УДК 550.310:517.984 54

О СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА РЭЛЕЯ

А.Н. Кузнецов

Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук, Москва

Рассматриваемая система Рэлея возникает в задачах исследования малых упругих колебаний горизонтально однородного полупространства. Она получается в результате разделения переменных в уравнениях линейной упругости и представляет собой линейную систему обыкновенных уравнений с двумя параметрами – частотой и волновым числом. Под спектром здесь имеются в виду значения спектрального параметра при фиксированной частоте, при которых имеется решение однородной задачи со свободной границей. Доказывается, что в случае, когда упругие свойства среды изменяются гладко, число точек в спектре конечно; оценивается спектральный радиус. Разбирается случай двухслойной среды: однородный слой – на однородном полупространстве. В этой задаче получены формулы для асимптотик спектральных значений; доказано, что у спектрального уравнения может быть бесконечное число комплексных корней; выписан критерий, позволяющий выделять среды с конечным спектром из всего множества сред.

ON THE SPECTRUM OF RAYLEIGH OPERATOR

A. N. Kuznetsov

International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow

The considered Rayleigh system arises in research problems of small elastic vibrations of the horizontally homogeneous half-space. It is obtained as a result of separation of variables in the linear elasticity equations and represents a linear system of ordinary equations with two parameters – frequency and wave number. By a spectrum we mean values spectral parameter which provide the solution of a homogeneous problem with a free boundary at fixed frequency. It is proved, that when the elastic properties of a medium change smoothly, the number of points in the spectrum is finite and spectral radius is evaluated. Case of a two-layered medium is investigated: a homogeneous layer lies on a homogeneous half-space. In this problem the formulas for asymptotics of spectral values are obtained, it is proved that there can be infinite number of complex roots in the spectral equation, and criterion enabling to separate media with finite spectra from ones with infinite spectra is written out.

Введение

Оператор Рэлея, о котором пойдет речь, возникает в ходе рассмотрения задач о малых упругих колебаниях в слоистых средах трех простейших типов. Здесь будет описан случай плоскослоистой среды. Рассматривается изотропное полупространство, в котором параметры Ламе λ, μ и плотность ρ зависят только от глубины. Малые колебания такой среды подчиняются линейным уравнениям теории упругости [1]. В результате разделения переменных возникает, вместе с уравнением Лява, самосопряженная система двух обыкновенных уравнений, зависящая от волнового числа и частоты. Ее называют системой Рэлея, так как именно из ее решений конструируются рэлеевские волны. Исследование спектральных свойств этой системы нужно для решения как прямых задач сейсмологии, так и обратных. Под спектром понимаются корни дисперсионного уравнения по волновому числу при фиксированной частоте. Например, схема решения обратной задачи [2] прямо опирается на рэлеевский (т.е. дискретный) спектр задачи, по которому восстанавливаются параметры среды в первом приближении. В настоящей работе выясняется, что гладкость параметров среды имеет неизбежным следствием ограниченность спектрального радиуса и, значит, конечность числа точек в нем. Вместе с тем, оказалось, что наличие разрыва в среде самого простого вида – однородный слой лежит на однородном полупространстве – индуцирует при определенном соотношениии между параметрами слоев бесконечное число комплексных точек в спектре.

1. Необходимые сведения

Система уравнений линейной теории упругости в изотропной среде имеет вид [1]:

$$\rho \ddot{v}_i = (\lambda v_{k,k})_{,i} + (\mu v_{i,j})_{,j} + (\mu v_{j,i})_{,j},$$

где v_i; $i = 1, 2, 3$ – компоненты вектора смещения (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование).

Граница области предполагается свободной [1]: $n_i t_{ij} = 0$, где n_i – поле единичных нормалей к границе, $t_{ij} = \lambda u_{k,k}\delta_{i,j} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})$ – тензор напряжений.

Разделением переменных [1, 3] краевая задача, поставленная в горизонтально однородном полупространстве, сводится к системе обыкновенных уравнений с параметрами, которая состоит из уравнения Лява и следующей системы Рэлея:

$$\mathbf{P}(u) = 0, \quad \text{где } \mathbf{P} = \partial(\mathbf{B}\partial + \mathbf{C}) - \mathbf{C}^T\partial + \mathbf{E}, \tag{1}$$

здесь $\partial = d/dx$, произведения всюду понимаются как композиции операторов, т.е. $\partial\mathbf{A} = \mathbf{A}\partial + \mathbf{A}'$, $(\,)' \equiv \dfrac{d(\,)}{dx}$, $\mathbf{E}^T = \mathbf{E}$, T – операция транспонирования.

В нашем плоскослоистом случае

$$\mathbf{B} = diag(\nu, \mu), \;\; \mathbf{C} = \xi \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\mu & 0 \end{pmatrix}, \;\; \mathbf{E} = diag(\omega^2\rho - \xi^2\mu, \;\; \omega^2\rho - \xi^2\nu),$$

где $\nu = \lambda + 2\mu$.

Граничное условие представляется в виде

$$(B\partial + C)u|_{x=0} = 0,$$

где $x = 0$ – уравнение границы.

Из математически возможных решений так поставленной задачи физический смысл имеют только ограниченные решения. Если параметры среды достаточно быстро стремятся к постоянным, когда $x \to \infty$, то две из четырех составляющих фундаментального решения экспоненциально убывают (пусть это u_1 и u_2) и две возрастают с ростом x. Подстановка линейной комбинации с постоянными коэффициентами убывающих смещений $(c_1u_1 + c_2u_2)$ в граничное условие приводит к системе из двух однородных относительно констант уравнений. Приравняв к нулю ее определитель, получим дисперсионное уравнение. При фиксированной частоте оно содержит одну неизвестную ξ и определяет тем самым спектр краевой задачи, или оператора Рэлея. Решения задачи, соответствующие вещественным корням, называются волнами Рэлея [1].

Подробности, связанные со следующим трехшаговым преобразованием, приведены в [4]. Из оператора $\mathbf{P}$ (1) последовательно получаются операторы P_1, P_2 и P_3.

Двумерные матрицы будем записывать в строчку, разделяя в них строки точкой с запятой.

$$\begin{aligned} 1)\; P_1 &= Q^{-1}PQ = (\partial M_1 + M_2)(\partial + M_3) - \xi^2 M_1, \\ Q &= (-\xi,\;\; 0;\;\; \partial,\;\; 1), \\ M_1 &= (\mu,\;\; 0;\;\; -2\mu',\;\; \nu), \\ M_2 &= (\mu',\;\; -\nu;\;\; \omega^2\rho,\;\; 0), \\ M_3 &= \nu^{-1}(0,\;\; \nu;\;\; -\omega^2\rho,\;\; \nu'), \\ P_1 &= (\partial\mu\partial + \mu'\partial + \omega^2\rho - \xi^2\mu,\;\; -\partial\lambda - \mu\partial; \\ &\quad -2\partial\mu'\partial + 2\xi^2\mu' - \omega^2\rho',\;\; \partial\nu\partial + \partial\lambda' + \omega^2\rho - \xi^2\nu), \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
2)\ P_2 &= M_4^{-1}M_1^{-1}P_1M_4 = (\partial - L + K)(\partial - L - K) - \xi^2,\\
M_4 &= (\varkappa\mu^{-1},\ \ 0;\ \ 0,\ \ \mu\nu^{-1}),\\
K &= (\mu^{-1}\mu',\ \ -\frac{1}{2}\varkappa^{-1}\mu\nu^{-1}(\lambda+3\mu);\ \ \varkappa(\mu^{-2}\omega^2\rho + (\mu^{-1})''),\ \ -\mu^{-1}\mu'),\\
L &= (0,\ \ \frac{1}{2}\varkappa^{-1}\mu\nu^{-1}(\lambda+\mu);\ \ -\varkappa(\mu^{-1})'',\ \ 0),\\
3)\ P_3 &= G^{-1}P_2G = (\partial + V)(\partial - V) - \xi^2 = \partial^2 - \xi^2 - U,
\end{aligned}$$

матрица G является произвольным обратимым решением уравнения

$$\begin{aligned}
&G' = LG,\\
&V = G^{-1}KG, \quad U = V' + V^2.
\end{aligned} \tag{3}$$

2. Преобразование граничных условий

Для оценки спектрального радиуса даже в первом приближении приходится существенно использовать специфику оператора Рэлея. Подходящим путем для этого будет использование формы P_3 для оператора Рэлея P. В связи с этим требуется получить граничные условия для оператора P_3. Чтобы это сделать, применим к граничному оператору последовательность операций из разд. 1.

Обозначим через R_i искомые граничные операторы для операторов P_i. По условию граничным оператором для оператора P является

$$R = B\partial + C.$$

Ясно, что для оператора P_1 граничным оператором будет

$$R_{10} = RQ = (-\xi\nu\partial + \xi\lambda\partial,\ \ \xi\lambda;\ \ \xi^2\mu + \mu\partial^2,\ \ \mu\partial).$$

Так как граничные условия определены по модулю соответствующих уравнений движения, можно с помощью строки матрицы оператора P_1 (2) понизить порядок граничного оператора R_{10}; сократив также ξ в первой строке R_{10}, получим окончательно:

$$R_1 = (\mu\partial,\ \ -\frac{1}{2}\lambda;\ \ 2\xi^2\mu - \omega^2\rho,\ \ \nu\partial + \lambda' - \mu^{-1}\mu'\lambda).$$

Далее

$$\begin{aligned}
&R_2 = (\varkappa^{-1},\ \ 0;\ \ 0,\ \ \mu^{-1})R_1M_4 =\\
&= \partial + \left(-\mu^{-1}\mu',\ \ -\frac{1}{2}\varkappa^{-1}\mu\lambda\nu^{-1};\ \ \varkappa(2\xi^2\mu^{-1} - \omega^2\rho\mu^{-2}),\ \ 0\right).
\end{aligned}$$

Наконец, $R_3 = R_2 G$. Так как одно решение G уравнения (3) отличается от другого постоянным матричным правым сомножителем, можно, ничего не теряя, положить $G|_{x=0} = 1$, тогда $G'|_{x=0} = L$. Оператор R_3 потребуется только на границе, формула для него имеется также в [5].

$$R_3|_{x=0} =$$
$$= \partial + (-\mu^{-1}\mu',\ \frac{1}{2}\varkappa^{-1}\mu^2\nu^{-1};\ -\varkappa((\mu^{-1})'' + \omega^2\rho\mu^{-2} - 2\xi^2\mu^{-1}),\ 0). \quad (4)$$

3. Разложение оператора P_3 на множители

Построим при больших ξ разложение оператора P_3 на два множителя, которые соответствуют различным корням характеристической матрицы оператора. Это разложение позволяет понизить порядок оператора P_3 до второго, найти асимптотику и оценку убывающих смещений и написать главную часть спектрального уравнения – это и приведет к искомым результатам. Рассмотрим случай убывающего потенциала U. Напомним, что

$$P_3 = (\partial + V)(\partial - V) - \xi^2 = \partial^2 - \xi^2 - U.$$

Обозначим $\sigma = sgn(Re(\xi))$ и положим

$$P_3 = (\partial - \sigma\xi - S)(\partial + \sigma\xi + S).$$

Раскрыв скобки, найдем уравнение для S:

$$S' - 2\sigma\xi S = -U + S^2. \quad (5)$$

Докажем Лемму, которая заменит схему метода последовательных приближений для систем обыкновенных уравнений. Рассмотрим такую систему

$$u' = f(x, u),$$

которая на полупрямой $x \geq 0$ удовлетворяет условиям существования и непрерывной зависимости решений от начальных данных. Пусть $\psi(x)$ – функция, такая, что $\psi(x) > 0$ при $x \geq 0$, $0 \leq \epsilon < 1$ – фиксированное число. Символ $\|.\|$ обозначает евклидову норму в конечномерном пространстве или операторную норму, если речь идет о норме матрицы.

Лемма 1. Пусть каждое решение этой системы на любом отрезке $[a, b]$, если оно существует, обладает следующим свойством:
(A) Если $\|u(x)\| \leq \psi(x)$ на $[a, b]$ и $\|u(b)\| \leq \epsilon\psi(b)$, то $\|u(x)\| < \psi(x)$ на $[a, b]$.

Тогда каждое такое решение продолжается с отрезка $[a,b]$ *на* $[0,b]$ *с оценкой* $\|u(x)\| < \psi(x)$ *и существует решение* $u(x)$ *на всей полупрямой* $[0,\infty]$*, удовлетворяющее неравенству* $\|u(x)\| \le \psi(x)$*.*

Доказательство. При фиксированном b максимальным отрезком $[c,b]$, на который можно продолжить решение $u(x)$ с оценкой $\|u(x)\| \le \le \psi(x)$, является отрезок $[0,b]$, так как, если $c > 0$, то из условия (A) вытекает, что $\|u(c)\| < \psi(c)$ и решение продолжается влево с сохранением свойства (A). Ясно, что оценка сохранит строгость и при $c = 0$. Таким образом, для любой стремящейся к бесконечности последовательности чисел $b > 0$ на каждом отрезке $[0,b]$ имеется решение $u_b(x)$, определенное условием $u_b(b) = 0$. Множество начальных значений этих решений $\{u_b(0)\}$ ограничено величиной $\psi(0)$. Отсюда (с помощью теоремы о непрерывной зависимости от начальных данных) следует, что в качестве искомого можно взять решение, исходящее из любой предельной точки множества $\{u_b(0)\}$.

Предложение 1. Пусть

$$\|U(x)\| \le \varphi(x), \quad \|U'(x)\| \le -\varphi'(x),$$

где $\varphi(x)$ – убывающая функция, такая, что $\varphi^2(x) \le -\alpha\varphi'(x)$ при всех x с некоторой константой α. Тогда при $|\xi| \ge 4\alpha$ существует решение уравнения (5) на всей полупрямой с оценкой

$$\|S(x)\| \le 2|\xi|^{-1}\varphi(x). \tag{6}$$

Доказательство. Применим Лемму. Пусть $S(x)$ определено на $[a,b]$, $S(b) = 0$, тогда, решая (5) как линейное уравнение с правой частью, получим

$$S = -\int_x^b e^{2\sigma\xi(x-y)}(-U(y) + S^2(y))dy.$$

И после интегрирования по частям:

$$S = \frac{\sigma\xi^{-1}}{2}\Big(U(x) - e^{2\sigma\xi(x-b)}U(b) + \int_x^b e^{2\sigma\xi(x-y)}U'(y)dy\Big) + \int_x^b e^{2\sigma\xi(x-y)}S^2(y)dy.$$

Если на $[a,b]$ выполняется нестрогая оценка (6), то

$$\left\|\int_x^b e^{2\sigma\xi(x-y)}S^2(y)dy\right\| \le 4|\xi|^{-2}\int_x^b \varphi^2 dy \le 4\alpha|\xi|^{-2}(\varphi(x) - \varphi(b)) < 4\alpha|\xi|^{-2}\varphi(x).$$

Подставив оценки для U в первые слагаемые формулы для S, получим оценку

$$\|S\| < 2|\xi|^{-1}\varphi(x) \ \text{ на } \ [a,b].$$

Для завершения доказательства остается заметить, что мы полагаем $\psi = 2|\xi|^{-1}\varphi(x)$, $\epsilon = 0$.

Замечания.

1. В разложении S пропущен член нулевой степени по ξ – это специфическая черта оператора Штурма–Лиувилля данного вида.

2. Из условий предложения нетрудно вывести неравенство

$$\varphi(x) \le \frac{\alpha\varphi(0)}{x\varphi(0)+\alpha},$$

поэтому в качестве φ можно брать, например, функции вида $\dfrac{a}{(x+b)^n}$, $n \ge 1$, a, $b > 0$.

4. Асимптотика смещения

Покажем, что оба смещения, удовлетворяющие уравнению

$$u' + \sigma\xi u + Su = 0, \tag{7}$$

экспоненциально убывают при любом фиксированном ξ, когда $x \to \infty$, если $Re(\xi) \ne 0$.

Пусть символ C обозначает постоянные > 0. Положим $u = e^{-\sigma\xi x}v$, тогда $v' = Sv$, следовательно

$$\big|\|v\|'\big| \le \|v'\| \le C\,\|S\|\,\|v\| \le C\,\|v\|\varphi,$$

откуда следует, что

$$\|v(x)\| \le \|v(y)\| \exp(C\int\limits_y^x \varphi(z)dz) \le \|v(y)\|\, e^{C\,\varphi(y)\,x}$$

и

$$\|u(x)\| \le e^{(-\sigma Re(\xi) + C\,\varphi(y))x}.$$

Из этой оценки вытекает экспоненциальное убывание u, поскольку y можно выбрать таким, что $C\,\varphi(y) < -\sigma Re(\xi)$.

5. Спектральное уравнение

Обозначим через D матрицу членов нулевого порядка оператора R_3 (4), так что граничные условия для оператора P_3 запишутся в виде

$$u' = Du|_{x=0}.$$

Связав их с уравнением (7), получим спектральное уравнение

$$\det(\sigma\xi + S + D)|_{x=0} = 0.$$

Положим: $S|_{x=0} = (s_1, s_2;\ \ s_3, s_4)$, $D|_{x=0} = (d_1, d_2;\ \ d_3 + d_5\omega^2 + d_6\xi^2, 0)$, где $d_1 = \mu^{-1}\mu'$, $d_2 = -\frac{1}{2}\varkappa^{-1}\mu^2\nu^{-1}$, $d_3 = \varkappa(\mu^{-1})''$, $d_5 = -\varkappa\rho\mu^{-2}$, $d_6 = 2\varkappa\mu^{-1}$ при $x = 0$ (см. (4)). Тогда, вычисляя определитель, запишем спектральное уравнение в виде квадратного уравнения

$$a\xi^2 + b\xi + c = 0,$$

коэффициенты которого зависят от ξ и, если выполнены условия Предложения 1, приближаются к постоянным, когда $|\xi| \to \infty$:

$$a = 1 - d_2 d_6,$$

$$b = \sigma d_1 - d_6 s_2 \xi,$$

$$c = \sigma(s_1 + s_4)\xi + d_1 s_4 + s_1 s_4 - s_2 s_3 - d_2 s_3 - d_2 d_3 - d_3 s_2 - d_5(d_2 + s_2)\omega^2.$$

Лемма 2. Корень квадратного уравнения с комплексными коэффициентами $a\xi^2 + b\xi + c = 0$ допускает оценку

$$|\xi| \le |ba^{-1}| + \sqrt{|ca^{-1}|}. \tag{8}$$

Пусть $|\xi| \ge 4\alpha$. Очевидно, $d_2 d_6 = -\mu\nu^{-1} > -\frac{1}{2}$ (и < 0), следовательно, при физических параметрах среды $a > 1$. Отсюда и из Леммы 2 легко вытекает оценка спектрального радиуса: нужно просто в формуле (8) произвести оценку величин b и c, оценивая каждое слагаемое, их составляющее, и полагая $\|s_i\| < 2|\xi|^{-1}\varphi(0)$, $i = 1, \ldots, 4$.

$$|\xi| \le |d_1| + 2\varphi(0)|d_6| + \Bigg(4\varphi(0) + |d_2 d_3| + \\ + \frac{\varphi(0)}{2\alpha}(|d_1| + |d_2| + |d_3|) + \frac{\varphi(0)^2}{2\alpha^2} + |d_5|(|d_2| + \frac{\varphi(0)}{2\alpha})\omega^2\Bigg)^{\frac{1}{2}}.$$

6. Упругая среда

Обсудим ограничения, которые накладывают на физическую среду условия Предложения 1.

С матрицами K и L составляющие потенциала U, согласно (3), связаны формулами

$$V' = G^{-1}(K' + [K, L])G, \qquad V^2 = -\mathrm{det}K.$$

В общем случае из них следует оценка

$$\|U\| \leq \|G\|^2(\|K'\| + \|[K, L]\|) + \|\mathrm{det}K\|.$$

В частных случаях можно добиться бо́льшего, например, в случае асимптотически горизонтально однородной среды главные части рассматриваемых величин при $x \to \infty$ представляются в виде:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{det}K = -k_2k_3 = \mathrm{const},\\
&[K, L] = k_3l_2(-1, 0;\ \ 0, 1),\\
&G = (1, l_2x;\ \ 0, 1),\\
&V' = k_3l_2(-1, -2l_2x;\ \ 0, 1),\\
&U = V' + V^2 = (u_1, u_5x;\ \ 0, u_4),
\end{aligned}$$

где $u_1 = k_3(k_2 - l_2)$, $u_5 = -2l_2$, $u_4 = k_3(k_2 + l_2)$ и k_2, k_3, l_2, l_3 постоянны. Мы видим, что в этом случае потенциал не только не убывает, но даже растет с ростом x.

Из выражений для матриц $K = (k_1, k_2;\ k_3, k_4)$ и $L = (l_1, l_2;\ l_3, l_4)$ нетрудно вывести, что условия Предложения 1 будут выполнены, если параметры среды асимптотически эквивалентны x^{-1}.

В случае асимптотически однородной среды, так как растущий член в потенциале нильпотентен, следует ожидать, что бесконечного количества точек в спектре не будет. Однако рассуждение должно быть иным.

7. Случай асимптотически однородного полупространства

Рассмотрим процедуру разложения оператора Рэлея на множители и оценку спектрального радиуса в том случае, когда параметры среды стремятся к постоянным при $x \to \infty$. Применим тот же самый метод, который использовался в разд. 3 с сохранением основных обозначений.

Выберем число β, отделяющее область произвольного изменения потенциала $x < \beta$ от области $x > \beta$, где параметры близки к постоянным.

Допустим, что в бесконечной области матрица S уже найдена и в точке β значение S удовлетворяет оценке

$$\|S(\beta)\| \leq \frac{1}{2}|\xi|^{-1}\varphi(\beta). \tag{9}$$

Решение $S(x)$ на отрезке $0 \leq x \leq \beta$ может быть получено повторением доказательства Предложения 1; нужно только увеличить ограничение на $|\xi|$, полагая $|\xi| \geq 8\alpha$ (вместо $|\xi| \geq 4\alpha$), а остальные условия сохранить на отрезке в неприкосновенности.

В самом деле, продолжим S с начальным условием в точке β влево так далеко, как это возможно с условием, что S остается решением уравнения (5) и сохраняется оценка (6). Из (5) получим представление

$$S = -\int_x^\beta e^{2\sigma\xi(x-y)}(-U(y) + S^2(y))dy + S(\beta)e^{2\sigma\xi(x-\beta)}.$$

Тогда слагаемое с U оценится строго через $|\xi|^{-1}\varphi(x)$, как и раньше, а слагаемое с S^2 – через $\frac{1}{2}|\xi|^{-1}\varphi(x)$. Добавляя оценку для $S(\beta)$ (9), получим в итоге

$$\|S(x)\| < 2|\xi|^{-1}\varphi(x).$$

Отсюда следует, согласно Лемме 1, что функция $S(x)$ может быть продолжена влево до нуля с сохранением этой оценки.

Рассмотрим теперь область $x > \beta$.

Пусть сначала при $x \geq \beta$ пространство будет однородным. Так как потенциал U треуголен (см. разд. 6), можно найти матрицу S также в треугольном виде. Уравнение для $S = (s_1,\ s_2;\ s_3,\ s_4)$, если его записать в координатах, в этом случае примет вид системы:

$$\begin{aligned}
&s_1' + 2\xi s_1 = u_1 - s_1^2,\\
&s_2' + 2\xi s_2 = u_5 x - (s_1 + s_4)s_2,\\
&(s_3 = 0),\\
&s_4' + 2\xi s_4 = u_4 - s_4^2,
\end{aligned}$$

в которой u_i постоянны; при больших $|\xi|$ нужное нам, т.е. убывающее при $|\xi| \to \infty$, решение легко находится:

$$s_1 = \text{const} \approx \tfrac{1}{2}\xi^{-1}u_1, \quad s_4 = \text{const} \approx \tfrac{1}{2}\xi^{-1}u_4, \quad s_2 = ax + b,$$

где $\quad a = u_5(2\xi + s_1 + s_4)^{-1}, \quad b = -u_5(2\xi + s_1 + s_4)^{-2}.$

Отсюда видно, что оценка для $S(\beta)$ получается, коль скоро мажоранта $\varphi(x)$ достаточно велика в точке $S(\beta)$.

Естественно ожидать, что если слой $x > \beta$ будет асимптотически однороден, то оценки сохранятся. Однако при рассмотрении этого вопроса возникает ряд тонкостей, если асимптотика медленная; мы не будем в них углубляться.

8. Пример. Однородный слой на однородном полупространстве

Обозначения. Пример этот, интересный сам по себе, разбирается здесь с целью иллюстрации того факта, что в случае негладких параметров Ламе в дискретном спектре задачи Рэлея может появиться бесконечное число комплексных значений.

Основная трудность при рассмотрении примера носит сугубо вычислительный характер – проблема, как будет видно, состоит в нахождении главных частей определителей шестого порядка.

Пусть полупрямая $0 \le x$ разбита на два слоя: $0 \le x \le x_1$ и $x_1 \le x$, а в каждом слое оператор Рэлея (1) имеет свои постоянные коэффициенты. Его характеристическая матрица, очевидно, имеет вид

$$(\nu p^2 + \omega^2 \rho - \mu \xi^2, \ \ (\nu - \mu)\xi p; \ \ -(\nu - \mu)\xi p, \ \ \mu p^2 + \omega^2 \rho - \nu \xi^2). \tag{10}$$

Введем обозначения: $\alpha_1 = \omega^2 \rho \mu^{-1}$, $\alpha_2 = \omega^2 \rho \nu^{-1}$, $\beta = \mu \nu^{-1}$, так что $\alpha_2 = \beta \alpha_1$. Несложным вычислением можно убедиться в том, что четыре корня p_1, p_2, p_3, p_4 детерминанта этой матрицы определяются уравнениями

$$p^2 = \xi^2 - \alpha_i, \ \ i = 1, 2,$$

следовательно, при больших ξ эти корни являются сходящимися рядами

$$p = \pm \xi (1 - \frac{1}{2} \alpha_i \xi^{-2} + \ldots), \tag{11}$$

и смещение представляется в виде

$$U = \sum c_p u_p e^{px},$$

где c_p – произвольные постоянные;

$$u_p = (\xi p(1 - \beta), \ \xi^2(\beta - 1) + \alpha(p) - \alpha_2) \quad - \tag{12}$$

нулевой собственный вектор матрицы (10), соответствующий корню p, $\alpha(p)$ обозначает то число из $\alpha_i, i = 1, 2$, которое определяет значение корня p в формуле (11), и суммирование происходит по этим значениям корней.

Оператор $B\partial + C$, выражающий напряжение V через смещение U, действует на коэффициенты u_p матрицей

$$D = Bp + C = \nu(p, \ \ (1-2\beta)\xi; \ \ -\beta\xi, \ \ \beta p),$$

так что

$$V = DU = \sum c_p v_p e^{px},$$

$$v_p = \mu(\xi(2(1-\beta)\xi^2 - \alpha(p) - (1-2\beta)\alpha_1), \ p(2(\beta-1)\xi^2 + \alpha(p) - \alpha_2). \quad (13)$$

Дисперсионное уравнение. Чтобы получить возможность одновременного использования параметров обоих слоев, сохраним обозначения α_i, β, μ только для верхнего слоя: $0 \le x \le x_1$, а в нижнем слое, при $x_1 \le x < \infty$, переобозначим эти величины: $\tau_i = \alpha_i, \ \ \varphi = \beta, \ \ \mu_1 = \mu$.

Во втором слое физический смысл имеют только два корня, соответствующие убывающим решениям при $x \to \infty$. Поэтому всего в рассмотрениях участвуют шесть корней $p_i, i = 1, \ldots, 6$. При большом $|\xi|$ и $Re\xi \ne 0$ они однозначно определены условием $\sqrt{1} = 1$, первые четыре из них относятся к первому слою и два – ко второму:

$$\begin{aligned} p_i &= \sigma\xi\sqrt{1-\alpha_i\xi^{-2}}, \\ p_{i+2} &= -p_i, \\ p_{i+4} &= -\sigma\xi\sqrt{1-\tau_i\xi^{-2}}, \end{aligned} \qquad (14)$$

где $i = 1, 2, \ \sigma = \operatorname{sgn}(\operatorname{Re}\xi)$.

Обозначим через $W = (U, V)$ – 4-вектор-функцию смещнения-напряжения, а через $w_i = (u_i, v_i)$ – собственные 4-векторы для шести корней. Тогда решение W, определяющее волну Рэлея в полупространстве, выразится формулами

$$W = \sum_1^4 c_i w_i e^{p_i x} \qquad \text{при} \ \ 0 \le x \le x_1,$$

$$W = \sum_5^6 c_i w_i e^{p_i x} \qquad \text{при} \ \ x_1 \le x,$$

при этом должны выполняться, во-первых, условия согласования на границе раздела слоев:

$$\sum_1^4 c_i w_i e^{p_i x_1} = \sum_5^6 c_i w_i e^{p_i x_1},$$

и, во-вторых, условия свободной границы, т.е. равенство нулю напряжения при $x = 0$:

$$\sum_1^4 c_i v_i = 0.$$

В результате имеем шесть однородных уравнений относительно c_i. Приравняв к нулю определитель (и сократив $e^{p_5 x_1}$ и $e^{p_6 x_1}$ в последних двух столбцах), получим уравнение

$$d = \begin{vmatrix} w_1 e^{p_1 x_1} & w_2 e^{p_2 x_1} & w_3 e^{p_3 x_1} & w_4 e^{p_4 x_1} & w_5 & w_6 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

где вектор w_i записан в матрице как 4-столбец, v_i – как 2-столбец, и каждый 0 как нулевой 2-столбец.

Вычисление определителя. Из того, что определитель имеет нулевой 2×2 блок, вытекает, что ненулевые мономы в его выражении содержат ровно две экспоненты $e^{p_i x_1}$ в качестве сомножителей. А так как $p_i \sim \pm\sigma\xi$, то определитель можно записать в виде

$$d = Ae^{2\sigma\xi x_1} + Be^{-2\sigma\xi x_1} + C, \tag{15}$$

где A, B, C – сходящиеся в точке $\xi = \infty$ степенные по ξ ряды Лорана, имеющие конечное число членов положительной степени.

Разлагая определитель по минорам подматрицы $(v_1 \ \ldots \ v_4 \ 0 \ 0)$, получим

$$\begin{aligned} &A = A_1 A_2, \quad A_1 = |w_1 w_2 w_5 w_6| \, e^{(p_1 + p_2 - 2\sigma\xi)x_1}, \quad A_2 = |v_3 v_4|; \\ &B = B_1 B_2, \quad B_1 = |w_3 w_4 w_5 w_6| \, e^{(p_3 + p_4 + 2\sigma\xi)x_1}, \quad B_2 = |v_1 v_2|; \\ &C = -|w_1 w_3 w_5 w_6| \, |v_2 v_4| \, e^{(p_1+p_3)x_1} + |w_1 w_4 w_5 w_6| \, |v_2 v_3| \, e^{(p_1+p_4)x_1} + \\ &+|w_2 w_3 w_5 w_6| \, |v_1 v_4| \, e^{(p_2+p_3)x_1} - |w_2 w_4 w_5 w_6| \, |v_1 v_3| \, e^{(p_2+p_4)x_1}. \end{aligned} \tag{16}$$

Вычислим первые ненулевые члены в разложениях коэффициентов A, B, C. Этого будет достаточно для получения асимптотики собственных значений, поскольку окажется, что эти члены имеют одну и ту же, десятую степень по ξ. Знаком эквивалентности $\sim$ будет обозначаться равенство старших членов выражений.

Следующие эквивалентности вытекают из формул (12), (13) с учетом (14):

$$\begin{aligned} &u_i \sim (1-\beta)\xi^2(\sigma, -1), \;\; v_i \sim 2\mu(1-\beta)\xi^3(1, -\sigma), \;\; i = 1, 2, \\ &p_2 - p_1 \sim -\frac{1}{2}\sigma(\alpha_2 - \alpha_1)\xi^{-1}, \\ &u_2 - u_1 \sim (\alpha_2 - \alpha_1)(-\frac{1}{2}\sigma(1-\beta), 1), \\ &v_2 - v_1 \sim \mu(\alpha_2 - \alpha_1)\xi(-1, \sigma(2-\beta)). \end{aligned}$$

Из этих эквивалентностей получаются эквивалентности для величин $u_3, u_4, v_3, v_4,\ p_4 - p_3,\ u_4 - u_3,\ v_4 - v_3$ заменой индекса i на $i+2$ и σ на $-\sigma$, а w_5, w_6 получаются из w_3, w_4 путем смены обозначений μ, α_i, β на μ_1, τ_i, φ.

Пусть теперь $i \in (1,2)$, $j \in (3,4)$, тогда

$$v_j - v_i \sim \mu\xi(\alpha_{p_i} - \alpha_{p_j}, 4\sigma(1-\beta)\xi^2).$$

Наконец, все экспоненты в формулах (16) для определителей эквивалентны 1, так как в их показателях стоят только отрицательные степени ξ.

Вычислим определители:

$$\begin{aligned}
&B_2 = |v_1\ v_2| = |v_1\ \ (v_2 - v_1)| \sim 2\sigma\mu^2(1-\beta)^2(\alpha_2 - \alpha_1)\xi^4,\\
&A_2 = |v_3\ v_4| \sim -|v_1\ v_2|,\\
&|v_i\ v_j| = |v_i\ \ (v_j - v_i)| \sim 8\sigma\mu^2(1-\beta)^2\xi^6, \quad i \in (1,2), j \in (3,4),\\
&A_1 \sim |w_1\ \ (w_2 - w_1)\ \ w_5\ \ (w_6 - w_5)| \sim A_3A_4,
\end{aligned} \tag{17}$$

где $A_3 = (1-\beta)^2(\alpha_2-\alpha_1)(1-\varphi)^2(\tau_2-\tau_1)\xi^6$ – общий множитель элементов матрицы A_1.

Определитель A_4 имеет вид

$$A_4 = \begin{vmatrix} \sigma & -\frac{1}{2}\sigma(1-\beta) & -\sigma & \frac{1}{2}\sigma(1-\varphi) \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2\nu\beta & -\nu\beta & 2\nu_1\varphi & -\nu_1\varphi \\ -2\sigma\nu\beta & \sigma\nu\beta(2-\beta) & \sigma\nu_1\varphi & -\sigma\nu_1\varphi(2-\varphi) \end{vmatrix}$$

и вычисляется непосредственно. В результате имеем

$$\begin{aligned}
&A_4 = 2\varphi(6\varphi - 4 + \beta(\varphi - 3)),\\
&B_1 \sim |w_3\ \ (w_4 - w_3)\ \ w_5\ \ (w_6 - w_5)| \sim A_3B_4,
\end{aligned}$$

где

$$B_4 = \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2}(1-\beta) & -1 & \frac{1}{2}(1-\varphi) \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2\mu & -\mu & 2\mu_1 & -\mu_1 \\ 2\mu\beta & -\mu(2-\beta) & 2\mu_1 & -\mu_1(2-\varphi) \end{vmatrix}.$$

Непосредственное вычисление показывает:

$$B_4 = \mu^2(1-\beta)(1+\varphi) + \mu_1^2(1-\varphi)(1+\beta) - 2\mu\mu_1(1-\beta\varphi).$$

Из (17) следует, что

$$
\begin{aligned}
&C = C_1C_2,\\
&C_1 = 8\sigma\nu^2\beta^2(1-\beta)^2\xi^6,\\
&C_2 = -|(w_2-w_1)\ \ (w_4-w_3)\ \ w_5\ \ (w_6-w_5)| = C_3C_4,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
C_3 &= -(\alpha_2-\alpha_1)^2(\tau_2-\tau_1)(1-\varphi)\xi^4,\\
C_4 &= \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}\sigma(1-\beta) & \frac{1}{2}\sigma(1-\beta) & -\sigma & \frac{1}{2}\sigma(1-\varphi)\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ -\nu\beta & -\nu\beta & 2\nu_1\varphi & -\nu_1\varphi\\ \sigma\nu\beta(2-\beta) & -\sigma\nu\beta(2-\beta) & 2\sigma\nu_1\varphi & -\sigma\nu_1\varphi(2-\varphi) \end{vmatrix} =\\
&= -\nu^2\beta^2(2-\beta)(1+\varphi)+2\mu_1^2(1-\beta)\varphi^2(1-\varphi)+\nu\nu_1\beta\varphi^2(5-2\beta).
\end{aligned}
$$

В итоге для A, B и C получаются формулы:

$$
\begin{aligned}
&A \sim -2\sigma\nu^2\beta^2(1-\beta)(\alpha_2-\alpha_1)\xi^4\ (1-\beta)^2(\alpha_2-\alpha_1)(1-\varphi)^2(\tau_2-\tau_1)\xi^6A_4,\\
&B \sim 2\sigma\nu^2\beta^2(1-\beta)(\alpha_2-\alpha_1)\xi^4A_3B_4,\\
&C \sim -8\sigma\nu^2\beta^2(1-\beta)(\alpha_2-\alpha_1)^2(1-\varphi)(\tau_2-\tau_1)\xi^{10}C_4.
\end{aligned}
$$

Следовательно, спектральное уравнение $d = 0$ (см. (15)) для $y = e^{2\sigma\xi x_1}$ при $|\xi| \to \infty$, если $A \neq 0$, стремится к уравнению

$$y^2 + 4(1-\beta)^{-2}(1-\varphi)^{-1}C_4A_4^{-1}y - B_4A_4^{-1} = 0.$$

Обозначим это уравнение через

$$y^2 + 2ay + b = 0. \tag{18}$$

Так как $|e^{2\sigma\xi x_1}| > 1$ по условию и так как величина $e^{2\sigma\xi x_1}$ принимает при подходящем ξ любые значения по модулю большие 1, то получаем результат:

Предложение 2. Если оба корня уравнения (18) по модулю меньше 1, то число точек в спектре конечно, а если имеется корень с модулем, бо́льшим 1, то бесконечно.

В том, что уравнение (18) может иметь корень с модулем, бо́льшим 1, нетрудно убедиться непосредственным вычислением.

Заключение

Сама модель сейсмической среды нашего примера рассматривалась издавна и неоднократно, библиографию и обсуждение можно найти в работе [6]. Тот факт, что число вещественных корней у "уравнения частот" в этом примере конечно, обнаружил М.А. Наймарк [7]. Он рассматривал двумерную модель задачи. В.И. Кейлис-Борок распространил результат на трехмерный случай [8]. В работе [6] отмечено, что комплексные корни важно знать для решения многих задач о распространении волн. Явным образом они используются в алгоритме решения обратной рэлеевской задачи [2].

Комплексным точкам спектра трудно дать физическую интерпретацию, так как в принятой схеме разложения решений по функциям Бесселя, зависящим от волновых чисел, составляющие решение мономы становятся неограниченными по горизонтали. В связи с этим, было бы важно изучить детальнее этот вопрос и, наверное, нужно исследовать задачу для шара, где такой неприятности возникнуть не может из-за компактности слоев.

Интересно, разумеется, что число корней может быть как конечным, так и бесконечным, но то, что бесконечным число корней может быть только при наличии разрывов упругих параметров, совершенно удивительно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. Т.1. М.: Мир, 1983. 520 с.
2. *Beals R., Henkin G.M., Novikova N.N.* The inverse boundary problem for the Rayleigh system // J. Math. Phys. 1995. Vol.36, N 12. P.6688–6708.
3. *Левшин А.Л.* Поверхностные и каналовые сейсмические волны. М.: Наука, 1973. 176 с.
4. *Киселев С.Г., Кузнецов А.Н., Маркушевич В.М., Цемахман А.С.* Разложение на множители и форма Штурма–Лиувилля уравнений для P–SV-колебаний слоистых сред // Теоретические проблемы в геофизике. М.: Наука, 1997. С.44–69. (Вычисл. сейсмология; Вып. 29).
5. *Киселев С.Г., Маркушевич В.М.* Краевая задача Рэлея в матричной форме Штурма–Лиувилля // Проблемы динамики и сейсмичности Земли. М.: ГЕОС, 2000. С.101–119. (Вычисл. сейсмология; Вып. 31).
6. *Кейлис-Борок В.И.* Интерференционные поверхностные волны. М.: Изд-во АН СССР, 1960. 195 с.
7. *Наймарк М.А.* О корнях уравнения частот упругого слоя, лежащего на упругом полупространстве // Тр. Сейсмол. ин-та. Л.: Изд-во АН СССР. 1947. N 119. С.46–62.
8. *Кейлис-Борок В.И.* О поверхностных волнах в слое, лежащем на упругом полупространстве // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1951. N 2. С.17–39.