

УДК 532.5+514.83

МЕТОД РИТЦА В ЗАДАЧЕ О СФЕРОИДАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СЛОИСТОЙ МОДЕЛИ ЗЕМЛИ. II.Э.Н. Бессонова¹, Е.Л. Резников¹, А.М. Ильин²¹Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, Москва²Институт математики и механики Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург

Продолжено изучение возможностей метода Ритца в задаче о спектре сфероидальных колебаний слоистых сфер, имитирующих Землю. На примере многослойных сред (3 слоя, 159 и 287 слоев) рассмотрены вопросы точности построения собственных чисел и собственных функций. Вычисления показывают, что метод Ритца дает удовлетворительные результаты при расчете спектра сфероидальных колебаний, точность спектра практически не зависит от числа слоев, но она заметно ухудшается при стремлении модуля сдвига к 0 ("разжижении" слоев). Численно показано, что главный член асимптотики первых собственных чисел в моделях, содержащих слой с μ , стремящимся к 0, изменяется пропорционально $\sqrt{\mu}$. Рассмотрен вопрос о влиянии галеркинского базиса на скорость сходимости приближенного спектра. Показано, что для этой задачи естественный базис из функций Бесселя дает существенно лучшие результаты, чем базис из сплайнов: для получения приемлемой точности при вычислении спектров размерность галеркинского базиса из бесселевых функций по крайней мере на порядок меньше, чем размерность базиса из сплайнов.

**PERFORMANCE OF THE RITZ METHOD
IN THE PROBLEM OF SPHEROIDAL OSCILLATIONS
FOR LAYERED EARTH MODEL. II.**E.N. Bessonova¹, E.L. Reznikov¹, A.M. Ili'n²¹International Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow²Institute of Mathematic and Mechanics, Ural Division, Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg

This paper continues the study of Ritz method possibilities in the problem of the spheroidal oscillations spectrum for layered spheres (imitation of the Earth). The questions of the approached eigenvalues and eigenfunctions accuracy are considered on the examples of 3, 159 and 287 spherical layers. The calculations show, that the Ritz method accuracy is satisfactory and does not depend upon number of layers, but it distinctly worsens when

the rigidity of a layer becomes small. It is shown, that the main asymptotic member of the first eigennumbers in the models containing one layers with the small rigidity is proportional to $\sqrt{\mu}$. The influence of galerkin basis on speed of convergence of the approached spectrum is considered. It is shown, that the natural basis from Bessel functions gives essential better results in this problem, than basis from splines: the acceptable accuracy of calculation of spectrum is obtained with galerkin basis dimension from Bessel functions at least on the order less, than the dimension of galerkin basis from splines.

1. Постановка задачи

В продолжение исследований, связанных с применением метода Рунца к задачам о собственных колебаниях сферической Земли, которые были начаты в работах [1,2], авторы провели численные эксперименты для многослойных моделей с тем, чтобы понять возможности этого метода (точность, скорость сходимости, устойчивость) для таких сред. Подробная математическая постановка задачи дана в [1]. Приведем здесь ее краткое изложение и будем заниматься только сфероидальными колебаниями, как и в работе [2], II^я частью которой является данная статья.

Собственные колебания сферически симметричной Земли, в которой упругие параметры λ , μ и плотность ρ зависят от расстояния до центра сферы, описываются уравнением

$$A\mathbf{u} + \rho\omega^2\mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

при заданных граничных условиях (здесь оператор $A: \mathbf{u} \rightarrow -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u})$, σ – тензор напряжений, \mathbf{u} – смещение).

В качестве граничных условий мы задавались отсутствием напряжений на внешней границе сферы и отсутствием смещений в центре сферы. На языке слабых решений эта задача формулируется так: требуется найти такой вектор смещений \mathbf{u} , что для всех допустимых векторов \mathbf{v} выполняется соотношение

$$\int_G (A\mathbf{u}, \mathbf{v}) dG = \omega^2 \int_G (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rho dG,$$

которое можно переписать с помощью тождества Бэтти иначе:

$$2 \int_G W(\mathbf{u}, \mathbf{v}) dG = \omega^2 \int_G (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rho dG.$$

Здесь $W(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ – симметричная билинейная форма от деформаций $\varepsilon(\mathbf{u})$ и $\varepsilon(\mathbf{v})$, соответственно, квадратичная форма $W(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ – плотность упругого потенциала. Область G – шар.

При использовании метода Ритца выбирается конечномерное галеркинское подпространство, тогда возникает обобщенная спектральная задача

$$\tilde{\mathcal{A}}\mathbf{x} = \hat{\omega}^2 \tilde{\mathcal{B}}\mathbf{x}. \quad (2)$$

Здесь $\tilde{\mathcal{A}}$ – матрица квадратичной формы (потенциальной энергии), $\tilde{\mathcal{B}}$ – матрица кинетической энергии, $\hat{\omega}$ – приближение для собственной частоты ω , \mathbf{x} – вектор коэффициентов разложения собственного колебания по заданному галеркинскому базису. Термин “обобщенная” означает, что матрица $\tilde{\mathcal{B}}$ – не единичная.

В случае сферически симметричной Земли с упругими параметрами и плотностью, зависящими только от радиуса, оператор задачи о собственных колебаниях распадается на оператор крутильных колебаний и оператор сфероидальных колебаний. Последний, в свою очередь, распадается на последовательность операторов K_n , где n – нижний индекс (порядок) сферических функций Y_n^m ($n = 1, 2, \dots$; $m = 1, 2, \dots, n$), используемых для представления решения задачи. Оператор K_n двумерный, а оператор, отвечающий за крутильные колебания, одномерный.

Если вектор смещения \mathbf{u} имеет составляющие $\begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix}$, то оператор K_n имеет вид [3]:

$$\begin{aligned} K_n \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix} &= \frac{d}{dr} \left(P \frac{d\mathbf{v}}{dr} + \frac{1}{r} (G + EQ) \mathbf{v} \right) + \frac{1}{r} (2P - G - EQ^*) \frac{d\mathbf{v}}{dr} + \\ &+ \frac{1}{r^2} (S + EF + 2EQ - n(n+1)R) \mathbf{v}; \\ P &= \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \\ S &= \begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -4\mu \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 2\lambda + 3\mu \\ 2\lambda + 3\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}, \\ E &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n(n+1) \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q^* = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отметим, что матрицы P, Q, R, S, F, G, Q^* зависят от r . Система (1) для сфероидальных колебаний принимает следующую форму:

$$K_n \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix} + \rho w^2 \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix} = 0. \quad (3)$$

В слабой постановке билинейная форма $W_n(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ выглядит так:

$$\begin{aligned}
2W_n(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = & \int_0^1 r^2 dr \left\{ \lambda \left(\frac{du^{(1)}}{dr} + \frac{2}{r}u^{(1)} - \frac{N}{r}u^{(2)} \right) \times \right. \\
& \times \left(\frac{dv^{(1)}}{dr} + \frac{2}{r}v^{(1)} - \frac{N}{r}v^{(2)} \right) + 2\mu \frac{du^{(1)}}{dr} \frac{dv^{(1)}}{dr} + \\
& + \frac{2\mu}{r^2} (u^{(1)} - Nu^{(2)})(v^{(1)} - Nv^{(2)}) + \frac{2\mu}{r^2} u^{(1)}v^{(1)} + \\
& + \mu \left(\frac{du^{(2)}}{dr} - \frac{u^{(2)}}{r} + \frac{N}{r}u^{(1)} \right) \times \\
& \times \left. \left(\frac{dv^{(2)}}{dr} - \frac{v^{(2)}}{r} + \frac{N}{r}v^{(1)} \right) - \frac{2\mu}{r^2} N^2 u^{(2)}v^{(2)} \right\}, \quad (4)
\end{aligned}$$

где $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix}$, $N = \sqrt{n(n+1)}$.

В дальнейшем все расчеты проводились только для $n = 2$.

В правой части (4) интервал интегрирования (0,1), так как все длины отнормированы на радиус Земли. В дальнейшем будем считать, что рассматриваемые среды представляют собой пачки слоев с постоянными параметрами в каждом слое, и вся пачка слоев лежит на сфере, параметры которой тоже постоянны. Граничное условие на внешней границе (при $r = 1$) – отсутствие напряжений, условие в центре сферы (при $r = 0$) – равенство нулю смещений, на границах между слоями напряжения и смещения непрерывны. Собственные частоты оператора находятся из дисперсионного уравнения, которое получается из условия равенства нулю определителя системы условий на границах. Если среда состоит из $n - 1$ слоев, лежащих на сфере, то порядок определителя в этом случае равен $4n + 2$. При большом числе слоев этот порядок большой, поэтому мы применяли метод матричного пропагатора, предложенный Томсоном [4] и уточненный Хаскелом [5], и сводили все к определителю второго порядка, корни которого и находили. Эти корни служили теми теоретическими собственными числами (в дальнейшем эти числа мы называем “точными”), с которыми мы сравнивали приближенные собственные частоты, определенные с помощью метода Ритца.

2. Метод матричного пропагатора

Разъясним применение метода матричного пропагатора на примере модели, состоящей из сферы с постоянными параметрами, и двух слоев, лежащих на ней. Каждый из этих слоев также имеет постоянные параметры, при этом величины, относящиеся к сфере, будем нумеровать

цифрой 3, к слою, граничащему со сферой, – цифрой 2, а величины, относящиеся к наружному слою, – цифрой 1.

Построим дисперсионное уравнение для расчета частот собственных колебаний такой модели. Формулы для напряжений и смещений не будем выписывать в явном виде, а воспользуемся матричным представлением зависимости этих величин от общего решения системы (3). Эта система в случае слоя с постоянными параметрами имеет четыре независимых решения, следовательно, в этом случае в представлении общего решения должно быть четыре произвольные постоянные. Система (3) в сфере имеет два независимых решения и, соответственно, в общем решении – две произвольные постоянные. Решение в слое можно сделать однозначным, задавая, например, вертикальное и касательное напряжения и две составляющие смещения на границе слоя; для сферы однозначное решение можно получить, задавая, например, на границе сферы только напряжения. Метод матричного пропагатора состоит в переносе условий непрерывности напряжений и смещений в слое с одной границы на другую.

Составляющими вектора в слое служат: нормальное напряжение σ , касательное напряжение τ , горизонтальное смещение u и вертикальное смещение v . Этот вектор можно представить как произведение матрицы M четвертого порядка, элементы которой зависят от параметров слоя и частных решений системы (3) в слое, на матрицу, состоящую из столбца, элементы которого – четыре произвольные постоянные, входящие в общее решение системы (3) для слоя. Что касается такого же вектора для сферы, то он может быть записан как произведение матрицы из четырех строк и двух столбцов на матрицу из одного столбца и двух строк, где стоят две произвольные постоянные общего решения системы (3) для сферы.

Итак, пусть z_1 – единичный радиус свободной границы, z_2 – радиус границы между слоями и z_3 – радиус границы внутренней сферы. Граничные условия на каждой границе будем записывать так, чтобы слева всегда были напряжения и смещения, относящиеся к среде под границей, а справа – к среде над границей. Матрицу M также будем снабжать значком 1, 2 или 3, совпадающим с номером границы, а в скобках будем указывать радиус границы.

Начнем с границы z_3 между сферой и внутренним слоем:

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \\ u \\ v \end{pmatrix} : M_3(z_3) \begin{pmatrix} C_1^{(3)} \\ C_2^{(3)} \end{pmatrix} = M_2(z_3) \begin{pmatrix} C_1^{(2)} \\ C_2^{(2)} \\ C_3^{(2)} \\ C_4^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Выразим отсюда произвольные постоянные в общем решении системы (3) для второго слоя через произвольные постоянные сферы. Затем используем условие непрерывности напряжений и смещений на границе z_2 , чтобы выразить произвольные постоянные общего решения в первом слое через произвольные постоянные общего решения во втором слое, а с их помощью – через постоянные общего решения в сфере. Теперь условие отсутствия напряжений на свободной границе можно выразить через две произвольные постоянные $C_1^{(3)}$ и $C_2^{(3)}$ общего решения в сфере. Таким образом мы приходим к системе двух уравнений с нулевой правой частью.

Условием существования ненулевых произвольных постоянных в общем решении системы (3) в сфере будет равенство нулю определителя второго порядка этой системы. В итоге получим дисперсионное уравнение для определения собственных частот этой модели.

Воспроизведем все описанное выше в виде цепочки формул.

Из (5) имеем:

$$\begin{pmatrix} C_1^{(2)} \\ C_2^{(2)} \\ C_3^{(2)} \\ C_4^{(2)} \end{pmatrix} = (M_2(z_3))^{-1} M_3(z_3) \begin{pmatrix} C_1^{(3)} \\ C_2^{(3)} \end{pmatrix},$$

граничные условия при $z = z_0$ приводят к

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \\ u \\ v \end{pmatrix}_{z_2} : M_2(z_2) \begin{pmatrix} C_1^{(2)} \\ C_2^{(2)} \\ C_3^{(2)} \\ C_4^{(2)} \end{pmatrix} = M_1(z_2) \begin{pmatrix} C_1^{(1)} \\ C_2^{(1)} \\ C_3^{(1)} \\ C_4^{(1)} \end{pmatrix} = \\ = M_2(z_2) (M_2(z_3))^{-1} M_3(z_3) \begin{pmatrix} C_1^{(3)} \\ C_2^{(3)} \end{pmatrix},$$

отсюда

$$\begin{pmatrix} C_1^{(1)} \\ C_2^{(1)} \\ C_3^{(1)} \\ C_4^{(1)} \end{pmatrix} = (M_1(z_2))^{-1} M_2(z_2) (M_2(z_3))^{-1} M_3(z_3) \begin{pmatrix} C_1^{(3)} \\ C_2^{(3)} \end{pmatrix},$$

наконец, из граничных условий на свободной границе следует

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix}_{z_1} : M_1(z_1) (M_1(z_2))^{-1} M_2(z_2) (M_2(z_3))^{-1} M_3(z_3) \begin{pmatrix} C_1^{(3)} \\ C_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Дисперсионное уравнение для определения частот:

$$\det \{M_1(z_1)(M_1(z_2))^{-1}M_2(z_2)(M_2(z_3))^{-1}M_3(z_3)\} = 0.$$

В случае $n - 1$ слоев, лежащих на сфере (т.е. n границ), дисперсионное уравнение имеет вид:

$$\det \{M_1(z_1)(M_1(z_2))^{-1}M_2(z_2)(M_2(z_3))^{-1} \times \dots \times M_n(z_n)\} = 0.$$

3. Описание моделей

В предыдущей работе [2] мы изучали особенности применения метода Ритца к задаче о спектре сфероидальных колебаний на примере модели Матумото и Сато [6] (однородный сферический слой, лежащий на однородной сфере). С точки зрения геометрии мы считали модель безразмерной и внешний радиус Земли полагали равным 1.

В настоящей статье рассмотрены три более сложные модели.

Модель 1, исходной для которой послужила модель Матумото и Сато, – это два однородных сферических слоя, лежащих на однородной сфере. Толщина верхнего слоя, упругие параметры его и сферы те же, что и в исходной модели – в верхнем слое: $\rho = 4.5$ г/см³, $\lambda = \mu = 190.125$ кбар, в сфере: $\rho = 10.8$ г/см³, $\lambda = 934.092$ кбар, $\mu = 500$ кбар. Промежуточный слой мы ввели за счет уменьшения радиуса внутренней сферы в модели Матумото и Сато. В этом слое λ принято таким же, как в сфере, т.е. $\lambda = 934,092$ кбар; для μ рассмотрен целый набор значений от 500 до 0.00001 кбар для того, чтобы понять влияние “разжижения” слоя на точность метода Ритца при нахождении спектра сфероидальных волн; ρ принято равным 9.8 г/см³. Радиусы верхней и нижней границ промежуточного слоя равны, соответственно, 0.545 и 0.320.

В результате мы получили, что сходимость собственных чисел в методе Ритца для трехслойных моделей примерно такая же, как и для двухслойных. Чтобы не загромождать изложение, не будем приводить здесь точных данных. Наиболее интересные данные, полученные на трехслойных моделях, приведены в разделе о выборе галеркинского базиса. Здесь лишь отметим, что точно так же, как и для двухслойной модели, рассмотренной в [2], “разжижение” внутреннего слоя в трехслойной модели приводит к тому, что первые, точные собственные частоты убывают пропорционально $c\sqrt{\mu}$. Табл.1 демонстрирует этот факт для первых трех собственных чисел. По-видимому, утверждение о том, что при построении асимптотики главный член первых частот должен быть пропорционален $\sqrt{\mu}$ при $\mu \rightarrow 0$, верно.

ТАБЛИЦА 1. Асимптотика малых собственных значений
в модели 1 для $\mu \rightarrow 0$

Первое собственное число			Второе собственное число			Третье собственное число		
ω	μ	$\mu=\omega^2/76.7$	ω	μ	$\mu=\omega^2/162$	ω	μ	$\mu=\omega^2/315$
0.831	0.00900	0.009014	1.214	0.00900	0.009102	1.685	0.00900	0.009016
0.784	0.00800	0.008012	1.145	0.00800	0.008091	1.589	0.00800	0.008015
0.733	0.00700	0.007011	1.071	0.00700	0.007080	1.486	0.00700	0.007013
0.679	0.00600	0.006009	0.992	0.00600	0.006069	1.376	0.00600	0.006011
0.620	0.00500	0.005008	0.905	0.00500	0.005058	1.256	0.00500	0.005009
0.554	0.00400	0.004006	0.810	0.00400	0.004046	1.124	0.00400	0.004008
0.480	0.00300	0.003005	0.701	0.00300	0.003035	0.973	0.00300	0.003006
0.392	0.00200	0.002003	0.573	0.00200	0.002023	0.794	0.00200	0.002004
0.277	0.00100	0.001002	0.405	0.00100	0.001012	0.562	0.00100	0.001002
0.263	0.00090	0.000901	0.384	0.00090	0.000911	0.533	0.00090	0.000902
0.248	0.00080	0.000801	0.362	0.00080	0.000809	0.502	0.00080	0.000802
0.232	0.00070	0.000701	0.339	0.00070	0.000708	0.470	0.00070	0.000701
0.215	0.00060	0.000601	0.314	0.00060	0.000607	0.435	0.00060	0.000601
0.196	0.00050	0.000501	0.286	0.00050	0.000506	0.397	0.00050	0.000501
0.175	0.00040	0.000401	0.256	0.00040	0.000405	0.355	0.00040	0.000401
0.152	0.00030	0.000300	0.222	0.00030	0.000304	0.308	0.00030	0.000301
0.124	0.00020	0.000200	0.181	0.00020	0.000202	0.251	0.00020	0.000200
0.088	0.00010	0.000100	0.128	0.00010	0.000101	0.178	0.00010	0.000100
0.083	0.00009	0.000090	0.121	0.00009	0.000091	0.169	0.00009	0.000090
0.078	0.00008	0.000080	0.115	0.00008	0.000081	0.159	0.00008	0.000080
0.073	0.00007	0.000070	0.107	0.00007	0.000071	0.149	0.00007	0.000070
0.068	0.00006	0.000060	0.099	0.00006	0.000061	0.138	0.00006	0.000060
0.062	0.00005	0.000050	0.091	0.00005	0.000051	0.126	0.00005	0.000050
0.055	0.00004	0.000040	0.081	0.00004	0.000040	0.112	0.00004	0.000040
0.048	0.00003	0.000030	0.070	0.00003	0.000030	0.097	0.00003	0.000030
0.039	0.00002	0.000020	0.057	0.00002	0.000020	0.079	0.00002	0.000020
0.028	0.00001	0.000010	0.040	0.00001	0.000010	0.056	0.00001	0.000010

Кроме модели 1, были рассмотрены две многослойные модели, более приближенные к реальной Земле: *модель 2* – это модель 1066а из работы Гильберта и Дзевонского [7], имеющая 159 слоев (параметры этой модели приведены на рис. 1) и *модель 3* – та же модель 2, но с 287 слоями, полученная путем линейной интерполяции параметров модели 2.

В отличие от модели 1066а, которая содержит настоящее внешнее жидкое ядро, и, следовательно, имеет нулевое μ на некотором интервале глубин, в нашей модели на этом же интервале глубин μ равно небольшому конечному значению ($\mu = 100$ кбар). Мы рассмотрели модель с 287 слоями чтобы убедиться, что точность приближенных собственных чисел не ухудшается с ростом числа слоев. Полученные результаты приведены в табл. 2.

Из предыдущих расчетов известно, что метод Ритца дает значительную погрешность при построении приближений для собственных

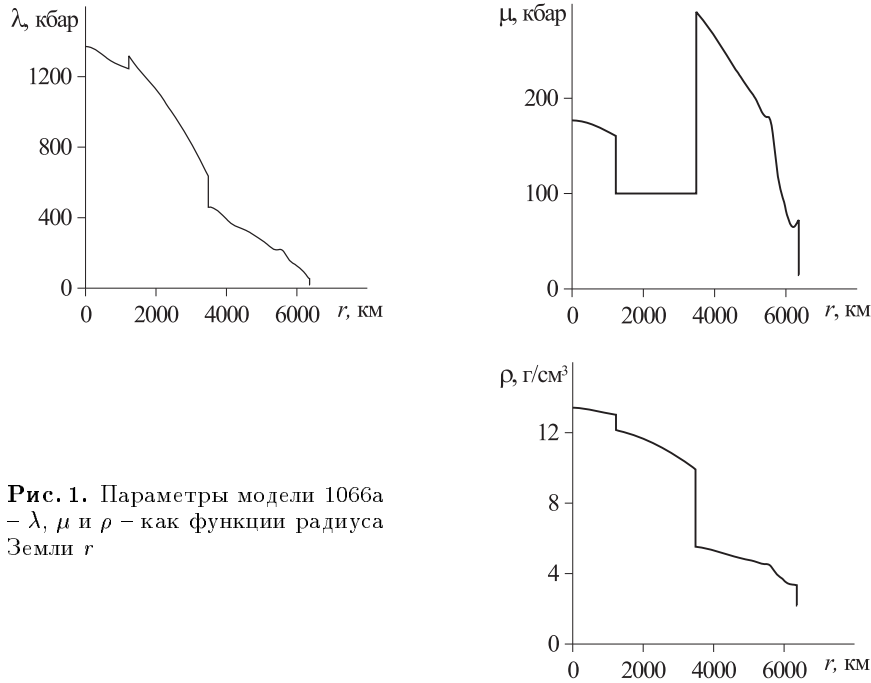


Рис. 1. Параметры модели 1066а – λ , μ и ρ – как функции радиуса Земли r

чисел при малых μ , так как мы не учитываем гравитационные силы, возникающие из-за возмущения поля плотности и притяжения искривленной поверхности Земли и границ раздела внутри Земли. Поэтому, чтобы остаться в рамках предыдущих исследований, мы ограничились небольшими конечными μ .

ТАБЛИЦА 2. Точные и приближенные собственные значения и ошибки аппроксимации для галеркинского базиса из 60 функций Бесселя

Номер собст- венно- го числа	Модель 2 – 159 слоев				Модель 3 – 287 слоев			
	Собств. число по Ритцу	“Точное” собств. число	Абс. погреш- ность	Отн. погреш- ность, %	Собств. число по Ритцу	“Точное” собств. число	Абс. погреш- ность	Отн. погреш- ность, %
1	13.86	13.82	0.03	0.23	13.86	13.83	0.03	0.23
5	58.76	58.58	0.18	0.30	58.78	58.61	0.18	0.30
10	104.82	104.79	0.04	0.03	104.93	104.77	0.16	0.16
15	153.54	152.59	0.95	0.62	153.59	152.70	0.89	0.58
20	202.14	202.08	0.06	0.03	202.37	202.44	0.02	0.01
25	244.50	242.00	2.50	1.03	244.64	236.90	7.74	3.27
30	305.59	293.77	11.82	4.02	305.81	281.23	24.58	8.74
35	376.27	341.58	34.69	10.16	376.84	333.32	43.53	13.06
40	477.71	383.47	94.24	24.58	478.00	374.29	103.71	27.71

4. О выборе базиса галеркинских подпространств

В этой статье на примере трехслойных моделей рассматривается влияние выбора базиса на приближенные решения, получаемые по методу Рунге. Прежде всего мы использовали естественный базис для задач со сферической симметрией – сферические функции Бесселя. В качестве альтернативного базиса были взяты кубические сплайны. Безусловно, счет со сплайнами проще и быстрее для каждого отдельного приближения, так как в конечномерном представлении наших операторов \tilde{A} и \tilde{B} в (2) много нулевых элементов. Однако сходимость приближения к точному решению в этом случае медленная, и нет прямой зависимости точности приближения от увеличения числа использованных для представления сплайнов, тогда как при естественном базисе точность напрямую зависит от числа использованных функций Бесселя. Когда базис состоит из функций Бесселя, галеркинские подпространства при увеличении их размерности оказываются вложенными одно в другое. В случае же базиса из сплайнов эти подпространства не обладают таким свойством. Наглядно можно себе представить, что переход от одного подпространства к другому в случае сплайнов – это “распухание” и “вращение” в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Поэтому сходимость собственных чисел не монотонна. На рис. 2. приведена сходимость первого собственного числа для трехслойной модели, когда в среднем слое $\mu = 500$ кбар; видно, что даже при размерности подпространства 800, приближенное собственное число отличается от “точного” примерно на 0.14, что соответствует относительной погрешности 1%. Вполне естественно, что при “разжижении”, т.е. при уменьшении μ , сходимость приближенных чисел ухудшается. Табл. 3 демонстрирует этот факт для $\mu_2 = 350$ кбар и для $\mu_2 = 0.005$ кбар.

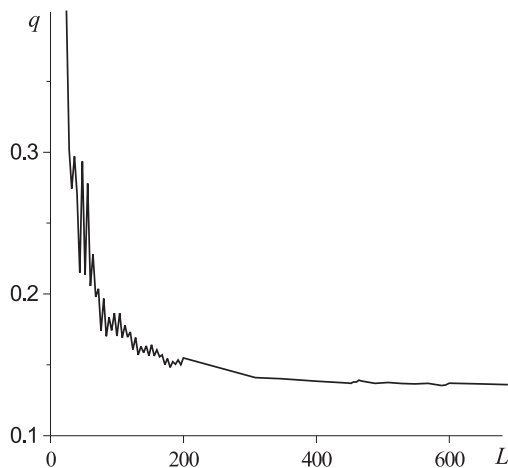


Рис. 2. Зависимость разности q между приближенным и “точным” первым собственным числом от размерности галеркинских подпространств L для модели 1

ТАБЛИЦА 3. Сходимость собственных чисел для модели 1 при использовании галеркинскогo базиса из сплайнов для двух значений μ_2

$\mu_2 = 350$ кбар

Номер собственного числа			Размерность галеркинскогo подпространства
1	2	3	
Собственные числа, полученные с помощью сплайнов			
0.19572481E·10 ²	0.31943180E·10 ²	0.50263297E·10 ²	88
0.19546504E·10 ²	0.31913038E·10 ²	0.50218458E·10 ²	168
0.19539974E·10 ²	0.31904623E·10 ²	0.50203510E·10 ²	248
0.19534989E·10 ²	0.31900049E·10 ²	0.50191608E·10 ²	328
0.19531853E·10 ²	0.31897773E·10 ²	0.50185117E·10 ²	408
0.19430424E·10 ²	0.31877920E·10 ²	0.50813350E·10 ²	602
0.19529743E·10 ²	0.31895087E·10 ²	0.50183560E·10 ²	608
Собственные числа, полученные с помощью функций Бесселя			
0.19442089E·10 ²	0.31906899E·10 ²	0.50251165E·10 ²	60
0.19409779E·10 ²	0.31858991E·10 ²	0.50167714E·10 ²	126
"Точные" собственные числа			
0.19379780E·10 ²	0.31814418E·10 ²	0.50097171E·10 ²	

$\mu_2 = 0.005$ кбар

Номер собственного числа			Размерность галеркинскогo подпространства
1	2	3	
Собственные числа, полученные с помощью сплайнов			
0.97449083E·10 ¹	0.10417821E·10 ²	0.11952258E·10 ²	88
0.82340137E·10 ¹	0.89930902E·10 ¹	0.92787496E·10 ¹	168
0.82537979E·10 ¹	0.84226362E·10 ¹	0.87935585E·10 ¹	248
0.83335295E·10 ¹	0.96202512E·10 ¹	0.97027516E·10 ¹	328
0.81457139E·10 ¹	0.97524847E·10 ¹	0.10456150E·10 ²	408
0.82587809E·10 ¹	0.97557205E·10 ¹	0.10466835E·10 ²	488
0.81935077E·10 ¹	0.97510992E·10 ¹	0.10376942E·10 ²	568
Собственные числа, полученные с помощью функций Бесселя			
0.10825602E·10 ¹	0.35554509E·10 ¹	0.92760408E·10 ¹	60
0.76474156E·10 ⁰	0.96451965E·10 ⁰	0.12898610E·10 ¹	126
"Точные" собственные числа			
0.61976506E·10 ⁰	0.90518056E·10 ⁰	0.12561603E·10 ¹	

Примечание. Параметры модели 1 – в верхнем слое: $\rho = 4.5$ г/см³, $\lambda = \mu = 190.125$ кбар; в сфере: $\rho = 10.8$ г/см³, $\lambda = 934.092$ кбар, $\mu = 500$ кбар; в промежуточном слое: $\rho = 9.8$ г/см³, $\lambda = 934.092$ кбар. Радиус верхней границы промежуточного слоя 0.545, нижней – 0.320.

Для $\mu_2 = 0.005$ кбар собственные числа, найденные с помощью сплайнов для подпространства размерности 568, оказываются примерно в 10 раз больше, чем “точные” собственные числа.

Для сравнения в табл.3 приведены приближенные собственные числа, полученные с помощью функций Бесселя в качестве координатных векторов. Согласование с “точными” собственными числами вполне приемлемое даже для $\mu_2 = 0.005$ кбар и при размерности галеркинского подпространства 126.

Мы рассмотрели также и приближение для собственных функций, получаемое с помощью как сплайнов, так и бесселевых функций в качестве базиса. Известно, что точность приближенных собственных функций на порядок меньше, чем собственных чисел.

На рис.3,*a* для первой составляющей третьей собственной функции приведены кривые абсолютных невязок при различных размерностях галеркинского подпространства (базисом служили кубические сплайны). Конечно, лучше было бы дать относительные невязки, но “точная” составляющая обращается в нуль в некоторых точках на интервале $(0, 1)$, поэтому мы приводим средний модуль “точной” первой составляющей, он равен 1.446.

Рис.4,*a* содержит такие же сведения, что и рис.3,*a*, но для второй составляющей третьей собственной функции, для которой средний модуль “точной” второй составляющей равен 1.132. Поскольку результаты всех приближений зависят от того, какие функции образуют базис,

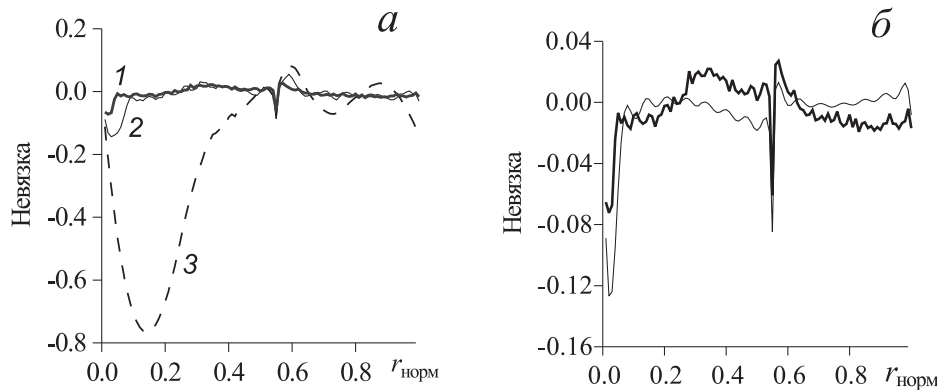


Рис. 3. Невязка для первой составляющей (третий собственный вектор) при $n = 2$ и $\mu = 350$ кбар как функция нормированного радиуса $r_{\text{норм}}$

a – базис из сплайнов для трех размерностей галеркинских подпространств: 1 – 88, 2 – 48, 3 – 10; *b* – базис из функций Бесселя (тонкая линия), для сравнения приведена кривая 1 рис. 3,*a* (жирная линия). Размерность базиса из функций Бесселя – 60

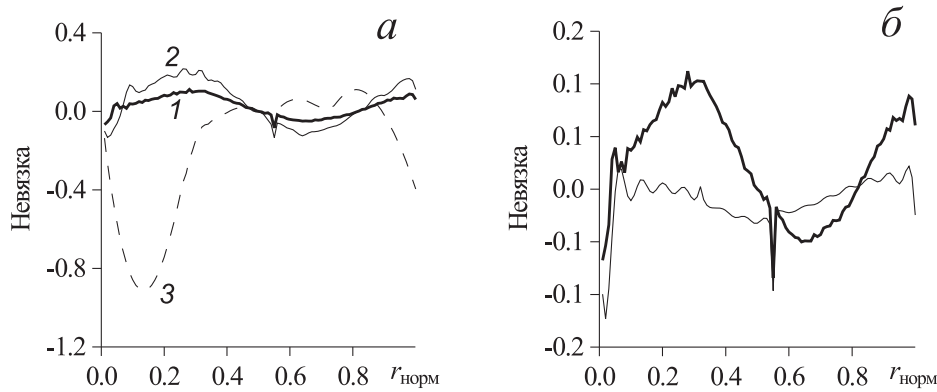


Рис. 4. Невязка для второй составляющей (третий собственный вектор) при $n = 2$ и $\mu = 350$ кбар как функция нормированного радиуса $r_{\text{норм}}$

a – базис из сплайнов для трех размерностей галеркинских подпространств: 1 – 88, 2 – 48, 3 – 10; *б* – базис из функций Бесселя (тонкая линия), для сравнения приведена кривая 1 рис. 4, *a* (жирная линия). Размерность базиса из функций Бесселя – 60

мы приводим на рис. 3, *б* (первая составляющая) и рис. 4, *б* (вторая составляющая) кривые абсолютных невязок, полученных с помощью базиса из сплайнов (кривая 1) и базиса из функций Бесселя (кривая 2). Из этих рисунков видно, что функции Бесселя дают лучшую точность приближений при меньшей размерности галеркинского базиса.

Выводы

1. Проведенные вычисления показывают, что метод Ритца дает удовлетворительные результаты при расчете спектра сфероидальных колебаний многослойных моделей Земли.

2. Для этой задачи естественный базис из функций Бесселя дает существенно лучшие результаты, чем базис из сплайнов: для получения приемлемой точности при вычислении спектров размерность галеркинского базиса из бesselевых функций по крайней мере на порядок меньше, чем размерность базиса из сплайнов.

3. Главный член асимптотики первых собственных чисел в моделях, содержащих слой с $\mu \rightarrow 0$, изменяется пропорционально $\sqrt{\mu}$. Этот результат получен без учета гравитации.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Международного научно-технического центра (проект N 1293-99).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Розенкноп Л.М., Бессонова Э.Н., Резников Е.Л.* Вариационный подход к задаче о собственных колебаниях Земли // Вопросы геодинамики и сейсмологии. М.: ГЕОС, 1998. С.133–167. (Вычисл. сейсмология; Вып.30).
2. *Бессонова Э.Н., Резников Е.Л., Ильин А.М.* Метод Ритца в задаче о сферических колебаниях слоистой модели Земли // Проблемы динамики и сейсмичности Земли. М.: ГЕОС, 2000. С.77–87. (Вычисл. сейсмология; Вып.31).
3. *Шкадинская Г.В.* Метод расчета поверхностных волн Рэлея в шаре // Алгоритмы интерпретации сейсмических данных. М.: Наука, 1971. С.178–188. (Вычисл. сейсмология; Вып.5).
4. *Thomson W.T.* Transmission of elastic waves through a stratified solid // J. Appl. Phys. 1950. Vol.21. P.89–93.
5. *Haskell N.A.* The dispersion of surface waves in multilayered media // Bull. Seism. Soc. Amer. 1953. Vol.43. P.17–36.
6. *Matumoto T., Sato U.* On the vibration of an elastic Globe with one layer. The vibration of the first class // Bull. Earth. Res. Inst. Jap. 1954. Vol.32. P.247–258.
7. *Gilbert F., Dziewonski A.M.* An application of normal mode theory to the retrieval of structural parameters and source mechanisms from seismic spectra // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser.A. 1975. Vol.278, N 1280. P.187–269.