многочисленные проблемы, связанные с вычислительной стороной задачи. Если говорить только о некоторых из них, то заметим следующее:

- 1) при счете не используются величины элементов потенциала на поверхности;
- 2) счет ведется с помощью очень длинной ячейки, в то время как по аналогии с обратной задачей Лява можно с уверенностью сказать, что существует алгоритм вычисления с ячейкой стандартной длины;
- 3) не ясно, достаточное ли количество мод может быть выделено из реальных записей монохроматических рэлеевских колебаний;
- 4) нужно выяснить условия устойчивости задачи Рикатти для определения плотности.

Эти задачи, а также другие не упомянутые здесь, требуют тщательного изучения. Однако задача обращения мод поверхностных волн настолько интересна теоретически и важна для многочисленных приложений в различных областях – геофизике, неразрушающем контроле качества, ионосферных исследованиях – что усилия, направленные на это изучение, несомненно оправданы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркушевич В.М., Хенкин Г.М. Явные формулы для восстановления упругих параметров полупространства по поверхностным волнам Рэля // Численное моделирование и анализ геофизических процессов. М.: Наука, 1987. С.167–174. (Вычисл. сейсмология; Вып.20).
2. Новикова Н.Н., Хенкин Г.М. О восстановлении оператора Штурма–Лиувилля по характеристикам дискретного спектра // Численное моделирование и анализ геофизических процессов. М.: Наука, 1987. С.174–184. (Вычисл. сейсмология; Вып.20).
3. Beals R., Henkin G.M., Novikova N.N. The inverse boundary problem for the Rayleigh system // J. Math. Phys. 1995. Vol.36, N 12. P.6688–6708.
4. Маркушевич В.М., Резников Е.Л. Явное выражение $q(x)$ через рациональную $y'_x/y(0, \lambda)$ для уравнения $y''(x, \lambda) + [q(x) - \lambda^2]y(x, \lambda) = 0$ на полуоси // Логические и вычислительные методы в сейсмологии. М.: Наука, 1984. С.87–103. (Вычисл. сейсмология; Вып.17).
5. Маркушевич В.М. Вынужденные гармонические колебания рэлеевского типа и матричная задача рассеяния // Математические методы в сейсмологии и геодинамике. М.: Наука, 1986. С.119–135. (Вычисл. сейсмология; Вып.19).
6. Киселев С.Г., Маркушевич В.М. Краевая задача Рэля в матричной форме Штурма–Лиувилля // Проблемы динамики и сейсмичности Земли. М.: Наука, 2000. С.101–119. (Вычисл. сейсмология; Вып.31).
7. Макеев О.А., Маркушевич В.М., Стеблов Г.М. Моделирование виброзондирования конкретной геологической структуры горизонтальными монохроматическими вибрациями // Геодинамика и прогноз землетрясений. М.: Наука, 1994. С.239–248. (Вычисл. сейсмология; Вып.26).