

УДК 550.310:517.984 54

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДОЛИН ПРИ НАКЛОННОМ  
ЗОНДИРОВАНИИ ИМПУЛЬСНЫМ ИСТОЧНИКОМ  
ВДОЛЬ ШИРОТЫ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ****В.М. Маркушевич<sup>1</sup>**, Э.Н. Бессонова<sup>1</sup>, С.Г. Киселев<sup>1</sup>,  
А.Л. Агеев<sup>2</sup>, В.В. Васин<sup>2</sup><sup>1</sup>Международный институт теории прогноза землетрясений  
и математической геофизики Российской академии наук, Москва<sup>2</sup>Институт математики и механики  
Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург

Продолжено исследование обратной задачи радиозондирования ионосферы, содержащей волновод. Схема эксперимента и предположения о среде те же, что в [1, 2]. В работе показано, что использование импульсного источника дает возможность решить обратную задачу с помощью группового времени. Для этого строится монотонная функция со скачками, похожая на функцию  $\tau(p)$ , которая построена в [1], но при этом используется групповое время, вместо фазового. Структура волновода может быть определено по скачку этой функции на волноводе, скачок зависит от частоты сигнала.

**SOLUTION OF THE WAVEGUIDE'S PROBLEM  
FOR OBLIQUE SOUNDING WITH A PULSE SOURCE  
ALONG A MAGNETIC LATITUDE****V.M. Markushevich<sup>1</sup>**, E.N. Bessonova<sup>1</sup>, S.G. Kiselev<sup>1</sup>,  
A.L. Ageev<sup>2</sup>, V.V. Vasin<sup>2</sup><sup>1</sup>International Institute of Earthquake Prediction Theory  
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow<sup>2</sup>Institute of Mathematics and Mechanics,  
Ural Division, Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg

In this paper the study of the ionosphere with the waveguide is continued. The scheme of the experiment and suppositions about the ionosphere's structure are identical with that described in [1,2]. In this paper we show, that a pulse source can provide a new information which seems to be obtained from travel times of radio signals. We point out, that the waveguide's structure can be inferred from the jump of a new tau-function at the waveguide which depends on frequency if group time observed for some frequency range.

## Введение

Настоящая статья является продолжением исследования, изложенного в [1, 2]. В работе [1] получены два основных результата. Было установлено, что без учета внешнего магнитного поля при наклонном зондировании ионосферы импульсным источником групповое время дает меньше информации об электронной плотности, чем фазовое. Этот результат эквивалентен теореме Брайта–Тьюва [3], но был получен другим способом – с помощью системы двух интегральных уравнений, рассмотренной в [4]. Было также показано, что при определении электронной плотности в ионосфере с долинами можно использовать скачки тау-функции, связанной с фазовым временем. Скачки зависят от частоты: предполагается, что они известны при всех частотах, для которых фазовый луч проникает в долину. Этот результат справедлив только для экстраординарного луча при учете магнитного поля, относительно которого делается предположение, что оно ортогонально плоскости распространения радиолуча (субширотное зондирование).

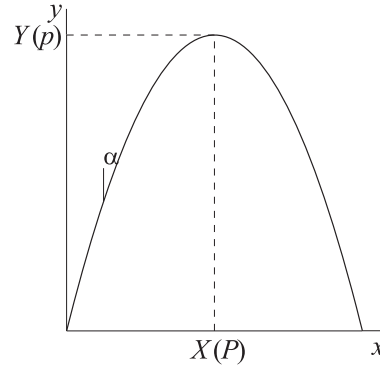
Очевиден логический пробел в работе [1] – нет ответа на вопрос, что же можно узнать об электронной плотности по групповому времени, если учитывать влияние магнитного поля. В предлагаемой статье этот пробел восполняется. Мы показываем, что при учете магнитного поля групповое время столь же информативно, как и фазовое. Этот вывод важен для практики ионосферных исследований, так как измерять время прихода радиоимпульса проще и удобнее, чем определять набег фазы вдоль луча.

Определение электронной плотности по групповому времени основано на теории, которая имеет много общего с изложенной в работе [4]. Поэтому мы предполагаем, что читатель знаком с основными результатами [4]. Отметим, что ключевым моментом при решении обратной лучевой задачи в [4] было введение тау-функции. В предлагаемой статье строится аналог этой функции – групповая тау-функция – со свойствами, которые близки к свойствам обычной тау-функции.

### 1. Постановка обратной лучевой задачи в сейсмологии

Пусть в полуплоскости  $(x, y)$  (рис. 1),  $-\infty < x < \infty$ ,  $y \geq 0$ , скорость распространения сигнала зависит только от высоты  $y$ :  $v = v(y)$ . Отнормируем скорость  $v(y)$  на  $v_{\text{норм}}$  и будем иметь дело со скоростью  $u(y) = v(y)/v_{\text{норм}}$ . Тогда восходящая и нисходящая ветви луча симметричны относительно средней линии, если источник и приемник находятся на одном уровне. Половина расстояния между источником и

Рис. 1.



точкой возврата луча  $X$  и половина времени распространения сигнала вдоль луча  $T(p)$  определяются следующими формулами:

$$X(p) = \int_0^{Y(p)} \frac{p \, dy}{\sqrt{n^2(y) - p^2}}, \tag{1}$$

$$T(p) = \int_0^{Y(p)} \frac{n^2(y) \, dy}{\sqrt{n^2(y) - p^2}},$$

где  $Y(p)$  – высота вершины луча с параметром  $p$ , при этом

$$p = \sin \alpha(0)/u(0) = 1/u(Y) = n(Y);$$

$\alpha(0)$  – угол выхода из источника луча с параметром  $p$ .

Если  $v_{\text{норм}}$  – скорость света в вакууме, то всегда будет выполнено условие  $0 < n \leq 1$ . Для решения обратной лучевой задачи также вводится функция

$$\tau(p) = T(p) - pX(p) = \int_0^{Y(p)} \sqrt{n^2(y) - p^2} \, dy, \tag{2}$$

обладающая свойством монотонности.

Требуется восстановить  $n(y)$  по известной функции  $\tau(p)$  или по известным  $X(p)$  и  $T(p)$ .

## 2. Постановка задачи с импульсным источником

Постановка обратной задачи зондирования ионосферы импульсным источником, хотя и похожа на постановку классической обратной лучевой задачи, но имеет существенные отличия. В задаче с импульсным

источником  $n(y)$  можно восстановить из системы двух интегральных уравнений, одно из которых – уравнение относительно  $X(p)$  из (1), а второе интегральное уравнение – это групповое время движения импульса

$$T_g(p) = \int_0^{Y(p)} \frac{n(y)n_g(y)}{\sqrt{n^2(y) - p^2}} dy, \quad (3)$$

где  $n_g(y)$  – групповой коэффициент преломления. Он связан с фазовым коэффициентом преломления  $n(y)$  формулой

$$n(y)n_g(y) = a^2 \left( \frac{1 - \varphi}{a^2 - \varphi^2} \right)^2 + 1. \quad (4)$$

(Заметим, что в работе [1] в этой формуле допущена ошибка.) Здесь

$$\varphi(y) = 1 + \frac{f(y)}{\omega^2}, \quad f(y) = -\omega_0^2 = -4\pi N_e(y)e^2/m < 0, \quad a = \frac{\omega_T}{\omega},$$

$\omega_0$  – плазменная частота,  
 $\omega_T$  – гиромагнитная частота,  
 $\omega$  – частота сигнала,  
 $N_e$  – электронная концентрация,  
 $e, m$  – заряд и масса электрона,  
 $y$  – высота.

Будем выбирать такие частоты зондирования, чтобы выполнялись неравенства  $0 < \varphi < 1$  и  $0 < a < 1$ .

Фазовый коэффициент преломления определяется формулой Эпплтона–Хартри [3]:

$$n^2 = \frac{\varphi^2 - a^2}{\varphi - a^2}, \quad (5)$$

где  $n = n(y)$ .

Второй способ решения этой обратной задачи – ввести монотонную функцию, похожую по своим свойствам на  $\tau(p)$  (2).

### 3. Определение групповой тау-функции

Функцию  $\varphi$  можно выразить через  $n^2$ , используя закон Эпплтона–Хартри (5):

$$\varphi(n^2) = \frac{1}{2} \left( n^2 + \sqrt{n^4 - 4a^2(-1 + n^2)} \right). \quad (6)$$

Подставим выражение (6) в (4) и полученный результат – в формулу для группового времени (3), тем самым представим групповое время через фазовый коэффициент преломления  $n(y)$ . Затем введем функцию  $\tau_g(p)$

$$\begin{aligned} -a^2 \tau_g(p) &= T_g(p) - \frac{1}{p} \left( a^2 \left( \frac{1 - \varphi(p^2)}{a^2 - \varphi^2(p^2)} \right)^2 + 1 \right) X(p) = \\ &= \int_0^{Y(p)} \frac{\left( a^2 \left( \frac{1 - \varphi(n^2)}{a^2 - \varphi^2(n^2)} \right)^2 + 1 \right) - \left( a^2 \left( \frac{1 - \varphi(p^2)}{a^2 - \varphi^2(p^2)} \right)^2 + 1 \right)}{\sqrt{n^2(y) - p^2}} dy. \end{aligned} \quad (7)$$

Введем обозначения:  $a^2 = b$ ,  $p^2 = t$ ,  $n^2 = m$ . В наших предположениях среда является плоско-слоистой, зависящей только от одной переменной (высоты  $y$ ). Поэтому скорость распространения радиосигнала зависит только от высоты. В частности  $m = m(y) = n^2(y)$ . Обозначим подинтегральную функцию аргументов  $m$  и  $t$  в правой части (7) через  $-K(m, t)$  и подставим в нее  $\varphi$  из формулы (6). Подинтегральное выражение в (7) после сокращения на  $b$  примет вид

$$K(m, t) = \frac{-1}{\sqrt{m-t}} \left( \frac{\left( \frac{1}{2}(-m - h(m)) + 1 \right)^2}{\left( b - \frac{1}{4}(m + h(m))^2 \right)^2} - \frac{\left( \frac{1}{2}(-t - h(t)) + 1 \right)^2}{\left( b - \frac{1}{4}(t + h(t))^2 \right)^2} \right),$$

где  $h(t) = \sqrt{t^2 - 4b(t-1)}$ ,  $h(m) = \sqrt{m^2 - 4b(m-1)}$ . Напомним, что  $\varphi(n^2)$  является монотонно возрастающей функцией  $y$  [1]. Поэтому и  $t + h(t)$  также монотонно возрастает.

*Предложение 1.* Для любого фиксированного  $0 < m^* < 1$  функция  $K(m^*, t)$  является положительной, монотонно убывающей функцией  $t$  на интервале  $0 < t < m^*$ .

Доказательство приводится в Приложении. Очевидно, что если подинтегральная функция обладает свойством, сформулированным в Предложении 1, то интеграл (7), определяющий  $\tau_g(p)$ , является монотонно убывающей функцией  $p$ , так как верхний предел  $Y(p)$  с ростом  $p$  может только уменьшаться. Назовем  $\tau_g(p)$  групповой тау-функцией.

Итак, групповая тау-функция определяется выражением

$$\tau_g(p) = \int_0^{Y(p)} g(y, p) dy, \quad (8)$$

где  $g(y, p) = K(n^2(y), p^2)$ .

#### 4. Параметризация группового годографа

Проводя зондирование импульсным сигналом, мы, к сожалению, не можем обойтись без тонального, монохроматического сигнала. Причиной этого является следующее свойство импульсного сигнала: такой сигнал распространяется в изотропной диспергирующей среде вдоль фазового луча, но с групповой скоростью.

Поэтому, чтобы определить значение лучевого параметра  $p$  на луче, нужно знать фазовое время  $T$  на луче и в некоторой его окрестности. Однако для определения лучевого параметра не требуется знать набег фазы вдоль всего луча, а нужно лишь найти отношение приращения фазы к приращению эпицентрального расстояния в окрестности луча  $p = dT/dX$ . Иначе говоря, используется только трансверсальность луча как геодезической кривой.

Тем не менее, нельзя исключить возможность того, что лучевой параметр может быть определен и по групповому времени  $T_g$ , хотя нам не удалось найти такой способ параметризации.

#### 5. Интерпретация скачков групповой тау-функции

После обсуждения параметризации годографа рассмотрим ионосферу с фазовым коэффициентом преломления (пример такого коэффициента для некоторой частоты показан на рис. 2) и с соответствующей групповой тау-функцией  $\tau_g$  (рис. 3).  $\tau_g(p)$  – положительная монотонно убывающая функция. Очевидно, что она непрерывна всюду, кроме критических значений  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , а для параметра  $t$  – значений  $P_i^2$ . Каждое такое значение соответствует волноводу-долине. Обозначим скачки  $\tau_g(p)$  через  $\sigma g_i$ .

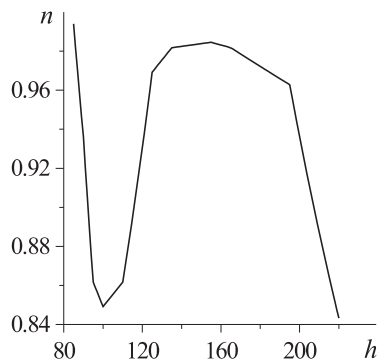


Рис. 2.

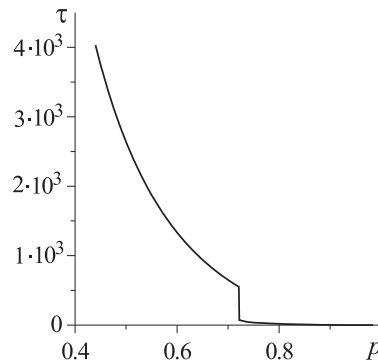


Рис. 3.

Так как положение краев долины  $(y_i, \bar{y}_i)$  не зависит от частоты (см. [5]), то для скачка  $\sigma g_i$  справедлива формула

$$\sigma g_i = \int_{y_i}^{\bar{y}_i} g(y, P_i) dy. \quad (9)$$

Пусть  $F_i(r)$  – лебегова мера функции  $f(y)$  внутри  $i$ -го волновода

$$F_i(r) = \text{mes}\{y, y \in (y_i, \bar{y}_i), f(y) < r\}.$$

Фазовый коэффициент преломления  $n(y)$  явно выражается через  $f(y)$ :

$$n^2 = 1 + \frac{f(y)}{\omega^2} \left( 1 + \frac{\omega_T^2}{\omega^2 - \omega_T^2 + f(y)} \right). \quad (10)$$

С помощью (8) и (10) выразим  $g(y, p)$  через частоту зондирования

$$\begin{aligned} g(y, p) = & \left( \frac{-f(y)/\omega^2}{(1 + f(y)/\omega^2)^2 - b} + \frac{1 - \frac{1}{2}(t + h(t))}{\frac{1}{4}(t + h(t))^2 - b} \right) \times \\ & \times \frac{-2\sqrt{n^2 - t} (-4b + 2(1 + f(y)/\omega^2 + t + h(t)))}{-4b + 4((1 + f(y)/\omega^2)^2)} \times \\ & \times \frac{4(b - 1 - f(y)/\omega^2) + (2f(y)/\omega^2)(h(t) + t)}{(2(1 + f(y)/\omega^2) - n^2 + h(t))(-4b + (t + h(t))^2)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя (11), можно записать выражение (9) для скачка групповой тау-функции на  $i$ -м волноводе-долине в виде

$$\sigma g_i = \int_{h_i}^{H_i} g(r, P_i) dF_i(r), \quad (12)$$

где  $h_i = \min\{f(y), y \in (y_i, \bar{y}_i)\}$ ,  $H_i = \max\{f(y), y \in (y_i, \bar{y}_i)\}$ ,

$$\begin{aligned} g(r, t = (P_i)^2) = & \left( \frac{-r/\omega^2}{(1 + r/\omega^2)^2 - b} + \frac{1 - \frac{1}{2}(t + h(t))}{\frac{1}{4}(t + h(t))^2 - b} \right) \times \\ & \times \frac{-2\sqrt{n^2(r) - t} (-4b + 2(1 + r/\omega^2 + t + h(t)))}{-4b + 4((1 + r/\omega^2)^2)} \times \\ & \times \frac{4(b - 1 - r/\omega^2) + (2r/\omega^2)(h(t) + t)}{(2(1 + r/\omega^2) - n^2(r) + h(t))(-4b + (t + h(t))^2)}, \end{aligned}$$

и, как следует из (10),

$$n^2(r) = 1 + \frac{r}{\omega^2} \left( 1 + \frac{\omega_T^2}{\omega^2 - \omega_T^2 + r} \right).$$

Формула (12) и является основным результатом нашего исследования. Так как скачок  $\sigma g_i$  зависит от  $\omega$ , то возникает предположение, что с помощью этой зависимости можно найти меру  $F_i(r)$ . Знание  $F_i(r)$  позволяет определять электронную плотность  $f(y)$  выше  $i$ -й долины, решая уравнение Фредгольма–Стильтьеса (12). Заметим, что это уравнение относится к числу некорректно поставленных проблем, и некоторые подходы к численному решению задач такого рода изложены в работе [6]. Подробный алгоритмический анализ уравнения (12) мы предполагаем рассмотреть в следующих работах.

### Заключение

Итак, мы получили формулу (12) для определения функции меры электронной плотности в долине; другой способ описан в работе [1, формула (8)]. Нам кажется, что результат настоящей статьи более приемлем для практического применения, чем предшествующий. Во-первых, в исследовании ионосферы с поверхности Земли более принято использовать импульсный источник, чем тональное или доплеровское зондирование. Но вторая и главная причина в том, что мы вводим тау-функцию и рассматриваем ее скачок. Монотонность тау-функции по лучевому параметру существенно облегчает работу с экспериментальными данными. В сейсмологии и особенно в той ее ветви, которая называется геометрической сейсмикой, введение тау-функции изменило всю обработку данных, включая решение обратных задач (работы Э.Н. Бессоновой, В.Н. Фишмана и др. [7, 8]). Сложный самопересекающийся годограф был заменен сравнительно простой (благодаря своей монотонности) тау-функцией. Мы надеемся, что использование групповой тау-функции может также существенно упростить обработку данных наклонного зондирования импульсным источником в широтном направлении.

### Приложение

#### Доказательство Предложения 1

Запишем подинтегральную функцию  $K(m, t)$  (см. ф-лу (7)) в виде

$$K(m, t) = \frac{-1}{\sqrt{m-t}} \left( \left( \frac{1-\varphi(m)}{b-(\varphi(m))^2} \right)^2 - \left( \frac{1-\varphi(t)}{b-(\varphi(t))^2} \right)^2 \right), \quad (\text{П } 1)$$



где  $\varphi(t) = \frac{1}{2}(t + \sqrt{t^2 - 4b(t-1)})$ .

Покажем, что, если  $0 < b < 1$ ,  $0 < m < 1$  и  $0 < t < m$ , то функцию  $K(m, t)$  можно записать в виде произведения положительных монотонно убывающих сомножителей, имеющих общий знак минус.

1. Разложим разность квадратов в произведение суммы и разности:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1 - \varphi(m)}{b - \varphi(m)^2} \right)^2 - \left( \frac{1 - \varphi(t)}{b - \varphi(t)^2} \right)^2 = \\ & = \left( \frac{1 - \varphi(m)}{b - \varphi(m)^2} - \frac{1 - \varphi(t)}{b - \varphi(t)^2} \right) \left( \frac{1 - \varphi(m)}{b - \varphi(m)^2} + \frac{1 - \varphi(t)}{b - \varphi(t)^2} \right). \quad (\text{П } 2) \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию  $\psi(t) = \frac{1 - \varphi(t)}{b - \varphi(t)^2}$ . Функция  $\psi(t)$  отрицательна, так как  $\sqrt{b} < \varphi < 1$ ,  $\varphi(0) = \sqrt{b}$ ;  $\varphi(t)$  — монотонно возрастает, следовательно,  $b - \varphi(t)^2 < 0$ . Функция  $\psi(t)$  монотонно возрастает, так как  $\psi'(t) > 0$ :

$$\psi'(t) = \frac{(2-t)(\varphi(t) - b) \varphi'(t)}{(b - (\varphi(t))^2)^2}.$$

Видно, что в последнем выражении все сомножители положительны. Следовательно, сомножитель в формуле (П 2), соответствующий сумме  $\psi(m) + \psi(t)$ , является отрицательной монотонно возрастающей функцией.

2. Покажем, что оставшаяся в подинтегральном выражении (П 1) комбинация сомножителей  $\frac{\psi(m) - \psi(t)}{\sqrt{m-t}}$  также является положительной и монотонно убывающей функцией  $t$ .

Приводя  $\psi(m) - \psi(t)$  к общему знаменателю, получим

$$\frac{\psi(m) - \psi(t)}{\sqrt{m-t}} = \left( \frac{\varphi(m) - \varphi(t)}{\sqrt{m-t}} \right) \left( \frac{\varphi(m) - b + (1 - \varphi(m)) \varphi(t)}{(\varphi(m)^2 - b)(\varphi(t)^2 - b)} \right). \quad (\text{П } 3)$$

Легко видеть, что каждый из двух сомножителей формулы (П 3) положителен, так как  $\varphi(t) - b > 0$  и  $\varphi(t)^2 - b > 0$ .

Убедимся дифференцированием, что каждый из них также и убывает.

Дифференцируя второй сомножитель формулы (П 3), получим:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\varphi(m) - b + (1 - \varphi(m)) \varphi(t)}{((\varphi(m))^2 - b) ((\varphi(t))^2 - b)} \right)' = \\ & = \frac{\varphi(m) - b}{(\varphi(m))^2 - b} \left( \frac{1}{(\varphi(t))^2 - b} \right)' + \frac{1 - \varphi(m)}{(\varphi(m))^2 - b} \left( \frac{\varphi(t)}{(\varphi(t))^2 - b} \right)' = \\ & = \frac{\varphi(m) - b}{(\varphi(m))^2 - b} \left( - \frac{2 \varphi(t) \varphi'(t)}{((\varphi(t))^2 - b)^2} \right) + \\ & + \frac{1 - \varphi(m)}{(\varphi(m))^2 - b} \left( - \frac{((\varphi(t))^2 + b) \varphi'(t)}{(b - (\varphi(t))^2)^2} \right) < 0. \end{aligned}$$

Также легко видеть, что оба слагаемых, полученных при дифференцировании второго сомножителя, отрицательны.

Продифференцируем теперь первый сомножитель формулы (П 3):

$$\left( \frac{\varphi(m) - \varphi(t)}{\sqrt{m - t}} \right)' = \frac{1}{\sqrt{m - t}} \left( \frac{\varphi(m) - \varphi(t)}{2(m - t)} - \varphi'(t) \right).$$

Покажем, что эта производная отрицательна, так как справедливо неравенство

$$\frac{\varphi(m) - \varphi(t)}{2(m - t)} < \varphi'(t). \quad (\text{П 4})$$

Чтобы убедиться в этом, найдем корни уравнения (как функции по  $t$ )

$$\frac{\varphi(m) - \varphi(t)}{2(m - t)} = \varphi'(t) \quad (\text{П 5})$$

и установим, что при значениях параметров  $0 < b < 1$  и  $0 < m < 1$  все они лежат вне интервала  $(0, m)$ . Имеем

$$\varphi'(t) = \frac{-2b + t + h(t)}{2h(t)},$$

где  $h(t) = \sqrt{t^2 - 4b(t - 1)}$ .

Левую часть уравнения (П 5) преобразуем, выделив из числителя сомножитель  $m - t$  и сократив его со знаменателем:

$$\begin{aligned} \varphi(m) - \varphi(t) &= \frac{1}{2}(m - t + h(m) - h(t)) = \\ &= \frac{1}{2} \left( m - t + \frac{h(m)^2 - h(t)^2}{h(m) + h(t)} \right) = \frac{1}{2} \left( m - t - \frac{(4b - m - t)(m - t)}{h(m) + h(t)} \right) = \\ &= \frac{m - t}{2} \left( 1 - \frac{4b - m - t}{h(m) + h(t)} \right). \end{aligned}$$

Заменяя  $\varphi(m) - \varphi(t)$  и  $\varphi'(t)$  в уравнении (П 5), получим:

$$(h(t) - m + t)h(t) = (4b - 2t - h(t))h(m). \quad (\text{П } 6)$$

Возводя в квадрат обе части уравнения (П 6), приходим к уравнению

$$(4b - m - t)(4b(m - 1) + t(t - 2pm))(-2b + t + h(t)) = 0. \quad (\text{П } 7)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что третий множитель уравнения (П 7) отличен от нуля, а все три корня первых двух множителей являются побочными, т.е. не принадлежат интервалу  $(0, m)$ . Поскольку, например, при  $t = 1/5$ ,  $m = 2/5$ ,  $b = 1/2$  неравенство (П 4) выполнено, то оно справедливо при всех допустимых значениях параметров.

Таким образом, выражение (П 1) для  $K(m, t)$  представлено в виде монотонно убывающих на интервале  $0 < t < m$  положительных сомножителей при выполнении условий  $0 < b < 1$  и  $0 < m < 1$ .

Работа финансировалась Международным научно-техническим центром (проект N 1293-99).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Агеев А.Л., Васин В.В., Бессонова Э.Н., Маркушевич В.М., Киселев С.Г. Определение электронной концентрации внутри ионосферного волновода по скачку тау-функции на нем // Вопросы геодинамики и сейсмологии. М.: ГЕОС, 1998. С.225–233. (Вычисл. сейсмология; Вып.30).
2. Агеев А.Л., Васин В.В., Бессонова Э.Н., Киселев С.Г., Маркушевич В.М. Наклонное зондирование как метод определения электронной концентрации в долине // Геомагнетизм и аэрономия. 1999. Т.39, N3. С.74–78.
3. Митра С.К. Верхняя атмосфера. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 640 с.
4. Гервер М.Л., Маркушевич В.М. Определение по годографу скорости распространения сейсмической волны // Методы и программы для анализа сейсмических наблюдений. М.: Наука, 1967. С.3–51. (Вычисл. сейсмология; Вып.3).
5. Бессонова Э.Н., Маркушевич В.М., Савин И.В., Агеев А.Л., Васин В.В. Обратная задача радиозондирования ионосферы при наличии волноводов (долин). Единственность решения // Теоретические проблемы в геофизике. М.: Наука, 1997. С.81–99. (Вычисл. сейсмология; Вып.29).
6. Агеев А.Л., Васин В.В., Бессонова Э.Н., Маркушевич В.М. Радиозондирование ионосферы на двух частотах. Алгоритмический анализ интегрального уравнения Фредгольма–Стилтьеса // Теоретические проблемы в геофизике. М.: Наука, 1997. С.100–118. (Вычисл. сейсмология; Вып.29).
7. Bessonova E.N., Fishman V.M. et al. The tau method for inversion of travel times. I. Deep seismic sounding data // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. Amer. 1974. Vol.36. P.377–398
8. Bessonova E.N., Fishman V.M., Shnirman M.G. et al. The tau method for inversion of travel times. II Earthquake data // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. Amer. 1976. Vol.46. P.87–108 .