

УДК 550.34

## РАСЧЕТ СЕЙСМОГРАММ ДЛЯ ПЛОСКОЙ ОДНОРОДНОЙ ЗЕМЛИ

Д.В. Перегудов

Объединенный институт физики Земли Российской академии наук, Москва

Рассматривается проблема вычисления сейсмограмм в однородном полупространстве для источника с произвольным тензором сейсмического момента. Результат выражается через эллиптические интегралы. Приведены примеры расчета сейсмограмм для разных источников по разным направлениям.

## SEISMOGRAM CALCULATION FOR A FLAT HOMOGENEOUS EARTH

D.V. Peregoudov

United Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow

The problem of calculating seismograms in homogeneous half-space for the source with arbitrary seismic momentum tensor is considered. The result is expressed via elliptical integrals. The solution of the problem is illustrated with computed seismograms for different moment tensors and different azimuths.

### Введение

Предлагаемая статья является продолжением работы [?], в которой детально рассмотрено решение двумерной задачи Лэмба. Там же приведен обзор литературы [2–10] (не только по двумерным, но и по трехмерным задачам для однородного полупространства), который мы здесь не будем повторять. Настоящая работа “ближе” к реальности тем, что исследуется трехмерный случай, к тому же источник выбирается вполне физическим и соответствует современным представлениям о механизме тектонического землетрясения. Некоторые сведения о сейсмическом источнике приведены в Приложении.

Отметим сразу особенности данной работы по сравнению с работами [2–10]. Во-первых, в предлагаемой работе рассматривается источник, расположенный внутри полупространства, тогда как в предыдущих работах рассматривался источник в виде внешней силы, приложенной к поверхности. Во-вторых, в предлагаемой работе рассматривается источник-тензор момента, чего ранее не делалось. В-третьих, в предлагаемой работе подробно исследованы особенности эталонных интегралов (фактически – функции Грина), соответствующие различным волнам. Это исследование основано на специальной замене переменных при интегрировании по горизонтальной медленности, при этом оказывается, что все компоненты функции Грина для заглубленного источника (а не только компоненты функции Грина для источника на поверхности, как показано в [9]) выражаются через эллиптические интегралы.

### 1. Постановка задачи

Простейшей моделью Земли является однородное изотропное упругое полупространство. Направим ось  $z$  декартовой системы координат внутрь полупространства, а оси  $x$  и  $y$  – параллельно границе (рис. 1). Уравнения теории упругости имеют вид:

$$\rho \ddot{u}_i = c_{ijkl} \partial_j \partial_l u_k + f_i,$$

где  $\rho$  – плотность,  $u_i$  – вектор смещения,  $c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$  – тензор Гука.

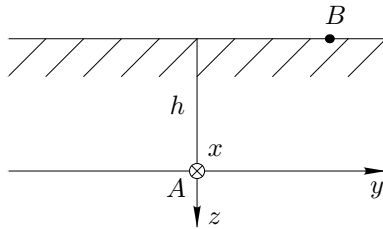


Рис. 1. К постановке задачи

Плотность внешних сил  $f_i$  выберем в виде сейсмического источника-тензора момента

$$f_i(t, \mathbf{r}) = -M_{ik}(t) \frac{\partial}{\partial r_k} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

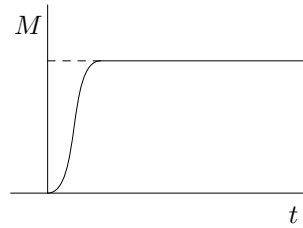
где  $\mathbf{r}'$  – место расположения источника. (Более детальное обсуждение сейсмического источника приведено в Приложении.) До землетрясения

(при  $t < 0$ ) тензор сейсмического момента равен нулю, а после землетрясения – некоторой постоянной величине, так что изменение  $M_{ik}(t)$  происходит в течение короткого промежутка времени вблизи  $t = 0$  (рис. 2). Для упрощения формул выберем начало координат в источнике, глубину которого обозначим через  $h$ . Границу полупространства будем считать свободной от напряжений

$$\sigma_{iz}(t, x, y, -h) = 0,$$

где  $\sigma_{ij} = c_{ijkl}\partial_k u_l$ . Предполагается также, что в начальный момент среда находилась в равновесии и покоилась:  $u_i(0, \mathbf{r}) = 0$ ,  $\dot{u}_i(0, \mathbf{r}) = 0$ . Требуется вычислить сейсмограмму, т.е. зависимость от времени смещения в заданной (произвольной) точке поверхности.

**Рис. 2.** Характерная зависимость тензора сейсмического момента от времени



Соберем все предположения вместе, но сперва введем скорости продольных  $v_p^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$  и поперечных  $v_s^2 = \mu/\rho$  волн, а также их отношение  $\gamma = v_p/v_s$  и новое время  $\tau = v_p t$ . Система уравнений, начальных и граничных условий примет вид:

$$\begin{aligned} \gamma^2 \ddot{u}_i &= (\gamma^2 - 1) \partial_i \partial_j u_j + \partial_j^2 u_i - \frac{M_{ik}(\tau)}{\mu} \partial_k \delta(\mathbf{r}), \\ u_i(0, \mathbf{r}) &= 0, \quad \dot{u}_i(0, \mathbf{r}) = 0, \\ \sigma_{iz}(\tau, x, y, -h) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Сделаем несколько замечаний по постановке задачи. В силу линейности уравнений, решение имеет следующий общий вид:

$$u_i(\tau, \mathbf{x}) = \int_0^\tau ds u_{ijk}(\tau - s, \mathbf{x}) M_{jk}(s). \tag{2}$$

Однако методом Каньяра, который мы применим для построения решения, естественно определяются не коэффициенты  $u_{ijk}$ , а некоторые функции  $\Gamma_{ijk}$  такие, что  $\ddot{\Gamma}_{ijk} = u_{ijk}$ . Удобно выполнить в формуле (2) двукратное интегрирование по частям, учитывая, что внеинтегральные члены выпадают (на нижнем пределе это обеспечивается тензором

сейсмического момента, а на верхнем – коэффициентами  $u_{ijk}$ , которые соответствуют запаздывающему решению)

$$u_i(\tau, \mathbf{x}) = \int_0^\tau ds \Gamma_{ijk}(\tau - s, \mathbf{x}) \ddot{M}_{jk}(s). \quad (3)$$

Оказывается, что даже коэффициенты  $\Gamma_{ijk}$  (не говоря уж об  $u_{ijk}$ ) имеют довольно сильные особенности (самая сильная – порядка  $\ln \tau$  – на фронте  $S$ -волны, следующей за головной волной. (Более подробное обсуждение см. в разд. 5.) Поскольку решение будет получено в виде интеграла, который предполагается вычислять численно, нужно по возможности избегать бесконечностей. Этого можно добиться, еще раз проинтегрировав (3) по частям

$$u_i(\tau, \mathbf{x}) = \int_0^\tau ds G_{ijk}(\tau - s, \mathbf{x}) \ddot{\dot{M}}_{jk}(s).$$

Функции  $G_{ijk}$  уже непрерывны, однако нужно накладывать дополнительное условие  $G_{ijk}(\tau, \mathbf{x}) = 0$  при  $\tau < 0$  для исчезновения внеинтегральных членов.

В силу симметрии среды азимутальная зависимость смещения имеет очень простой вид и определяется трансформационными свойствами тензора сейсмического момента. Поэтому фактически вычисление сейсмограмм для заданного горизонтального расстояния до источника и произвольного азимута сводится к вычислению коэффициентов разложения смещения по компонентам тензора момента для какого-то одного (удобного) азимута.

Нетрудно определить количество независимых коэффициентов. Функции  $G_{ijk}$ , очевидно, представляют собой тензор третьего ранга. Имеется всего два вектора, из которых его можно построить: вектор  $\mathbf{n}$  нормали к границе и вектор  $\mathbf{r}$ , направленный из источника в точку наблюдения. В нашем распоряжении имеется также единичный тензор  $\delta_{ij}$ . В силу симметрии тензора сейсмического момента тензор  $G_{ijk}$  можно считать симметричным по двум последним индексам. Оказывается, что можно составить десять комбинаций с указанными свойствами, это:  $r_i \delta_{jk}$ ,  $n_i \delta_{jk}$ ,  $r_j \delta_{ik} + r_k \delta_{ij}$ ,  $n_j \delta_{ik} + n_k \delta_{ij}$ ,  $r_i r_j r_k$ ,  $n_i n_j n_k$ ,  $n_i r_j r_k$ ,  $r_i (n_j r_k + n_k r_j)$ ,  $n_i (n_j r_k + n_k r_j)$ ,  $r_i n_j n_k$ . Кроме того, имеется остаточная симметрия по отношению к вращению вокруг оси  $z$ . Эта симметрия дает возможность сократить число независимых коэффициентов до девяти. Действительно, свертка  $G_{ijj}$  есть линейная комбинация векторов  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{r}$ . Выбрав систему координат так, чтобы точка наблюдения лежала на оси  $y$ , получим  $G_{xjj} = 0$ , т.е. линейное соотношение между коэффициентами.

В дальнейшем будем вычислять коэффициенты именно для случая, когда точка наблюдения расположена на оси  $y$ . Если мы хотим вычислить сейсмограмму не на оси  $y$ , а по какому-то другому азимуту, то вычисления можно проделать по той же формуле (2), преобразовав коэффициенты  $u_{ijk}$ . Именно, введем систему координат  $x'y'z$  такую, что ось  $y'$  лежит по заданному азимуту. Тогда преобразования вектора смещения и тензора сейсмического момента имеют вид (рис.3):

$$u_i = O_{ij}u'_j, \quad M_{kl} = O_{kn}O_{lp}M'_{np}, \quad O = \begin{pmatrix} \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ -\cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

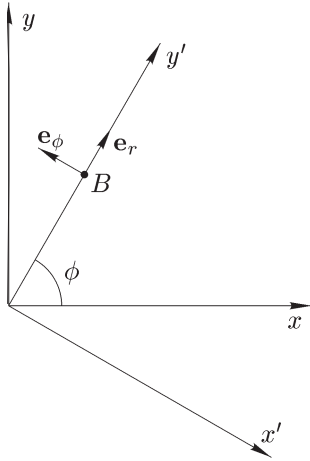


Рис. 3. Преобразование координат

Используя ортогональность матрицы  $O$ , найдем, что смещения по выбранному азимуту вычисляются по формуле (2) с заменой  $u_{ijk}$  на

$$u'_{ijk} = O_{ik}O_{jl}O_{kn}u_{kl n}. \quad (5)$$

Более наглядными являются компоненты вектора смещения в цилиндрических координатах, поэтому практически удобнее пользоваться не формулой (5), а преобразовывать тензор момента по (4) и вычислять  $u'_i$  по формулам (2) с последующим отождествлением  $u'_x \rightarrow -u_\phi$ ,  $u'_y \rightarrow u_r$ .

## 2. Решение задачи в образах

Для решения задачи (1) применим метод интегральных преобразований. Сделаем преобразование Лапласа по времени и преобразования Фурье по  $x$  и  $y$

$$U_i(\omega, k_x, k_y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} dx dy e^{-i(k_x x + k_y y)} \int_0^{\infty} d\tau e^{-\omega\tau} u_i(\tau, \mathbf{r}).$$

Для образов получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Источник входит только в точке  $z = 0$ , поэтому его наличие учтем, вводя условия скачка. При  $z \neq 0$  получаем систему однородных уравнений, которая в явной покомпонентной записи имеет вид:

$$\begin{aligned}\gamma^2\omega^2 U_x &= (\gamma^2 - 1)ik_x(ik_x U_x + ik_y U_y + \partial_z U_z) + (-k^2 + \partial_z^2)U_x, \\ \gamma^2\omega^2 U_y &= (\gamma^2 - 1)ik_y(ik_x U_x + ik_y U_y + \partial_z U_z) + (-k^2 + \partial_z^2)U_y, \\ \gamma^2\omega^2 U_z &= (\gamma^2 - 1)\partial_z(ik_x U_x + ik_y U_y + \partial_z U_z) + (-k^2 + \partial_z^2)U_z.\end{aligned}$$

Подстановка  $U \sim e^{-\alpha z}$  приводит к системе алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} \gamma^2(\omega^2 + k_x^2) + k_y^2 - \alpha^2 & (\gamma^2 - 1)k_x k_y & i(\gamma^2 - 1)k_x \alpha \\ (\gamma^2 - 1)k_x k_y & \gamma^2(\omega^2 + k_y^2) + k_x^2 - \alpha^2 & i(\gamma^2 - 1)k_y \alpha \\ i(\gamma^2 - 1)k_x \alpha & i(\gamma^2 - 1)k_y \alpha & \gamma^2\omega^2 + k^2 - \gamma^2\alpha^2 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} = 0. \quad (6)$$

Как известно, линейная однородная система алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение, если определитель ее матрицы равен нулю

$$\Delta = \gamma^2(\alpha^2 - \omega^2\gamma^2 - k^2)^2(\alpha^2 - \omega^2 - k^2) = 0.$$

Таким образом, нетривиальное решение существует при

$$\alpha_1 = \sqrt{\omega^2\gamma^2 + k^2}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\omega^2 + k^2}, \quad \alpha_3 = -\alpha_1, \quad \alpha_4 = -\alpha_2,$$

причем корни  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$  двукратные. Подставляя найденные корни в систему уравнений (6), можно найти ее решения, причем корням  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$  соответствуют по два линейно независимых решения. Считая, что  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  имеют положительные вещественные части (более подробное обсуждение в [?]), видим, что решения с  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  убывают при  $z \rightarrow +\infty$ , а решения с  $\alpha_3$  и  $\alpha_4$  — при  $z \rightarrow -\infty$ . Общее решение, убывающее при  $z \rightarrow +\infty$ , имеет вид:

$$\begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} = a_+ \begin{pmatrix} k_y \\ -k_x \\ 0 \end{pmatrix} e^{-z\alpha_1} + b_+ \begin{pmatrix} -i\alpha_1 k_x \\ -i\alpha_1 k_y \\ k^2 \end{pmatrix} e^{-z\alpha_1} + \\ + c_+ \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ i\alpha_2 \end{pmatrix} e^{-z\alpha_2}, \quad (7)$$

причем линейно независимые решения для  $\alpha_1$  выбраны так, что первое и второе слагаемые представляют собой вклады  $SH$ - и  $SV$ -волн, третье же представляет вклад  $P$ -волны. Общее решение, убывающее при  $z \rightarrow -\infty$ , имеет аналогичный вид:

$$\begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} = a_- \begin{pmatrix} k_y \\ -k_x \\ 0 \end{pmatrix} e^{z\alpha_1} + b_- \begin{pmatrix} -i\alpha_1 k_x \\ -i\alpha_1 k_y \\ -k^2 \end{pmatrix} e^{z\alpha_1} + c_- \begin{pmatrix} -k_x \\ -k_y \\ i\alpha_2 \end{pmatrix} e^{z\alpha_2}. \quad (8)$$

Решение в образах будем строить в виде суммы двух членов: первый будет представлять собой решение для бесконечного пространства, второй – добавку за счет границы. Решение для бесконечного пространства должно убывать при  $z \rightarrow \pm\infty$ , поэтому оно имеет вид (7) при  $z > 0$  и вид (8) при  $z < 0$ . Добавка за счет границы должна убывать при  $z \rightarrow +\infty$ , так что она имеет вид (7).

Условия скачка на источнике имеют вид (более подробное обсуждение в Приложении):

$$\begin{aligned} \Delta U_x &= M_{xz}/\mu, & \Delta U_y &= M_{yz}/\mu, & \Delta U_z &= M_{zz}/(\mu\gamma^2), \\ \Delta \Sigma_{xz} &= i [(2/\gamma^2 - 1)k_x M_{zz} + M_{xx}k_x + M_{xy}k_y], \\ \Delta \Sigma_{yz} &= i [(2/\gamma^2 - 1)k_y M_{zz} + M_{xy}k_x + M_{yy}k_y], \\ \Delta \Sigma_{zz} &= 0. \end{aligned}$$

(Здесь  $\Sigma$  обозначает образ напряжений.) Оказывается, если вместо  $x$ - и  $y$ -компонент смещения ввести комбинации  $k_y U_x - k_x U_y$  и  $k_x U_x + k_y U_y$  (и аналогичные комбинации  $k_y \Sigma_{xz} - k_x \Sigma_{yz}$  и  $k_x \Sigma_{xz} + k_y \Sigma_{yz}$  для напряжений), то в условиях скачка уравнения для коэффициентов  $a_{\pm}$  отделяются (это соответствует отделению  $SH$ -волны от пары  $P$ - $SV$ )

$$\begin{aligned} (a_+ - a_-)k^2 &= (M_{xz}k_y - M_{yz}k_x)/\mu, \\ -(b_+ - b_-)i\alpha_1 k^2 + (c_+ + c_-)k^2 &= (M_{xz}k_x + M_{yz}k_y)/\mu, \\ (b_+ + b_-)k^2 + (c_+ - c_-)i\alpha_2 &= M_{zz}/(\mu\gamma^2), \\ -2\mu\alpha_1 k^2 (a_+ + a_-) &= i((M_{xx} - M_{yy})k_x k_y + M_{xy}(k_y^2 - k_x^2)), \\ \mu((b_+ + b_-)ik^2\alpha_5^2 - (c_+ - c_-)2k^2\alpha_2) &= \\ &= i((2/\gamma^2 - 1)k^2 M_{zz} + M_{xx}k_x^2 + 2M_{xy}k_x k_y + M_{yy}k_y^2), \\ \mu(-2k^2\alpha_1(b_+ - b_-) - i\alpha_5^2(c_+ + c_-)) &= 0, \end{aligned}$$

где  $\alpha_5 = \sqrt{\omega^2\gamma^2 + 2k^2}$ .

Нас интересует решение задачи (1) на свободной поверхности, поэтому нужны только коэффициенты  $a_-$ ,  $b_-$ ,  $c_-$ :

$$\begin{aligned}
a_- &= \frac{i}{2\mu k^2 \alpha_1} ((k_x^2 - k_y^2) M_{xy} + ik_y \alpha_1 M_{xz} + k_x k_y (M_{yy} - M_{xx}) - \\
&\quad - ik_x \alpha_1 M_{yz}), \\
b_- &= \frac{1}{2\mu k^2 \gamma^2 \omega^2 \alpha_1} (-i\alpha_5^2 k_y M_{yz} + \alpha_1 (k_x^2 M_{xx} + k_y^2 M_{yy} - k^2 M_{zz}) - \\
&\quad - ik_x \alpha_5^2 M_{xz} + 2k_x k_y \alpha_1 M_{xy}), \\
c_- &= \frac{i}{2\mu \gamma^2 \omega^2 \alpha_2} (\alpha_2^2 M_{zz} - k_x^2 M_{xx} - k_y^2 M_{yy} + 2ik_y \alpha_2 M_{yz} - \\
&\quad - 2k_x k_y M_{xy} + 2ik_x \alpha_2 M_{xz}).
\end{aligned} \tag{9}$$

Теперь мы должны определить добавку за счет границы. Условия на свободной поверхности имеют вид:

$$\Sigma_{xz}(\omega, \mathbf{k}, -h) = 0, \quad \Sigma_{yz}(\omega, \mathbf{k}, -h) = 0, \quad \Sigma_{zz}(\omega, \mathbf{k}, -h) = 0.$$

Эти условия, записанные через комбинации  $k_y \Sigma_{xz} - k_x \Sigma_{yz}$  и  $k_x \Sigma_{xz} + k_y \Sigma_{yz}$ , дают связь коэффициентов  $a_+$ ,  $b_+$ ,  $c_+$  в добавке с уже найденными коэффициентами  $a_-$ ,  $b_-$ ,  $c_-$  в решении для бесконечного пространства (коэффициенты  $a_{\pm}$ , как и прежде, отделяются)

$$\begin{aligned}
-a_+ e^{h\alpha_1} + a_- e^{-h\alpha_1} &= 0, \\
b_+ i \alpha_1^2 e^{h\alpha_1} - b_- i \alpha_1^2 e^{-h\alpha_1} - c_+ \alpha_2 e^{h\alpha_2} - c_- \alpha_2 e^{-h\alpha_2} &= 0, \\
-b_+ k^2 \alpha_1 e^{h\alpha_1} - b_- k^2 \alpha_1 e^{-h\alpha_1} - c_+ i \alpha_2^2 e^{h\alpha_2} + c_- i \alpha_2^2 e^{-h\alpha_2} &= 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Решая (10), находим

$$\begin{aligned}
a_+ &= a_- e^{-2h\alpha_1}, \\
b_+ &= (b_- Q e^{-2h\alpha_1} - c_- 4i \alpha_2 \alpha_5^2 e^{-h\alpha_1 - h\alpha_2}) / R, \\
c_+ &= (b_- 4ik^2 \alpha_1 \alpha_5^2 e^{-h\alpha_1 - h\alpha_2} + c_- Q e^{-2h\alpha_2}) / R,
\end{aligned}$$

где  $R = \alpha_5^4 - 4k^2 \alpha_1 \alpha_2$  – функция Рэлея,  $Q = \alpha_5^4 + 4k^2 \alpha_1 \alpha_2$ . Образ полного решения (1) на свободной поверхности принимает вид:

$$\begin{aligned}
U_x &= 2k_y e^{-h\alpha_1} a_- - \frac{2i\gamma^2 \omega^2 \alpha_1 \alpha_5^2 k_x}{R} e^{-h\alpha_1} b_- - \frac{4\gamma^2 \omega^2 \alpha_1 \alpha_2 k_x}{R} e^{-h\alpha_2} c_-, \\
U_y &= -2k_x e^{-h\alpha_1} a_- - \frac{2i\gamma^2 \omega^2 \alpha_1 \alpha_5^2 k_y}{R} e^{-h\alpha_1} b_- - \frac{4\gamma^2 \omega^2 \alpha_1 \alpha_2 k_y}{R} e^{-h\alpha_2} c_-, \\
U_z &= -\frac{4\gamma^2 \omega^2 k^2 \alpha_1 \alpha_2}{R} e^{-h\alpha_1} b_- + \frac{2i\gamma^2 \omega^2 \alpha_2 \alpha_5^2}{R} e^{-h\alpha_2} c_-,
\end{aligned} \tag{11}$$



где  $a_-$ ,  $b_-$ ,  $c_-$  определяются формулами (9).

Координатно-временная зависимость решения вычисляется по формуле

$$u_i(\tau, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi i} \int_C d\omega e^{\omega\tau} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} e^{i(k_x x + k_y y)} U_i(\omega, k_x, k_y, z). \quad (12)$$

Как отмечалось при постановке задачи, достаточно провести это вычисление для  $x = 0$ ,  $y > 0$ . При этом  $k_x$  в экспоненте пропадает и остается только в (9) и (11). Все нечетные по  $k_x$  члены в образах можно опустить, поскольку они дают нуль при интегрировании. Образы смещений принимают вид

$$U_i = \left( U_{ijk}^{(1)} e^{-h\alpha_1} + U_{ijk}^{(2)} e^{-h\alpha_2} \right) \frac{M_{jk}}{\mu},$$

где отличные от нуля коэффициенты равны:

$$\begin{aligned} U_{xxy}^{(1)} &= \frac{ik_y(k_x^2 - k_y^2)}{k^2\alpha_1} - \frac{2ik_x^2 k_y \alpha_1 \alpha_5^2}{k^2 R}, & U_{xxz}^{(1)} &= -\frac{k_y^2}{k^2} - \frac{k_x^2 \alpha_5^4}{k^2 R}, \\ U_{yxx}^{(1)} &= \frac{ik_x^2 k_y}{k^2 \alpha_1} - \frac{ik_x^2 k_y \alpha_1 \alpha_5^2}{k^2 R}, & U_{yyy}^{(1)} &= -\frac{ik_x^2 k_y}{k^2 \alpha_1} - \frac{ik_y^3 \alpha_1 \alpha_5^2}{k^2 R}, \\ U_{yyz}^{(1)} &= \frac{ik_y \alpha_1 \alpha_5^2}{R}, & U_{yyz}^{(1)} &= -\frac{k_x^2}{k^2} - \frac{k_y^2 \alpha_5^4}{k^2 R}, \\ U_{zxx}^{(1)} &= -\frac{2k_x^2 \alpha_1 \alpha_2}{R}, & U_{zyy}^{(1)} &= -\frac{2k_y^2 \alpha_1 \alpha_2}{R}, & U_{zzz}^{(1)} &= \frac{2k^2 \alpha_1 \alpha_2}{R}, \\ U_{zyz}^{(1)} &= \frac{2ik_y \alpha_2 \alpha_5^2}{R}, & U_{xxy}^{(2)} &= \frac{4ik_x^2 k_y \alpha_1}{R}, & U_{xxz}^{(2)} &= \frac{4k_x^2 \alpha_1 \alpha_2}{R}, \\ U_{yxx}^{(2)} &= \frac{2ik_x^2 k_y \alpha_1}{R}, & U_{yyy}^{(2)} &= \frac{2ik_y^3 \alpha_1}{R}, & U_{yyz}^{(2)} &= -\frac{2ik_y \alpha_1 \alpha_2^2}{R}, \\ U_{yyz}^{(2)} &= \frac{4k_y^2 \alpha_1 \alpha_2}{R}, & U_{zxx}^{(2)} &= \frac{k_x^2 \alpha_5^2}{R}, & U_{zyy}^{(2)} &= \frac{k_y^2 \alpha_5^2}{R}, \\ U_{zzz}^{(2)} &= -\frac{\alpha_2^2 \alpha_5^2}{R}, & U_{zyz}^{(2)} &= -\frac{2ik_y \alpha_2 \alpha_5^2}{R}. \end{aligned}$$

Не все коэффициенты независимы. Достаточно семнадцати величин

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{ik_x^2 k_y}{k^2 \alpha_1} - \frac{ik_x^2 k_y \alpha_1 \alpha_5^2}{k^2 R}, & K_2 &= -\frac{ik_y \alpha_1 \alpha_5^2}{R}, \\ K_3 &= \frac{k_y^2}{k^2} + \frac{k_x^2 \alpha_5^4}{k^2 R}, & K_4 &= 1 + \frac{\alpha_5^4}{R}, & K_5 &= -\frac{2k_x^2 \alpha_1 \alpha_2}{R}, \\ K_6 &= -\frac{2k^2 \alpha_1 \alpha_2}{R}, & K_7 &= -\frac{2ik_y \alpha_2 \alpha_5^2}{R}, & K_8 &= -\frac{ik_y}{\alpha_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{2ik_x^2 k_y \alpha_1}{R}, & L_2 &= \frac{2ik_y k^2 \alpha_1}{R}, & L_3 &= -\frac{4k_x^2 \alpha_1 \alpha_2}{R}, \\
L_4 &= -\frac{4k^2 \alpha_1 \alpha_2}{R}, & L_5 &= -\frac{k_x^2 \alpha_5^2}{R}, & L_6 &= -\frac{k^2 \alpha_5^2}{R}, \\
L_7 &= -\frac{2ik_y \alpha_2 \alpha_5^2}{R}, & L_8 &= \frac{\omega^2 \alpha_5^2}{R}, & L_9 &= -\frac{2ik_y \alpha_1 \omega^2}{R},
\end{aligned}$$

через которые коэффициенты  $U_{ijk}$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
U_{xxy}^{(1)} &= 2K_1 + K_8, & U_{xxy}^{(2)} &= 2L_1, \\
U_{xxz}^{(1)} &= -K_3, & U_{xxz}^{(2)} &= -L_3, \\
U_{yxx}^{(1)} &= K_1, & U_{yxx}^{(2)} &= L_1, \\
U_{yyy}^{(1)} &= K_2 - K_1, & U_{yyy}^{(2)} &= L_2 - L_1, \\
U_{yzz}^{(1)} &= -K_2, & U_{yzz}^{(2)} &= L_9 - L_2, \\
U_{yyz}^{(1)} &= K_3 - K_4, & U_{yyz}^{(2)} &= L_3 - L_4, \\
U_{zxx}^{(1)} &= K_5, & U_{zxx}^{(2)} &= -L_5, \\
U_{zyy}^{(1)} &= K_6 - K_5, & U_{zyy}^{(2)} &= L_5 - L_6, \\
U_{zzz}^{(1)} &= -K_6, & U_{zzz}^{(2)} &= L_6 - L_8, \\
U_{zyz}^{(1)} &= -K_7, & U_{zyz}^{(2)} &= L_7.
\end{aligned}$$

Зависимость  $K$  и  $L$  от компонент вектора  $\mathbf{k}$  можно было предугадать заранее. Поскольку  $U_{ijk}$  является тензором третьего ранга, а единственный вектор, из которого его можно построить – это  $\mathbf{k}$ , то компоненты  $U_{ijk}$  являются полиномами не старше третьей степени по компонентам  $\mathbf{k}$ . Таких полиномов всего четыре:  $1, k_y, k_x^2, k_y k_x^2$ . Остальные либо содержат нечетные степени  $k_x$  и дают нуль при интегрировании, либо выражаются через приведенные выше и  $k^2$ . Ниже мы увидим, что четыре типа зависимости от  $k_x, k_y$  дадут четыре типа зависимости от координат и времени.

Еще одна интересная особенность коэффициентов  $U_{ijk}$  состоит в том, что вклады  $SH$ - и  $SV$ -волн не разделяются: величины  $K$  содержат как слагаемое с функцией Рэлея  $R$  в знаменателе, соответствующее  $SV$ -волне, так и слагаемое, не содержащее функции Рэлея и соответствующее  $SH$ -волне. Это отражает тот факт, что рассматриваемый источник не может возбуждать только  $SH$ -волны (или только  $SV$ -волны). Более того, ниже мы увидим, что вклады  $SH$ - и  $SV$ -волн не разделяются аналитически: если бы мы попытались вычислить их формально отдельно, то получили бы, что вступления волн должны наблюдаться раньше, чем это возможно, исходя из их скорости распространения.

### 3. Метод Каньяра

В разд. 2 мы свели задачу вычисления сейсмограмм к вычислению семнадцати трехкратных интегралов (см.(12)) с подынтегральными выражениями  $K$  и  $L$ . Метод Каньяра позволяет привести эти интегралы к однократным. Рассмотрим, например, интеграл

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C d\omega e^{\omega\tau} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} e^{iky y - h\alpha_2} L_1.$$

Перейдем к интегрированию в полярных координатах, в подынтегральном выражении нужно будет заменить  $k_x \rightarrow k \cos \phi$ ,  $k_y \rightarrow k \sin \phi$

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C d\omega e^{\omega\tau} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty k dk e^{iky \sin \phi - h\alpha_2} L_1.$$

Сделаем теперь замену  $y \sin \phi = \eta$ , в  $L_1$  нужно будет положить  $k_x \rightarrow (k/y) \sqrt{y^2 - \eta^2}$ ,  $k_y \rightarrow k\eta/y$

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C d\omega e^{\omega\tau} \frac{1}{(2\pi)^2} \oint_E \frac{d\eta}{\sqrt{y^2 - \eta^2}} \int_0^\infty k dk e^{ik\eta - h\alpha_2} L_1.$$

Замечательным наблюдением является то, что, в силу однородности уравнений, начальных и граничных условий, замена  $k = i\omega s$  ликвидирует зависимость подынтегрального выражения от  $\omega$ , оставляя  $\omega$  только в экспоненте

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C d\omega e^{\omega\tau} \frac{\omega^2}{(2\pi)^2} \oint_E \frac{d\eta}{\sqrt{y^2 - \eta^2}} \int_D (-s ds) e^{-\omega(s\eta + h\sqrt{1-s^2})} L_1, \quad (13)$$

где

$$L_1 = 2s^3 \eta (y^2 - \eta^2) \sqrt{\gamma^2 - s^2} / y^3 R(s),$$

$$R(s) = (\gamma^2 - 2s^2)^2 + 4s^2 \sqrt{(1-s^2)(\gamma^2 - s^2)}$$

– “обезразмеренная” функция Рэля. Контурны интегрирования представлены на рис. 4–6.

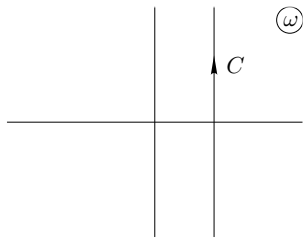


Рис. 4. Контур  $C$

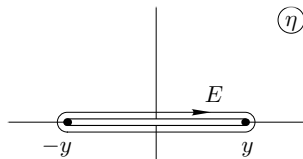


Рис. 5. Контур  $E$

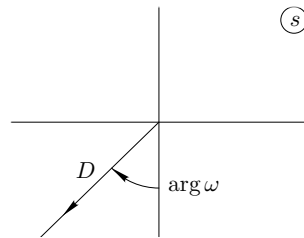


Рис. 6. Контур  $D$

Множитель  $\omega^2$  под интегралом можно представить как результат двукратного дифференцирования по времени

$$J_1 = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{1}{2\pi i} \int_C d\omega e^{\omega\tau} \oint_E \frac{d\eta}{\sqrt{y^2 - \eta^2}} \int_D (-s ds) e^{-\omega(s\eta + h\sqrt{1-s^2})} L_1. \quad (14)$$

(Вообще-то лапласовским образом  $f''(\tau)$  является  $\omega^2 F(\omega) - \omega f(0) - f'(0)$ , однако ниже при исследовании интегралов мы увидим, что в данном случае начальные значения  $f(0)$  и  $f'(0)$  равны нулю. Имеется и другое объяснение. Можно отнести множитель  $\omega^2$  за счет тензора сейсмического момента и считать, что и сам тензор, и его производная равны нулю в начальный момент времени.)

Пара интегралов по  $s$  и  $\omega$  вычисляется методом Каньяра (подробное обсуждение в [?]). В результате получим

$$J_1 = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \oint_E \frac{d\eta}{\sqrt{y^2 - \eta^2}} (-s) \frac{ds}{d\tau} \theta(\tau - h) L_1, \quad (15)$$

где  $s$  выражается через  $\eta$  и  $\tau$  по формуле

$$\tau = s\eta + h\sqrt{1-s^2}. \quad (16)$$

Полученное выражение можно упростить, если воспользоваться следующим результатом. Пусть  $f(s, \eta, \tau) = 0$ . Тогда, фиксируя одну переменную, можно выразить вторую через третью и вычислить производную. Построенные таким образом производные связаны соотношением

$$\frac{ds}{d\tau} \frac{d\tau}{d\eta} \frac{d\eta}{ds} = -1. \quad (17)$$

Действительно, по теореме о неявной функции получаем выражения:

$$\frac{ds}{d\tau} = -\frac{\partial f / \partial \tau}{\partial f / \partial s}, \quad \frac{d\tau}{d\eta} = -\frac{\partial f / \partial \eta}{\partial f / \partial \tau}, \quad \frac{d\eta}{ds} = -\frac{\partial f / \partial s}{\partial f / \partial \eta},$$

перемножая которые приходим к (17).

Сделаем теперь в формуле (15) замену переменных  $\eta \rightarrow s$  по формуле (16). Воспользуемся результатом (17) и тем, что  $d\tau/d\eta = s$ . Получим

$$J_1 = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \oint_F \frac{s ds}{y \sqrt{s^2 - \xi^2}} \theta(\tau - h) L_1, \quad (18)$$

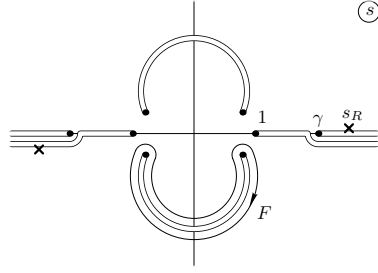


Рис. 7. Контур  $F$

где  $\xi = s\eta/y$ , а контур  $F$  изображен на рис. 7. Теперь уже  $\eta$  выражается через  $s$  по формуле (16).

Аналогичная процедура применяется к остальным интегралам. Конечно, в интегралах

$$I_n = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \oint_F \frac{s ds}{y \sqrt{s^2 - \xi^2}} \theta(\tau - \gamma h) K_n$$

переменные  $s$  и  $\eta$  выражаются друг через друга не по формуле (16), а по формуле  $\tau = s\eta + h\sqrt{\gamma^2 - s^2}$ , что приводит к несколько иному контуру  $F$ , однако его качественный вид остается прежним. Выпишем выражения для  $K$  и  $L$  через  $s$  и  $\xi$ :

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{(s^2 - \xi^2)\xi}{s^2} \left( \frac{\alpha_1 \alpha_5^2}{R} - \frac{1}{\alpha_1} \right), & K_2 &= \frac{\xi \alpha_1 \alpha_5^2}{R}, \\ K_3 &= \frac{\xi^2}{s^2} + \frac{(s^2 - \xi^2)\alpha_5^4}{s^2 R}, & K_4 &= 1 + \frac{\alpha_5^4}{R}, & K_5 &= \frac{2(s^2 - \xi^2)\alpha_1 \alpha_2}{R}, \\ K_6 &= \frac{2s^2 \alpha_1 \alpha_2}{R}, & K_7 &= \frac{2\xi \alpha_2 \alpha_5^2}{R}, & K_8 &= \frac{\xi}{\alpha_1}, \\ L_1 &= \frac{2\xi(s^2 - \xi^2)\alpha_1}{R}, & L_2 &= \frac{2s^2 \xi \alpha_1}{R}, & L_3 &= \frac{4(s^2 - \xi^2)\alpha_1 \alpha_2}{R}, \\ L_4 &= \frac{4s^2 \alpha_1 \alpha_2}{R}, & L_5 &= \frac{(s^2 - \xi^2)\alpha_5^2}{R}, & L_6 &= \frac{s^2 \alpha_5^2}{R}, \\ L_7 &= \frac{2\xi \alpha_2 \alpha_5^2}{R}, & L_8 &= \frac{\alpha_5^2}{R}, & L_9 &= \frac{2\xi \alpha_1}{R}. \end{aligned}$$

(Мы употребляем прежние обозначения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  для “обезразмеренных” радикалов  $\sqrt{\gamma^2 - s^2}$  и  $\sqrt{1 - s^2}$ , функция Рэлея тоже “обезразмеренная”.)

Координаты и время входят только через  $\xi$ . Поскольку  $\xi$  происходит от  $\eta$ , а  $\eta$  – от  $k_x$  и  $k_y$ , то ясно, что упомянутые в разд. 2 четыре типа зависимости от  $k_x$  и  $k_y$  дают четыре типа зависимости от координат и времени.

Видно также, что в подынтегральных выражениях  $K_1$  и  $K_3$  отдельные слагаемые имеют особенности типа  $1/s^2$ , которые сокращаются в полном выражении.

Не будем исследовать непосредственно интегралы типа (18). Сначала сделаем замену переменной, которая упростит и контур интегрирования, и подынтегральное выражение. Нам не удалось обнаружить подобного преобразования в литературе. По-видимому, оно является оригинальным, в связи с чем мы опишем его подробно.

#### 4. Преобразование интегралов

Замена переменной  $s \rightarrow \alpha$ , о которой говорилось выше, имеет вид:

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_1, & \text{для интегралов } I, \\ \alpha_2, & \text{для интегралов } J. \end{cases}$$

Из вида подынтегрального выражения (см.(18)) ясно, что в результате получается эллиптический интеграл

$$J_1 = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \oint_G \frac{-\alpha d\alpha}{y \sqrt{1 - \alpha^2 - (\tau - h\alpha)^2/y^2}} \theta(\tau - r) L_1. \quad (19)$$

Чтобы проанализировать преобразование контура интегрирования, сделаем замену переменной в два этапа. Сначала заменим  $s^2 = z$ . Подынтегральное выражение зависит только от  $s^2$ , поэтому новых разрывов не возникает. В результате исходная риманова поверхность переменной  $s$  распадается на две части, каждая из которых накрывает риманову поверхность переменной  $z$ . Для упрощения рассуждений будем отвлекаться от разрывов, связанных с радикалом  $\sqrt{s^2 - \xi^2}$ , который входит в подынтегральные выражения мультипликативно. Будем следить только за точками ветвления, происходящими из этого радикала. Листы исходной римановой поверхности  $s$  изображены на рис.8. Нули функции Рэлея обозначены косыми крестиками, ветвления за счет  $\sqrt{s^2 - \xi^2}$  — точками. Нули функции Рэлея на листах  $(+, +)$  и  $(-, -)$  соответствуют волнам Рэлея. Удобно будет считать, что правые разрезы чуть опущены, а левые — чуть приподняты над действительной осью, отсюда и расположение полюсов. При замене  $s^2 = z$  только половина плоскости с каждого листа проецируется на риманову поверхность  $z$ . Соответствующие полуплоскости обозначены  $A, B, C, D$ . Листы римановой поверхности  $z$  изображены на рис.9.

Далее делаем замену переменной

$$\alpha = \begin{cases} \sqrt{\gamma^2 - z}, & \text{для интегралов } I, \\ \sqrt{1 - z}, & \text{для интегралов } J. \end{cases}$$

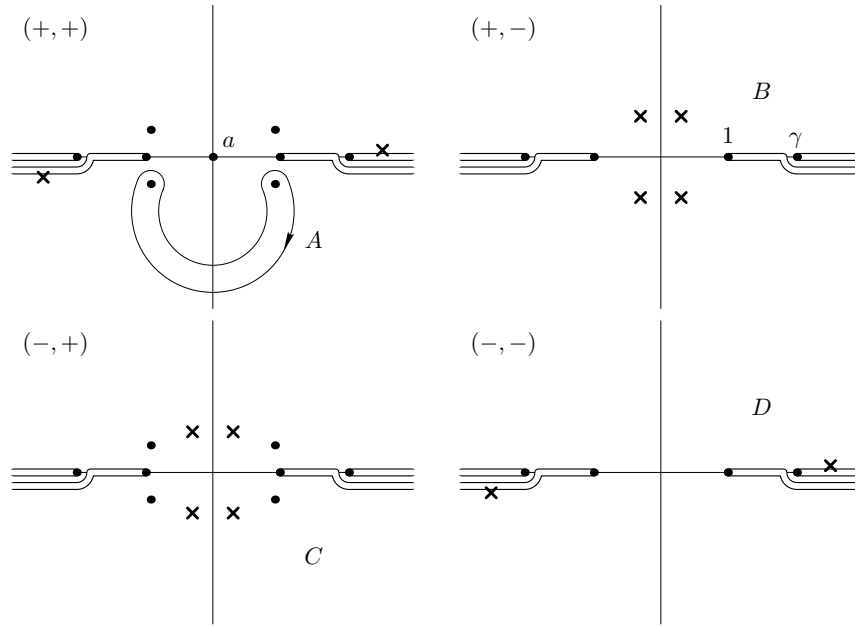


Рис. 8. Листы римановой поверхности  $s$  для интегралов  $J$ . Для интегралов  $I$  листы  $(+, -)$  и  $(-, +)$  меняются местами

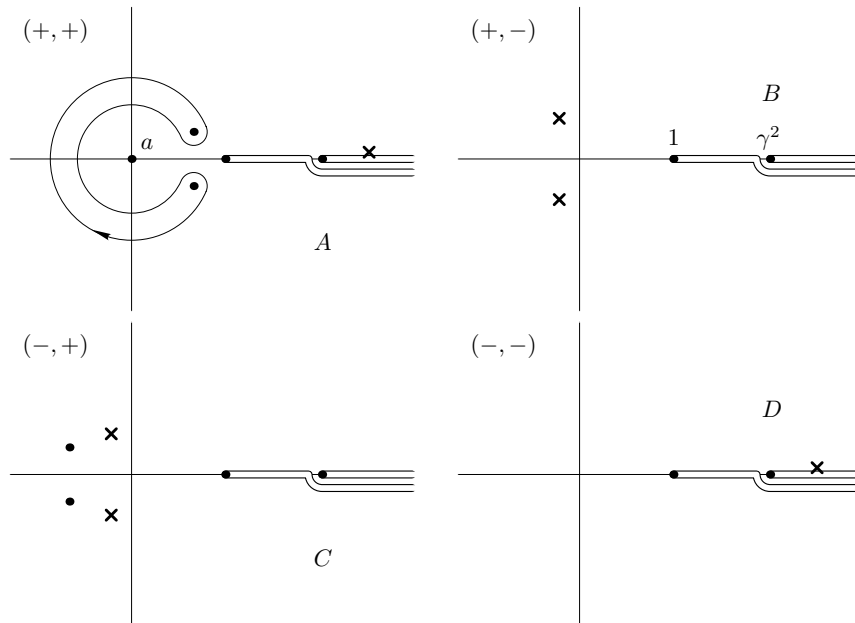


Рис. 9. Листы римановой поверхности  $z$  для интегралов  $J$ . Для интегралов  $I$  листы  $(+, -)$  и  $(-, +)$  меняются местами

При этом пропадает разрез, идущий от  $\gamma^2$  (или 1). Листы римановой поверхности переменной  $\alpha$  для интегралов  $I$  изображены на рис. 10, а для интегралов  $J$  – на рис. 11. Оказывается удобным по-другому разбить риманову поверхность на листы, объединяя правую полуплоскость одного листа и левую полуплоскость другого (и наоборот). Результат приведен на рис. 12 и 13.

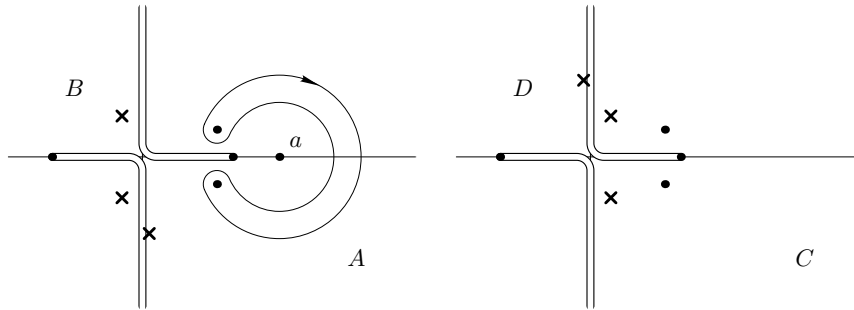


Рис. 10. Листы римановой поверхности  $\alpha$  для интегралов  $I$

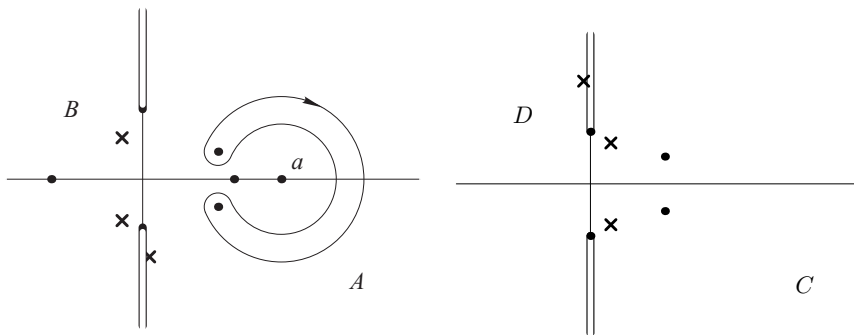


Рис. 11. Листы римановой поверхности  $\alpha$  для интегралов  $J$

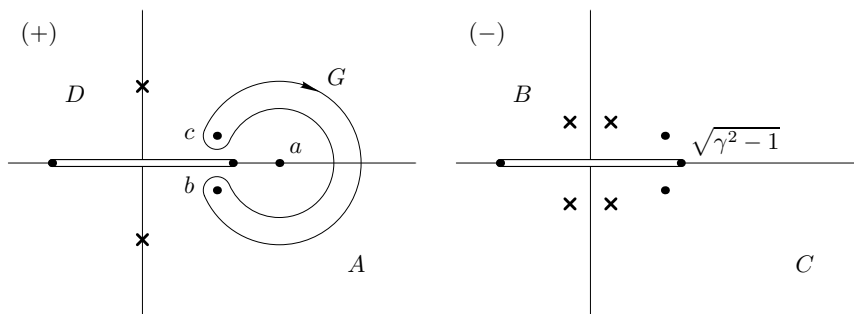


Рис. 12. Другое разбиение римановой поверхности на листы для интегралов  $I$



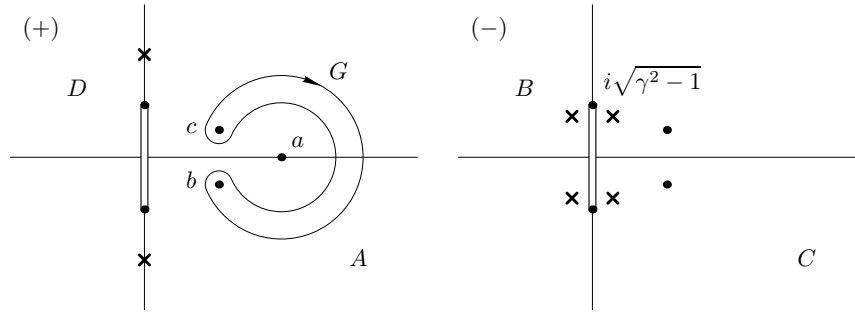


Рис. 13. Другое разбиение римановой поверхности на листы для интегралов  $J$

Каждый интеграл имеет в подынтегральном выражении два радикала:

для интегралов  $I$  это

$$\alpha_2 = \sqrt{1 - \gamma^2 + \alpha^2} \text{ и } \sqrt{s^2 - \xi^2} = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2 - (\tau - h\alpha)^2/y^2},$$

для интегралов  $J$  это

$$\alpha_1 = \sqrt{\gamma^2 - 1 + \alpha^2} \text{ и } \sqrt{s^2 - \xi^2} = \sqrt{1 - \alpha^2 - (\tau - h\alpha)^2/y^2}.$$

Ветви этих радикалов на листах (+) рис. 12 и 13 определяются следующим образом. На листе (+) рис. 13 при  $\alpha = 0$  справа от разреза  $\alpha_1$  вещественно и положительно. На листе (+) рис. 12 при  $\alpha = 0$  сверху от разреза  $\alpha_2$  чисто мнимо и положительно. В точках  $a$  на рис. 12 и 13 (это образы  $s = 0$ )  $\sqrt{s^2 - \xi^2}$  чисто мнимо и отрицательно. Отметим еще, что, хотя отдельные слагаемые подынтегральных выражений  $K_1$  и  $K_3$  имеют в точке  $a$  полюсы первого порядка, полные выражения там регулярны.

### 5. Особенности интегралов

Исследуем качественно зависимость интегралов  $I$  и  $J$  от времени  $\tau$ . Особенности встречаются тогда, когда сталкиваются точки ветвления подынтегрального выражения. Всего точек ветвления четыре. Две из них ( $\pm i\sqrt{\gamma^2 - 1}$  для интегралов  $J$  или  $\pm\sqrt{\gamma^2 - 1}$  для интегралов  $I$ ) неподвижны. Две другие точки ветвления, связанные с радикалом  $\sqrt{s^2 - \xi^2}$ , перемещаются при изменении  $\tau$ . Ясно, что возможны столкновения этих точек друг с другом или с неподвижными точками ветвления.

Начнем исследование с интегралов  $J$ . Найдем положение подвижных точек ветвления (точки  $b$  и  $c$  на рис. 13). Для этого нужно решить

квадратное уравнение

$$1 - \alpha^2 - (\tau - h\alpha)^2/y^2 = 0.$$

Его решение

$$\alpha = \frac{\tau h \pm y\sqrt{r^2 - \tau^2}}{r^2},$$

где  $r^2 = y^2 + h^2$ . Нетрудно видеть, что  $r$  представляет собой расстояние от источника до точки наблюдения. При  $\tau < r$  точки ветвления лежат на вещественной оси (рис. 14), а при  $\tau > r$  — в комплексной плоскости, как показано на рис. 13. Когда  $\tau = r$ , точки ветвления сталкиваются между собой, и именно этот момент времени соответствует вступлению  $P$ -волны. Для  $\tau < r$  следует считать, что контур интегрирования имеет вид, показанный на рис. 14, при этом интегралы равны нулю. Таким образом, интегралы  $J$  вместе со всеми своими производными равны нулю при  $\tau < r$ , что оправдывает интегрирование по частям в формуле (2) и преобразование от (13) к (14).

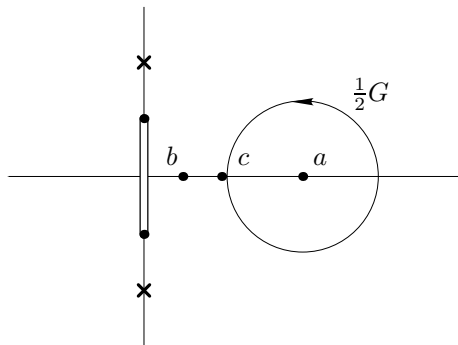


Рис. 14. До вступления  $P$ -волны

Самую сильную особенность интегралов при  $\tau = r$  можно оценить следующим образом. Очевидно, ее имеют интегралы, содержащие  $\sqrt{s^2 - \xi^2}$  в знаменателе. Эти интегралы имеют вид:

$$\int_b^c \frac{f(\alpha) d\alpha}{\sqrt{(\alpha - b)(\alpha - c)}}.$$

Их особенность при  $b \rightarrow c$  можно получить, если положить  $f = \text{const}$

$$\int_b^c \frac{d\alpha}{\sqrt{(\alpha - b)(\alpha - c)}} = i\pi.$$

Таким образом, функции  $\Gamma$  (см. (3)) имеют конечный скачок в момент вступления  $P$ -волны. При  $h \neq 0$  подвижные точки ветвления не сталкиваются с неподвижными, так что других особенностей нет.

Разберемся теперь с интегралами  $I$ . Уравнение для определения подвижных точек ветвления имеет вид:

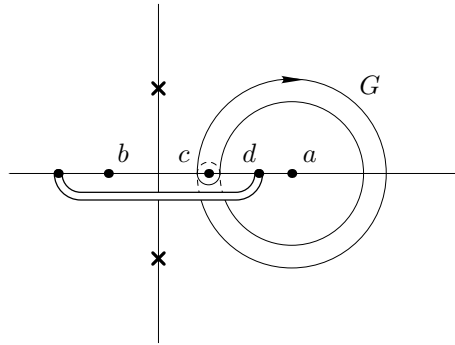
$$\gamma^2 - \alpha^2 - (\tau - h\alpha)^2/y^2 = 0.$$

Его решение

$$\alpha = \frac{\tau h \pm y\sqrt{r^2\gamma^2 - \tau^2}}{r^2}. \quad (20)$$

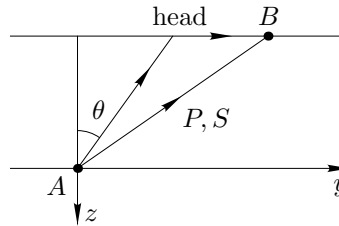
Как и прежде, точки ветвления лежат либо на вещественной оси, либо комплексно сопряжены. Они сталкиваются между собой при  $\tau = \gamma r$ , т.е. в момент вступления прямой  $S$ -волны. Однако у интегралов  $I$  могут быть и другие особенности. Столкновение происходит в точке  $\alpha = \gamma h/r$ , которая может лежать левее неподвижной точки ветвления  $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - 1}$  (точка  $d$  на рис. 15).

Рис. 15. Головная волна



Если  $\gamma h/r > \sqrt{\gamma^2 - 1}$ , то ситуация полностью аналогична интегралу  $J$ , и функции  $\Gamma$  имеют конечный скачок в момент вступления прямой  $S$ -волны, а до этого момента времени равны нулю. Если же  $\gamma h/r < \sqrt{\gamma^2 - 1}$ , то, прежде чем столкнуться с точкой  $b$ , точка  $c$  сталкивается с неподвижной точкой  $d$ . Это происходит в момент времени  $\tau = y + h\sqrt{\gamma^2 - 1}$ . Легко проверить, что этот момент времени соответствует вступлению головной волны (см. лучевую схему на рис. 16).

Рис. 16. Лучевая картина.  $\sin \theta = 1/\gamma$



До  $\tau = y + h\sqrt{\gamma^2 - 1}$  контур  $G$  выглядит так, как показано на рис. 17, а функции  $\Gamma$  равны нулю. В промежутке  $y + h\sqrt{\gamma^2 - 1} < \tau < \gamma r$  контур имеет вид, показанный на рис. 15, цепляясь за лежащие друг под другом на разных листах точки ветвления. Наконец, при  $\tau > \gamma r$  контур выглядит так, как показано на рис. 12.

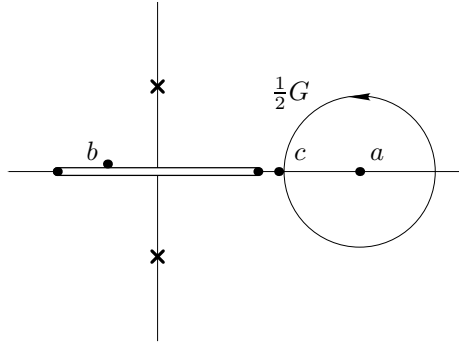


Рис. 17. До вступления  $S$ -волны

Особенность интегралов при  $\tau = y + h\sqrt{\gamma^2 - 1}$  имеет вид

$$\int_c^d \sqrt{\frac{\alpha - d}{\alpha - c}} f(\alpha) d\alpha.$$

Ее можно оценить, полагая  $f = \text{const}$ ,

$$\int_c^d \sqrt{\frac{\alpha - d}{\alpha - c}} d\alpha = -i\pi(d - c).$$

Поскольку  $c \rightarrow d$  линейно по времени, то функции  $\Gamma$  непрерывны, но имеют излом (конечный скачок производной) в момент вступления головной волны.

Из-за наличия головной волны меняется особенность при  $\tau = \gamma r$ . Она имеет вид:

$$\int_c^d \frac{d\alpha}{\sqrt{(\alpha - b)(\alpha - c)}} = -\ln \frac{\sqrt{d - b} - \sqrt{d - c}}{\sqrt{d - b} + \sqrt{d - c}} = -\ln \frac{c - b}{(\sqrt{d - b} + \sqrt{d - c})^2}.$$

Разность  $c - b$  пропорциональна  $\sqrt{\tau - \gamma r}$  так, что функции  $\Gamma$  имеют логарифмическую особенность в момент вступления прямой  $S$ -волны, следующей за головной волной.

Отметим, что утверждение о равенстве интегралов  $I$  и  $J$  нулю до вступления соответствующих волн основано на представлении их в виде интегралов по замкнутым контурам от аналитических внутри контура

функций. Как уже отмечалось, подынтегральные выражения  $K_1$  и  $K_3$  таковы, что отдельные слагаемые в них, отвечающие вкладам  $SH$ - и  $SV$ -волн, имеют полюсы первого порядка внутри контура. Поэтому формальное раздельное вычисление этих вкладов привело бы к противоречивому заключению о слишком раннем вступлении волн.

Обсудим вкратце проблемы численного расчета сейсмограмм по приведенным выше формулам. Непосредственное использование формул типа (19) осложняется теми обстоятельствами, что и сами вычисляемые функции ( $\Gamma_{ijk}$ ), и подынтегральные выражения имеют сильные особенности, к тому же контур интегрирования лежит в комплексной плоскости (для  $P$ -волны и прямой  $S$ -волны) и меняется с изменением  $\tau$ . Чтобы избежать этих трудностей, “перекинем” интеграл на разрезы  $[-i\sqrt{\gamma^2 - 1}, i\sqrt{\gamma^2 - 1}]$  или  $[-\sqrt{\gamma^2 - 1}, \sqrt{\gamma^2 - 1}]$  (для  $P$ -волны и прямой  $S$ -волны) и будем вычислять функции  $G_{ijk}$ , т.е. проинтегрируем еще раз по времени. Такое интегрирование легко выполняется, так как вся зависимость от  $\tau$  сосредоточена в простых множителях  $\xi$  и  $\sqrt{s^2 - \xi^2}$  подынтегральных функций. Функции  $G_{ijk}$  уже непрерывны и представляются через интегралы также от непрерывных функций. При “перекидывании” контура возникнут дополнительные вклады за счет вычетов на бесконечности и в полюсах Рэлея. Оказывается, что вычеты на бесконечности зависят от времени очень просто – это полиномы, содержащие члены  $\tau^2$  и  $\tau^4$ . Вычеты в полюсах Рэлея также зависят от времени очень просто, только через  $\xi$ . Подынтегральные выражения для контуров  $[-i\sqrt{\gamma^2 - 1}, i\sqrt{\gamma^2 - 1}]$  и  $[-\sqrt{\gamma^2 - 1}, \sqrt{\gamma^2 - 1}]$  немного упрощаются. Главным же преимуществом является то, что контур интегрирования теперь постоянный и лежит либо на вещественной, либо на мнимой оси. Большая часть подынтегральных функций (кроме множителей, содержащих  $\xi$ ), зависящая только от  $\alpha^2$ , может быть вычислена один раз и сделана вещественной, что значительно ускоряет вычисления.

Примеры расчета сейсмограмм приведены на рис. 18–21. Плотность среды  $\rho = 3.3$  г/см<sup>3</sup>, скорости продольных и поперечных волн:  $v_p = 8$  км/с,  $v_s = 5$  км/с. Сейсмограммы вычислены для источника, находящегося на глубине  $h = 10$  км. Тензор момента изменяется во времени по закону  $\dot{M} = e^{-t^2/a^2}$  ( $a = 0.1$  с). Сейсмограммы вычислены на расстоянии 150 км от источника по разным азимутам. Азимуты и тензоры момента указаны в подписях к рисункам. Масштабы по вертикальной оси различны у разных сейсмограмм.

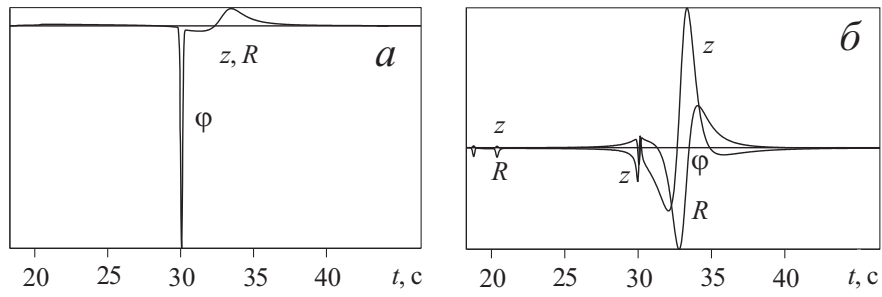


Рис. 18. Сейсмограммы для тензора момента  $M_{yz} = 1$  (остальные компоненты равны нулю) по азимуту  $0^\circ$  вдоль оси  $x$  (а) и по азимуту  $90^\circ$  вдоль оси  $y$  (б)

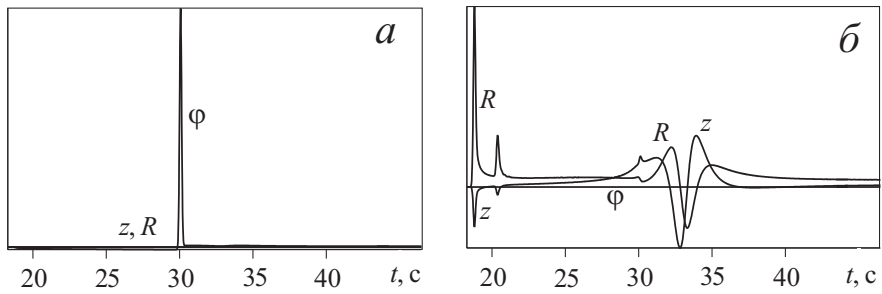


Рис. 19. Сейсмограммы для тензора момента  $M_{xy} = 1$  (остальные компоненты равны нулю) по азимуту  $0^\circ$  (а) и по азимуту  $90^\circ$  (б)

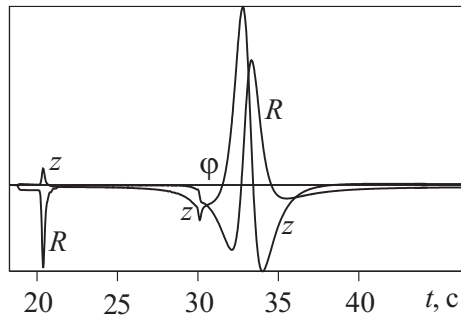


Рис. 20. Сейсмограмма для тензора момента  $M_{zz} = 1$  (остальные компоненты равны нулю). От азимута не зависит

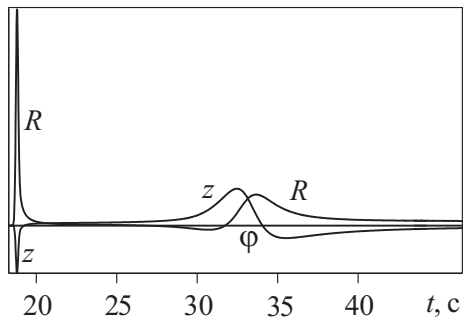


Рис. 21. Сейсмограмма для тензора момента  $M_{ij} = \delta_{ij}$  (источник типа центра расширения). От азимута не зависит

## Приложение Замечание о сейсмическом источнике

**Математика сейсмического источника. Мультипольное разложение.** Уравнения теории упругости для однородного изотропного тела имеют вид

$$\rho \ddot{u}_i = c_{ijkl} \partial_j \partial_l u_k + f_i, \quad (\text{П } 1)$$

где  $\rho$  – плотность тела,  $u_i$  – вектор смещения,  $c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$  – тензор Гука,  $f_i$  – плотность внешних сил.

Запишем решение этих уравнений через функцию Грина

$$u_i(t, \mathbf{x}) = \int d^3y G_{ik}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) * f_k(t, \mathbf{y}),$$

где посредством оператора  $*$  обозначена свертка по времени.

Мультипольное разложение получится, если разложить функцию Грина по  $y$  вблизи некоторой точки  $z$

$$G_{ik}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = G_{ik}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}) + (y - z)_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} G_{ik}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}) + \dots,$$

и подставить в формулу для  $u$

$$u_i(t, \mathbf{x}) = G_{ik}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}) * \int d^3y f_k(t, \mathbf{y}) + \\ + \frac{\partial}{\partial z_\alpha} G_{ik}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}) * \int d^3y (y - z)_\alpha f_k(t, \mathbf{y}) + \dots$$

Интеграл

$$F_k(t) = \int d^3y f_k(t, \mathbf{y})$$

имеет смысл полной внешней силы, а интеграл

$$N_i(t) = \varepsilon_{ijk} \int d^3y (y - z)_j f_k(t, \mathbf{y})$$

– полного момента внешних сил. В теории сейсмического источника считается, что полная внешняя сила и полный момент внешних сил равны нулю, поскольку землетрясение – явление внутреннее. При полной силе, равной нулю, момент определяется однозначно, независимо от точки  $z$ , так как

$$N'_i(t) = \varepsilon_{ijk} \int d^3y (y - z')_j f_k(t, \mathbf{y}) = \varepsilon_{ijk} \int d^3y (y - z)_j f_k(t, \mathbf{y}) + \\ + \varepsilon_{ijk} (z - z')_j \int d^3y f_k(t, \mathbf{y}) = \varepsilon_{ijk} \int d^3y (y - z)_j f_k(t, \mathbf{y}) = N_i(t).$$

Первый не исчезающий член в разложении смещения на расстояниях, значительно больших размеров очага, имеет вид

$$u_i(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial z_j} G_{ik}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}) * M_{jk}(t), \quad (\text{П } 2)$$

где

$$M_{jk}(t) = \frac{1}{2} \int d^3y [(y - z)_j f_k(t, \mathbf{y}) + (y - z)_k f_j(t, \mathbf{y})]$$

называется тензором сейсмического момента. Он определяется однозначно, независимо от точки  $z$ , по тем же причинам, что и  $N$ .

Подставляя решение в форме (П 2) в уравнение (П 1), находим, что сейсмическому источнику-тензору момента соответствует плотность внешних сил

$$f_i(t, \mathbf{x}) = M_{ik}(t) \frac{\partial}{\partial z_k} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) = -M_{ik}(t) \frac{\partial}{\partial x_k} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}),$$

где  $z$  – место расположения источника.

**Условия скачка на источнике.** Обычно при решении задач теории упругости применяются интегральные преобразования исходного уравнения (П 1) по части переменных, так что для образов получается система обыкновенных дифференциальных уравнений. Наличие точечного источника учитывается наложением соответствующих условий скачка как на сами образы, так и на их производные. Выясним, какие условия скачка соответствуют источнику-тензору момента.

Для упрощения обозначений введем скорости продольных и поперечных волн  $v_p^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$  и  $v_s^2 = \mu/\rho$ , их отношение  $\gamma = v_p/v_s$  и новое время  $\tau = v_p t$ . Уравнение (П 1) в новых обозначениях принимает вид:

$$\gamma^2 \ddot{u}_i = (\gamma^2 - 1) \partial_i \partial_j u_j + \partial_j^2 u_i + f_i/\mu. \quad (\text{П } 3)$$

Будем считать, что источник находится в начале координат, декартовы координаты будем обозначать  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Предположим, что мы сделали преобразование Лапласа по времени и преобразования Фурье по координатам  $x$  и  $y$  (обычная ситуация при решении задач для полупространства, предполагаются также нулевые начальные условия):

$$U_i(\omega, k_x, k_y, z) = \int_0^\infty dt e^{-\omega t} \int dx dy e^{-i(k_x x + k_y y)} u_i(t, x, y, z).$$

Уравнение для образов получается, если заменить в (П 3) производную по времени на  $\omega$ , а производные по координатам  $\partial_i \rightarrow ik_i + n_i \partial_z$ , где



$\mathbf{n}$  – единичный вектор в направлении  $z$ :

$$\begin{aligned} \omega^2 \gamma^2 U_i &= (\gamma^2 - 1)[-k_i k_j + i(k_i n_j + k_j n_i) \partial_z + n_i n_j \partial_z^2] U_j + \\ &+ (-k^2 + \partial_z^2) U_i - M_{ij} (i k_j + n_j \partial_z) \delta(z) / \mu. \end{aligned} \quad (\text{П } 4)$$

Приведем два способа получения условий скачка. Первый основан на интегрировании уравнения (П 4) по отрезку  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  и переходе затем к пределу  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Члены, содержащие производные, интегрируются явно, а оставшиеся интегралы с  $U$  в пределе дают нуль. Получаем

$$\begin{aligned} i(\gamma^2 - 1)(k_i n_j + k_j n_i) \Delta U_j + \\ + [(\gamma^2 - 1)n_i n_j + \delta_{ij}] \Delta \partial_z U_j - i M_{ij} k_j / \mu = 0. \end{aligned} \quad (\text{П } 5)$$

Это дает три условия. Еще три условия получим, домножив уравнение (П 4) на  $z$  и проинтегрировав, как раньше. После интегрирования по частям в членах с производными часть интегралов вычислится явно, оставшиеся дадут нуль в пределе. Мы найдем

$$[(\gamma^2 - 1)n_i n_j + \delta_{ij}] \Delta U_j - M_{ij} n_j / \mu = 0. \quad (\text{П } 6)$$

Эти же условия можно получить другим способом. При  $z \neq 0$  уравнение (П 4) однородное. Пусть решение при  $z > 0$  есть  $U^+(z)$ , а решение при  $z < 0$  есть  $U^-(z)$ . Тогда решение на всей прямой можно записать в виде

$$U_i(z) = U_i^+(z) \theta(z) + U_i^-(z) \theta(-z).$$

Подставим это решение в уравнение (П 4). Члены, в которых дифференцируются только функции  $U^\pm(z)$ , в сумме дадут нуль, так как  $U^\pm(z)$  удовлетворяют однородным уравнениям. Останутся члены, в которых один или два раза дифференцируются  $\theta(\pm z)$ . Эти члены пропорциональны, соответственно,  $\delta(z)$  и  $\delta'(z)$  и объединяются с членами за счет источника:

$$\begin{aligned} &\left\{ i(\gamma^2 - 1)(k_i n_j + k_j n_i) \Delta U_j(z) + \right. \\ &+ 2[(\gamma^2 - 1)n_i n_j + \delta_{ij}] \Delta \partial_z U_j(z) - i M_{ij} k_j / \mu \left. \right\} \delta(z) + \\ &+ \left\{ [(\gamma^2 - 1)n_i n_j + \delta_{ij}] \Delta U_j - M_{ij} n_j / \mu \right\} \delta'(z) = 0, \end{aligned} \quad (\text{П } 7)$$

где  $\Delta U(z) = U^+(z) - U^-(z)$ ,  $\Delta \partial_z U(z) = \partial_z U^+(z) - \partial_z U^-(z)$ .

Уравнение (П 7) имеет вид

$$f(z)\delta(z) + g(z)\delta'(z) = 0, \quad (\text{П } 8)$$

где  $f$  и  $g$  – гладкие функции. Можно было бы подумать, что  $f(0) = 0$ ,  $g(0) = 0$ , но это неверно. По определению обобщенная функция задается правилами интегрирования с гладкими функциями. Равенство (П 8) означает, что для любой гладкой функции  $\phi(z)$

$$\int [f(z)\delta(z) + g(z)\delta'(z)]\phi(z) dz = 0.$$

Интегрируя во втором слагаемом по частям, получим

$$\phi(0)[f(0) - g'(0)] - \phi'(0)g(0) = 0.$$

Поскольку  $\phi(0)$  и  $\phi'(0)$  независимы, то

$$f(0) - g'(0) = 0, \quad g(0) = 0.$$

Если мы применим найденное правило к (П 7), то получим (П 5) и (П 6).

Решим уравнения (П 5) и (П 6) относительно  $\Delta U$  и  $\Delta \partial_z U$ . Для этого нужно обратить матрицу  $(\gamma^2 - 1)n_i n_j + \delta_{ij}$ . Обратная к ней – равна  $(1/\gamma^2 - 1)n_i n_j + \delta_{ij}$ , поэтому

$$\begin{aligned} \Delta U_i &= [(1/\gamma^2 - 1)n_i n_j + \delta_{ij}]M_{jl}n_l/\mu, \\ \Delta \partial_z U_i &= i(1/\gamma^2 - 1)(k_i n_j + k_j n_i)M_{jl}n_l/\mu + \\ &+ i[(1/\gamma^2 - 1)n_i n_j + \delta_{ij}]M_{jl}k_l/\mu. \end{aligned} \quad (\text{П } 9)$$

Условие скачка производной  $\Delta \partial_z U$  можно переписать в виде условия скачка образа напряжения  $\Sigma$ . Тензор напряжений имеет вид  $\sigma_{ij} = c_{ijkl}\partial_k u_l$ , поэтому образы его  $iz$ -компонент равны

$$\Sigma_{ij}n_j = \mu \{ i[(\gamma^2 - 2)n_i k_l + k_i n_l]U_l + [(\gamma^2 - 1)n_i n_l + \delta_{il}]\partial_z U_l \}.$$

Условие скачка для напряжений выглядит следующим образом:

$$\Delta \Sigma_{ij}n_j = i[(2/\gamma^2 - 1)k_i(n_p M_{pq}n_q) - n_i(k_p M_{pq}n_q) + M_{iq}k_q]. \quad (\text{П } 10)$$

Приведем еще явную покомпонентную запись условий скачка смещения и напряжения:

$$\begin{aligned} \Delta U_x &= M_{xz}/\mu, \quad \Delta U_y = M_{yz}/\mu, \quad \Delta U_z = M_{zz}/(\mu\gamma^2), \\ \Delta \Sigma_{xz} &= i [(2/\gamma^2 - 1)k_x M_{zz} + M_{xx}k_x + M_{xy}k_y], \\ \Delta \Sigma_{yz} &= i [(2/\gamma^2 - 1)k_y M_{zz} + M_{xy}k_x + M_{yy}k_y], \\ \Delta \Sigma_{zz} &= 0. \end{aligned}$$

**Физика сейсмического источника. Теорема представления и подвижка по разрыву.** Рассмотрим уравнение (П 1) в некоторой области  $V$  с границей  $\Gamma$  (рис. П 1) в отсутствии внешних сил.

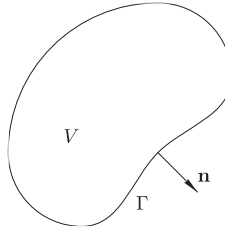


Рис. П 1. К теореме представления

Сделаем преобразование Лапласа по времени, предполагая нулевые начальные условия. Тогда уравнение (П 1) переписется в виде

$$\rho\omega^2 u_i(\omega, \mathbf{x}) = c_{ijkl} \partial_j \partial_l u_k(\omega, \mathbf{x}).$$

Уравнение для соответствующей функции Грина  $G$  выглядит так:

$$\rho\omega^2 G_{ip}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = c_{ijkl} \partial_j \partial_l G_{kp}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \delta_{ip} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \rho\omega^2 \int_V G_{ip}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) u_i(\omega, \mathbf{x}) d^3x &= \int_V G_{ip}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) c_{ijkl} \partial_j \partial_l u_k(\omega, \mathbf{x}) d^3x = \\ &= \int_\Gamma G_{ip}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) n_j c_{ijkl} \partial_l u_k(\omega, \mathbf{x}) dS_x - \int_V \partial_j G_{ip}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) c_{ijkl} \partial_l u_k(\omega, \mathbf{x}) d^3x = \\ &= \int_\Gamma G_{ip}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) n_j c_{ijkl} \partial_l u_k(\omega, \mathbf{x}) dS_x - \int_\Gamma \partial_j G_{ip}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) n_l c_{ijkl} u_k(\omega, \mathbf{x}) dS_x + \\ &+ \int_V c_{ijkl} \partial_l \partial_j G_{ip}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) u_k(\omega, \mathbf{x}) d^3x = \int_\Gamma G_{ip}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) n_j c_{ijkl} \partial_l u_k(\omega, \mathbf{x}) dS_x - \\ &- \int_\Gamma \partial_j G_{ip}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) n_l c_{ijkl} u_k(\omega, \mathbf{x}) dS_x + \\ &+ \int_V (\rho\omega^2 G_{kp}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) - \delta_{kp} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})) u_k(\omega, \mathbf{x}) d^3x = \\ &= \int_\Gamma G_{ip}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) n_j c_{ijkl} \partial_l u_k(\omega, \mathbf{x}) dS_x - \int_\Gamma \partial_j G_{ip}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) n_l c_{ijkl} u_k(\omega, \mathbf{x}) dS_x + \\ &+ \rho\omega^2 \int_V G_{kp}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) u_k(\omega, \mathbf{x}) d^3x - u_p(\omega, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Итак

$$\begin{aligned} u_p(\omega, \mathbf{y}) &= \int_\Gamma G_{ip}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) n_j c_{ijkl} \partial_l u_k(\omega, \mathbf{x}) dS_x - \\ &- \int_\Gamma n_l c_{ijkl} \partial_j G_{ip}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) u_k(\omega, \mathbf{x}) dS_x. \end{aligned}$$

Это и есть теорема представления для образов. В правую часть входят смещения  $u_k$  и нормальные напряжения  $\sigma_{in} = n_j c_{ijkl} \partial_l u_k$  только на границе  $\Gamma$ . Чтобы получить теорему представления во временной области, надо просто заменить произведения свертками

$$u_p(t, \mathbf{y}) = \int_{\Gamma} G_{ip}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) * \sigma_{il}(t, \mathbf{x}) n_l dS_x - \int_{\Gamma} n_l c_{ijkl} \partial_j G_{ip}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) * u_k(t, \mathbf{x}) dS_x. \quad (\text{П } 11)$$

Рассмотрим неограниченную область с поверхностью внутреннего разрыва (или ограниченную область, но возьмем функцию Грина, удовлетворяющую граничным условиям на внешней границе). Тогда в формуле (П 11) в правой части будут лишь интегралы по берегам разрыва. Вообще говоря, мы не можем задать независимо смещения и напряжения на разрыве – это противоречило бы общей теории уравнений в частных производных. Имеется, однако, частный случай, когда в правой части (П 11) остаются только смещения на разрыве. Это случай, когда нормальные напряжения на разрыве непрерывны. Конечно, такое предположение противоречит физической картине образования и распространения разрыва, однако оно математически вполне корректно и удобно для “кинематического” описания землетрясений. Пометим одну из сторон разрыва как “положительную”, другая будет “отрицательной” (рис. П 2).

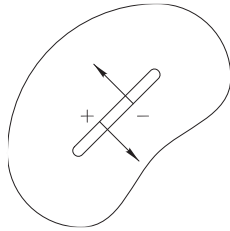


Рис. П 2. Внутренний разрыв

Формула (П 11) принимает вид

$$u_p(t, \mathbf{y}) = - \int_{\Gamma^+} n_l^+ c_{ijkl} \partial_j G_{ip}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) * \Delta u_k(t, \mathbf{x}) dS_x,$$

где  $\Delta u_k = u_k^+ - u_k^-$  – разрыв смещений. Если теперь мы будем сжимать поверхность разрыва к некоторой точке  $z$ , одновременно увеличивая  $\Delta u$ , так, чтобы получить конечный предел, то найдем

$$u_p(t, \mathbf{y}) = M_{ij}(t) * \partial_j^{(z)} G_{ip}(t, \mathbf{z}, \mathbf{y}), \quad (\text{П } 12)$$

где

$$M_{ij}(t) = -c_{ijkl} n_l^+ \Delta u_k(t). \quad (\text{П } 13)$$

Используя симметрию функции Грина по отношению к перестановке аргументов, можно записать (П 12) в виде

$$u_p(t, \mathbf{y}) = M_{ij}(t) * \partial_j^{(z)} G_{pi}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}),$$

который только обозначениями отличается от (П 2). Одновременно мы получаем вид тензора сейсмического момента, когда источник представляет собой подвижку по разрыву (конечно, это не единственный тип источника с нулевыми полной силой и моментом, есть еще и ядерные взрывы).

Проверим, что выражение (П 13) дает правильные условия скачка, если его подставить в (П 10) и (П 9). “Положительной” нормалью к плоскости разрыва будет  $-\mathbf{n}$ , разрыв смещений обозначим через  $\mathbf{a}$ . Тогда по формуле (П 13)

$$M_{ij} = c_{ijkl} n_l a_k = \mu[(\gamma^2 - 2)\delta_{ij}(n_l a_l) + n_i a_j + n_j a_i].$$

Подставляя этот тензор момента в (П 10) и (П 9), найдем

$$\Delta U_i = a_i, \quad \Delta \Sigma_{ij} n_j = 0,$$

чего и следовало ожидать.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Перегудов Д.В. Двумерная задача Лэмба. Метод Каньяра // Проблемы динамики и сейсмичности Земли. М.: ГЕОС, 2000. С.120–137. (Вычисл. сейсмология; Вып.31).
2. Lamb H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1904. Vol.A203. P.1–42.
3. Смирнов В.И., Соболев С.Л. Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний // Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР. 1932. N 20. С.1–37.
4. Смирнов В.И., Соболев С.Л. О применении нового метода к изучению упругих колебаний в пространстве при наличии осевой симметрии // Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР. 1933. N 29. С.43–51.
5. Cagniard L. Réflexion et réfraction des ondes séismiques progressives. Paris: Gauthier-Villars. 1939. 256 p.

6. *Петрашень Г.И., Марчук Г.И., Огурцов К.И.* О задаче Лэмба в случае полупространства // Учен. зап. ЛГУ. Сер. матем., 1950. Вып.21, N 35. С.71–118.
7. *Willis J.R.* Self-similar problems in elastodynamics // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1973. Vol.A274, N 1240. P.435–491.
8. *De Hoop A.T.* A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems // Appl. Sci. Res. Sect. 1960. Vol.B8, N 4. P.349–356.
9. *Richards P.G.* Elementary solutions to Lamb's problem for a point source and their relevance to three-dimensional studies of spontaneous crack propagation // Bull. Seism. Soc. Amer. 1979. Vol.69, N 4. P.947–956.
10. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.