

III. КАСКАДЫ И САМООРГАНИЗОВАННАЯ КРИТИЧНОСТЬ

УДК 550.311

О КАСКАДНЫХ МЕРАХ МАНДЕЛЬБРОТА, НЕЗАВИСИМЫХ ОТ ПАРАМЕТРА ВЕТВЛЕНИЯ

Г.М. Молчан

Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук, Москва

Каскадные меры Мандельброта возникли из попытки объяснить явление перемежаемости в хорошо развитой турбулентности. Каскадные меры определяются иерархией масштабов с фиксированным коэффициентом ветвления "с" и распределением мультипликативных коэффициентов, отвечающих за перенос энергии по масштабам, от больших к малым. Показано, что меры, отвечающие каскадам как консервативного, так и неконсервативного типов, жестко зависят от параметра c . Более точно, только мера Лебега, за тривиальными исключениями, может порождаться каскадным процессом с произвольным целым c .

MANDELBROT CASCADE MEASURES INDEPENDENT OF BRANCHING PARAMETER

G.M. Molchan

International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow

Mandelbrot cascade measures arose from the desire to explain intermittency in fully developed fully turbulence. They are defined by the scale hierarchy with a fixed branching parameter "c" and by the distribution of breakdown coefficients which are responsible for the transport of energy from larger to smaller scales. We show that the measures corresponding to both conservative and nonconservative cascades strongly depend on the parameter c . In particular, only Lebesgue measure can be generated by a cascade process with an arbitrary integer c .

Введение

Хорошо развитая турбулентность обладает свойством перемежаемости [1]. Для его объяснения были предложены два подхода. Исторически первый из них связан с мультипликативными каскадами [2–4], реализующими идею Ричардсона о переносе энергии в турбулентности по масштабам в направлении от больших к малым в инерционном диапазоне. Второй подход основан на постулате, что поле локальной диссипации энергии является мультифрактальным [1], т.е. существует иерархия подмножеств S_α дробной размерности $f(\alpha)$, где поле имеет показатель Гельдера α . Оба подхода в конечном счете объясняли нелинейность скейлинговых экспонент τ_q для структурных функций поля диссипации ε :

$$\langle [\int_{\Delta} \varepsilon(x) dx]^q \rangle \sim |\Delta|^{\tau_q+1},$$

где $\langle \cdot \rangle$ – осреднение по пространству. (Здесь и далее пространство предполагается одномерным.) Мультифрактальный формализм устанавливал связь обоих подходов между собой (строгие результаты см. в [5]). Математически строгая формализация мультипликативного каскада дана Мандельбротом [4]. Она базируется на двух элементах, отнюдь не бесспорных с физической точки зрения: дискретизация масштабов Δ_n , при которой отношение ” c ” соседних масштабов фиксировано (c – целое число > 1), и предельный переход по Δ_n , $\Delta_n \rightarrow 0$, т.е. зануляется колмогоровский диффузионный масштаб δ .

Каскад реализуется следующим образом: энергия вихря размера L_k передается ” c ” вихрям следующего масштаба L_{k+1} со случайными коэффициентами $\{w_i, i = 1, \dots, c\}$, $E \sum w_i = 1$. Эта операция повторяется итеративно так, что коэффициенты $w_i(L)$, отвечающие разным вихрям, независимы и одинаково распределены. Случай $\sum w_i = 1$ отвечает консервативным каскадам; он реализуется для трехмерной турбулентности [6]. Случай независимых и одинаково распределенных весов w_i , $E c w_i = 1$ принято называть каскадом Мандельброта. Эта модель мотивировалась изучением одно- или двумерных срезов поля диссипированной энергии развитой турбулентности, для которых условие сохранения энергии не выполняется. В дальнейшем физическим пространством $\{x\}$ будет отрезок $[0,1]$. В условиях $E w_* \log_c w_* < 1$, $P(w_* > 0) = 1$ описанный итеративный процесс приводит в пределе (по итерациям) к нетривиальной каскадной мере $\mu(dx)$ на $[0,1]$, (см.[7,8]). Здесь $w_* = w_{i_*} c$, а i_* – случайный индекс, принимающий значения $1, \dots, c$ с равными вероятностями $1/c$. Мера μ рассматривается как идеализированная мо-

дель поля локальной диссипации в турбулентности при больших числах Рейнольдса.

Вопрос о выборе параметра "с" является дискуссионным. Если (l_0, L_0) – инерционный диапазон масштабов, то L_0, l_0 и c связаны соотношением $L_0/l_0 = c^N$, N – целое. В работе [6] для "с" предлагается использовать значение $c = 2$, поскольку уравнение Навье–Стокса содержит нелинейность второго порядка. Напротив, в работах [9–11] дискретность в каскадной динамике рассматривается лишь как вынужденный шаг для описания физического объекта с непрерывным набором масштабов. (Предполагается, что в соотношении $L_0/l_0 = c^N$ левую часть можно заменить любыми масштабами (l_1, L_1) из интервала (l_0, L_0) .) Математическая конструкция, реализующая вторую точку зрения, не приводится. Поэтому, становясь на вторую точку зрения, естественно поставить вопрос в рамках уже имеющейся модели: существуют ли каскадные меры, которые не зависят от параметра "с". Это значит, что каскадная мера может быть реализована каскадным процессом с произвольным параметром $c = 2, 3, \dots$. Ниже дан отрицательный ответ на поставленный вопрос в более сильной форме: достаточно потребовать $c = 2, 3, 5$, чтобы искомая каскадная мера была мерой Лебега. Для каскадов Мандельброта поставленный вопрос рассмотрен ранее автором в [12].

1. Масштабно инвариантные τ -функции

Скейлинговые экспоненты $\tau(q)$ для каскадной меры μ определены следующим образом:

$$\tau(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \sum_i' \mu(\Delta_{in})^q}{\log \Delta_n}, \quad (1)$$

где интервалы Δ_{in} длины $\Delta_n = c^{-n}$ отвечают c -адическому разбиению исходного пространства, а суммирование идет по элементам разбиения с $\mu(\Delta) > 0$. Существует наивный способ вычисления экспонент $\tau(q)$. Для этого в соотношении $\sum_i' \mu(\Delta_{in}) = \langle \mu(\Delta_{in}) \rangle > \Delta_n^{-1}$ пространственное осреднение $\langle \cdot \rangle$ заменяется осреднением по ансамблю (математическим ожиданием E), а мера μ подменяется допредельной мерой μ_n , $n \gg 1$, где n – номер итерации. Этот способ дает τ -функцию вида

$$\tilde{\tau}(q) = q - \log_c E w_*^q - 1 \quad (2)$$

для всех q , при которых моменты конечны. Строгий результат (см. [5]) выглядит иначе:

$$\tau(q) = \begin{cases} \tilde{\tau}(q) & q_- < q < q_+ \\ a_{\pm} q & q/q_{\pm} > 1, \end{cases} \quad (3)$$

где прямые $y = a \pm q$ являются касательными к выпуклой вверх кривой $\tilde{\tau}(q)$, рассматриваемой в области конечных значений, а $1 \leq q_+ \leq \infty$ и $0 \geq q_- \geq -\infty$ являются точками касания. Согласно [13], предел в (3) можно понимать в обычном смысле с вероятностью 1.

Точный результат (3) ведет к монотонной зависимости скейлинговых коэффициентов τ от q и неотрицательным мультифрактальным размерностям меры μ (они задаются преобразованием Лежандра $\tau : \tau^*(\alpha) \geq 0$). Тем самым известные в турбулентности неравенства Новикова для $\tau(q)$ (см. [1]) автоматически выполняются, а критика логнормальной гипотезы Колмогорова теряет свою главную опору (см. [12], где это обстоятельство впервые строго рассмотрено). Более того, оказалось, что эмпирические данные о $\tau(q)$, $q = p/3$, $p = 1, \dots, 18$ [14] находятся в полном согласии с теоретическими расчетами (3) с логнормальной величиной w_* . Согласие достигнуто не за счет подгонки единственного параметра модели, $\tau(q = 2)$ (он взят из тех же данных [14]), а за счет корректного вычисления τ -функции. Таким образом, логнормальная модель по-прежнему достаточна для практического описания эмпирических данных $\tau(q)$.

Тем не менее, это не снимает теоретический вопрос о дискретности каскадных моделей. Мягкая постановка этого вопроса сводится к задаче описания всех τ -функций в каскадных моделях, не зависящих от " c ". Это значит, что τ -функция может быть получена с помощью подходящего каскадного генератора ($w_i, i = 1, \dots, c$) произвольной размерности $c = 2, 3, \dots$. В силу (2),(3) надо описать функции моментов Ew_*^q , $Ew_* = 1$, для которых возможны представления

$$Ew_*^q = (E[w_*(c)]^q)^t, \quad t = \ln 2 / \ln c, \quad c = 3, 4, \dots, \quad (4)$$

где $w_*(c)$ — величина, связанная с каскадным генератором размерности c ; $w_* = w_*(2)$. Полного описания класса таких функций моментов автору неизвестно. Однако, если рассмотреть его подкласс, для которого представление (4) верно для $t = 2, 3, \dots$ (и, как следствие, для всех $t > 0$), то мы придем к мультипликативно безгранично делимым (МБД) случайным величинам w_* . Случайная величина w_* этого типа по определению допускает мультипликативное представление $w_* = \xi_1, \dots, \xi_n$, $\xi_i \geq 0$ с независимыми одинаково распределенными сомножителями при любом n . Класс МБД появился в работах [9, 10] как следствие существования s -независимых каскадных мер. Аналогом Леви–Хинчина–представления для каскадных генераторов МБД типа является следующее:

$$\ln Ew_*^q = \int \ln E\pi_x^q \sigma(dx) \equiv \int (e^{-qx} - qe^{-x} + q - 1) \sigma(dx), \quad (5)$$

где $\ln \pi_x$ — пуассоновская случайная величина на решетке с шагом x , т.е. вероятность $P(\ln \pi_x = xn + b_x) = e(n!)^{-1}$, а b_x определяется нормировкой $E\pi_x = 1$. Здесь $x^2\sigma(dx)$ есть локально конечная мера на прямой $(-\infty, \infty)$, причем $\int (1 - (x+1)e^{-x})\sigma(dx) < 1$. Последнее условие обеспечивает существование нетривиальной каскадной меры. (Вывод (5) см. в [12].)

В работе [11] расширительно трактуются каскадные модели с помощью операций сложения и умножения мультипликативных коэффициентов. В связи с этим, отметим любопытный факт, что существуют случайные величины, которые одновременно являются аддитивно и мультипликативно безгранично делимыми. Таковыми являются, например, величины с логнормальным и гамма-распределениями; они предлагались в турбулентных каскадах неконсервативного типа. Менее известная гамма-модель изучалась в работе [15]; ей отвечает спектральная мера в (5) вида

$$\sigma_\alpha(dx) = e^{-x\alpha}x^{-1}(1 - e^{-x})^{-1}, \quad x > 0, \quad \alpha > \alpha_0(c) > 0. \quad (6)$$

Для описания консервативных турбулентных каскадов использовалась величина w_* с бета-распределением Эйлера [6]. Она тоже относится к МБД-типу с $\sigma(dx) = \sigma_\alpha(dx) - \sigma_\beta(dx)$, $0 < \alpha < \beta < \infty$, где σ_α , σ_β определены в (6).

Итак, класс масштабно инвариантных τ -функций достаточно богат. Отметим, тем не менее, один дефект математического анализа независимых каскадов. Сходимость (3) доказана только для c -адических разбиений физического пространства, где c — точно известный параметр ветвления каскада.

Перейдем к анализу вопроса о существовании c -независимых каскадных мер.

2. Каскадные меры, независящие от параметра ветвления

Следующая Лемма связана с анализом средних каскадных мер, $E\mu(dx)$.

Лемма. Пусть $\xi_c = \sum_{i \geq 1} \varepsilon_i(c)c^{-i}$, где $\varepsilon_i(c)$ — независимые, одинаково распределенные случайные величины со значениями $0, 1, \dots, c-1$. Если ξ_{c_1} и ξ_{c_2} ($c_1 = 2, c_2 = 3$) одинаково распределены, тогда случайная величина ξ_c равномерно распределена в интервале $(0, 1)$, либо принимает с вероятностью единица одно из двух значений: 0 или 1.

Доказательство. Кумулянты $Q_k(\xi)$ случайных величин ξ складываются при сложении независимых случайных величин; кроме того, $Q_k(\lambda\xi) = \lambda^k Q_k(\xi)$, $k > 1$, где $\lambda > 0$. Поэтому

$$Q_k(\xi_c) = \sum_{i \geq 0} Q_k(\varepsilon_i(c) c^{-i}) = Q_k(\varepsilon(c))(c^k - 1)^{-1}.$$

Кумулянты Q_k связаны с моментами m_k по формулам

$$Q_1 = m_1, \quad Q_2 = m_2 - m_1^2, \quad Q_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3.$$

Моменты $\varepsilon_i(c)$, $m_k(c)$ таковы:

$$\begin{aligned} m_k(2) &= p, \quad \text{где } p = P(\varepsilon(2) = 1), \\ m_k(3) &= p_1 + 2^k p_2, \quad \text{где } p_i = P(\varepsilon(3) = i). \end{aligned}$$

Если $\xi_{c_1} \stackrel{d}{=} \xi_{c_2}$ с $c_1 = 2$ и $c_2 = 3$ (здесь и далее $\stackrel{d}{=}$ означает равенство распределений), то

$$Q_k(\varepsilon(3)) = (3^k - 1)(2^k - 1)^{-1} Q_k(\varepsilon(2)).$$

Полагая $k = 1, 2, 3$, получим три уравнения относительно неизвестных p, p_1, p_2 :

$$\begin{aligned} p_1 + 2p_2 &= 2p; \\ p_1 + 4p_2 &= 8/3 \times pq + 4p^2; \\ p_1 + 8p_2 &= 26/7 \times pq(1 - 2p) + 3(2p)(8/3 \times pq + 4p^2) - 2(2p)^3, \end{aligned}$$

где $q = 1 - p$. Сложив эти уравнения с весами 2, -3 и 1, получим уравнение третьей степени по p , которое легко преобразуется к виду $p(1 - p)(1 - 2p) = 0$. Решение $p = 1/2$ ведет к равномерному распределению ξ_c , а $p = 0$ или $p = 1$ — к δ -распределениям, сосредоточенным в $x = 0$ и $x = 1$, соответственно. Лемма доказана. $\diamond$

Следствие. Если каскадная мера μ на $[0, 1]$ может быть получена с параметрами ветвления $c = 2$ и 3, то $\bar{\mu}(dx) = E\mu(x)$ есть мера Лебега, либо $\mu(dx) = \xi\delta(x - x_0)dx$, где $x_0 = 0$ или 1, $\xi > 0$ и $E\xi = 1$.

Доказательство. Если μ порождается генератором $\{w_i(c)\}$, то $\bar{\mu}(dx)$ порождается генератором $\bar{w}_i(c) = Ew_i(c) = p_i(c)$. Это значит, что $\bar{\mu}(dx)$ есть распределение случайной величины ξ_c из Леммы с $p_i(c) = P(\varepsilon(c) = i)$. Согласно Лемме, либо $p_i(c) = 1/c$ (что ведет к мере Лебега), либо $p_0(c) = 1$, либо $p_{c-1}(c) = 1$.

Утверждение. Рассмотрим каскадные меры μ , для которых $P(\mu(\Delta) > 0) = 1$ для любого подынтервала $\Delta \in [0, 1]$ и $EM^2 < \infty$, где $M = \mu[(0, 1)]$ — полная масса μ .

1. Если каскадная мера порождается консервативными каскадами с $c = 2$ и 3, то μ — мера Лебега;

2. Если каскадная мера порождается (не обязательно консервативными) каскадами с $c = 2, 3$ и 5 , тогда μ – мера Лебега.

Доказательство. Изложим основную идею доказательства. Согласно Лемме, средняя мера $\bar{\mu}$ является мерой Лебега, т.е. $E\mu(\Delta) = |\Delta|$ и $Ew_i(c) = 1/c$ для любого генератора меры $\{w_i(c)\}$. Соотношение (4) определяет связь генераторов с различными значениями " c ".

В частности

$$\sum_{i=0}^{c-1} Ew_i^2(c) = \left[\sum_{i=0}^1 Ew_i^2(2) \right]^{\alpha_c}, \quad \alpha_c = \ln c / \ln 2. \quad (7)$$

Поскольку генераторы $\{w_i(c)\}$ неизвестны, за исключением консервативного случая, то соотношение (7) видоизменим следующим образом. Пусть $\Delta_i(c)$ – элементы разбиения $[0, 1] := I$ на c равных частей. Тогда

$$\mu(\Delta_i(c)) \stackrel{d}{=} w_i(c) M_i, \quad i = 1, \dots, c,$$

где M_i – независимые копии полной массы M меры μ и независимые от $\{w_i(c)\}$. Поэтому (7) можно заменить соотношением

$$\sum_{i=0}^{c-1} E\mu^2(\Delta_i(c)) = (x + y)^{\alpha_c} m_2, \quad (8)$$

где $x = Ew_0^2(2)$, $y = Ew_1^2(2)$ и $m_2 = EM^2$.

Мера μ полностью определяется распределением генератора $\{w_0(2), w_1(2)\}$. Поэтому $E\mu^2(\Delta_i(c))$ можно выразить через первые и вторые моменты $\{w_\alpha(2)\}$. Первые моменты $w_\alpha(c)$ известны из Леммы: $Ew_\alpha(c) = 1/c$. Остаются неизвестными x, y и $\rho = Ew_0(2)w_1(2)$ и m_2 . Из равенства

$$M \stackrel{d}{=} \sum_{i=0}^{c-1} w_i(c) M_i,$$

где $\{w_i(c)\}$ и $\{M_i\}$ независимы, $M_i \stackrel{d}{=} M$, следует связь ρ и m_2 :

$$m_2(1 - x - y) = 2\rho. \quad (9)$$

Это соотношение позволяет исключить неизвестное ρ . Но величины $E\mu^2(\Delta_i(c))$ пропорциональны m_2 . В результате уравнение (8) фактически содержит только два неизвестных x и y .

Если каскад консервативный, то $x = y$. В самом деле, в этом случае $w_0(2) + w_1(2) = 1$. Средние значения величин $w_\alpha(1)$ одинаковы, а их дисперсии, в силу указанного тождества, совпадают. Значит совпадают и

вторые моменты величин $w_\alpha(2)$, т.е. $x = y$. Это значит, что в консервативном случае достаточно иметь одно уравнение типа (8) с $c = 3$, а в неконсервативном случае – два с $c = 3$ и $c = 5$.

Итак, надо найти стохастическое представление $\mu(\Delta_i(c))$ через независимые копии генератора $(w_0(2), w_1(2))$.

Пусть Δ_n – диадический подынтервал $(0,1)$ длины 2^{-n} . Будем обозначать его словом $A(\Delta_n) = \sigma_1, \dots, \sigma_n$, $\sigma_i = 0$ или 1 , если $0.\sigma_1 \dots \sigma_n$ – начальная точка интервала Δ_n в диадическом представлении. Из определения независимых каскадов следует, что

$$\mu(\Delta_n) \stackrel{d}{=} w_{\sigma_1} w_{\sigma_1 \sigma_2} \dots w_{\sigma_1, \dots, \sigma_n} M_{\sigma_1, \dots, \sigma_n} := \xi_A M_A, \quad (10)$$

где $w_{\sigma_1, \dots, \sigma_n}$ – независимые величины при разных n и

$$(w_{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, 0}, w_{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, 1}) \stackrel{d}{=} (w_0(2), w_1(2));$$

M_A независимы для разных слов A и $M_A \stackrel{d}{=} M$, M_A и $w_{A'}$ независимы между собой.

Совместное представление $\mu(\Delta_{n_1})$ и $\mu(\Delta_{n_2})$ можно получить так. Пусть $A = A(\Delta_{n_1}) = A_0 A_1$ и $B = A(\Delta_{n_2}) = A_0 A_2$, где A_0 – слово максимальной длины, общее для A и B ; A_1 и A_2 являются продолжениями слова A_0 в словах A и B , соответственно. Тогда

$$\mu(\Delta_{n_1}) = \xi_{A_0} \xi_{A_1} M_A, \quad \mu(\Delta_{n_2}) = \xi_{A_0} \xi_{A_2} M_B, \quad (11)$$

где структура ξ_A описана в (10), $\xi_{A_0}, \xi_{A_1}, \xi_{A_2}, M_A, M_B$ независимы.

Мера μ σ -аддитивна п.н. Поэтому, разлагая произвольный интервал Δ на диадические непересекающиеся интервалы, мы получим стохастическое представление $\mu(\Delta_i(c))$. Рассмотрим случай $c = 3$ детально.

Случай $c = 3$. Пусть (w_0^i, w_1^i) и $(\tilde{w}_0^i, \tilde{w}_1^i)$, $i = 1, 2$ – независимые копии генератора $\{w_0(2), w_1(2)\}$, $\{M^i\}$ – независимые копии M , которые не зависят от $\{w_\alpha^i, \tilde{w}_\alpha^i\}$. Рассмотрим интервалы $\Delta_i = \Delta_i(c = 3)$.

Интервал $\Delta_0 = (0, 1/3)$; двоичное представление $1/3 = 0.(01)$ в виде периодической дроби задает диадическую структуру Δ_0 . Учитывая (10), (11) для $\mu(\Delta_0)$, можно написать стохастическое уравнение

$$\mu(\Delta_0) \stackrel{d}{=} w_0^1 w_0^2 M^1 + w_0^1 w_1^2 T^2[\mu(\Delta_0)], \quad (12)$$

где $\mu(\Delta_0)$ ищется в виде функционала от $\{w_\alpha^i, M^i, i = 1, 2, \dots\}$; T – операция сдвига по верхним индексам: $T w_\alpha^i = w_\alpha^{i+1}$, $T M^i = M^{i+1}$. Искомое представление $\mu(\Delta_0)$ получается итерированием (12), начиная с $\mu(\Delta_0) = 0$. Сходимость п.н. гарантируется общими результатами по каскадам (см. [5]). Из (12) имеем

$$E\mu^2(\Delta_0) = x^2 m_2 + 2x\rho E M^1 E\mu(\Delta_0) + xy E\mu^2(\Delta_0).$$

Здесь мы использовали независимость M^1 и $T^2[w_\alpha^i, M_\alpha^i, i = 1, 2, \dots]$. Подставляя $EM^1 = 1$, $E\mu(\Delta_0) = |\Delta_0| = 1/3$ и $2\rho = (1 - x - y)$, имеем

$$E\mu^2(\Delta_0) = (x^2 + (1 - z)/3)(1 - v)^{-1}m_2, \quad (13)$$

где $z = x + y$, $v = xy$.

Интервал $\Delta_2 = (2/3, 1)$ получается из Δ_0 преобразованием симметрии: если $\Delta = (a, b)$, то $\Delta^c = (1 - b, 1 - a)$, т.е. $\Delta_2 = \Delta_0^c$. Введем операцию $[\]^c$ над базисными величинами w_α^i : $[w_\alpha^i]^c = w_{\alpha^c}^i$, где $\alpha^c = 1 - \alpha$ с $\alpha = 0$ и 1 . Нетрудно понять, что если мы нашли представление $\mu(\Delta)$ через базис $\{w_\alpha^i\}$, то $\mu(\Delta^c) \stackrel{d}{=} [\mu(\Delta)]^c$. Учитывая независимость элементов базиса w_α^i и однородность средних $Ew_\alpha^i = 1/2$, будем иметь $E\mu^2(\Delta^c) = \{E\mu^2(\Delta)\}^c$, где $\{\cdot\}^c$ означает, что неизвестные (x, y) меняются местами: $(x, y) \rightarrow (y, x)$. Поэтому, зная (13), имеем

$$E\mu^2(\Delta_2) = \{E\mu^2(\Delta_0)\}^c = (y^2 + (1 - z)/3)(1 - v)^{-1}m_2. \quad (14)$$

Остается найти $\mu(\Delta_1)$. Имеем $\Delta_1 = (1/3, 1/2) \cup (1/2, 2/3) := \delta^c \cup \delta$, где $\delta = 1/2 + 1/2\Delta_0$. Учитывая описанный формализм, получим

$$\mu(\Delta_1) \stackrel{d}{=} M_0^1 T[\mu(\Delta_0)]^c + M_1^1 T[\tilde{\mu}(\Delta_0)],$$

где $\tilde{\mu}(\Delta_0)$ отвечает представлению $\mu(\Delta_0)$ в базисе $\{\tilde{w}_\alpha^i\}$. Отсюда

$$E\mu^2(\Delta_1) = x\{E\mu^2(\Delta_0)\}^c + yE\mu^2(\Delta_0) + 2\rho[E\mu(\Delta_0)]^2. \quad (15)$$

Остается подставить сюда (13), $E\mu(\Delta_0) = 1/3$ и $2\rho = 1 - z$. Соединяя (13)–(15), после простых преобразований получаем уравнение типа (7):

$$(1 - z)[2/3 \cdot (z + 2)(1 - v)^{-1} - 4/9] = 1 - z^{\alpha_3}, \quad \alpha_3 = \ln 3 / \ln 2, \quad (16)$$

где $z = x + y$, $v = xy$.

Решение $x + y = 1$. Из уравнения (16) следует, что оно имеет очевидное семейство решений $(x, y) : x + y = 1$. С учетом (9) это значит, что

$$E(w_0 + w_1)^2 = 1 = E(w_0 + w_1), \quad Ew_1w_2 = 0, \quad w_i \geq 0.$$

Это возможно, если $w_0 + w_1 = 1$. В силу $w_0w_1 = 0$ и $Ew_i = 1/2$, имеем $P(w_0 = 0, w_1 = 1) = P(w_0 = 1, w_1 = 0) = 1/2$. Такой генератор порождает меру $\mu(dx) = \delta(x - \xi)dx$, где ξ – равномерно распределенная случайная величина на $[0, 1]$. Этот тип мер в утверждении исключен.

Консервативные каскады. Если $x = y$, то уравнение (16) редуцируется к следующему:

$$4/9(2 + x)(1 - x)^{-1} = (1 - (2x)^\alpha)(1 - 2x)^{-1}, \quad 0 < x \leq 1.$$

Здесь мы учли, что $z = 2x \neq 1$. Нетрудно видеть, что это уравнение имеет единственный корень $x = 1/4$, т.е. $Ew_\alpha^2(2) = [Ew_\alpha(2)]^2$. Значит дисперсия $w_\alpha(2)$ равна 0 и $w_0(2) = w_1(2) = 1/2$. Такой генератор порождает меру Лебега. Первая часть утверждения доказана.

Случай $c = 5$. Этот случай рассматривается менее детально, поскольку опирается на технику анализа предыдущего случая, $c = 3$.

Интервал $\Delta_0(c) = (0, 1/5)$, где $1/5 = 0.(0011)$ в двоичном представлении. Аналогом уравнения (12) будет

$$\mu(\Delta_0) \stackrel{d}{=} w_0^1 w_0^2 w_0^3 M^1 + w_0^1 w_0^2 w_1^3 w_0^4 M^2 + w_0^1 w_0^2 w_1^3 w_1^4 T^4[\mu(\Delta_0)].$$

Отсюда

$$\begin{aligned} E\mu^2(\Delta_0) &= (x^3 m_2 + x^3 y m_2 + 2x^2 \rho (EM)^2 Ew_0 + \\ &+ 2x^2 \rho EME\mu(\Delta_0) + 2x^2 y \rho EME\mu(\Delta_0)) \times (1 - x^2 y^2)^{-1}. \end{aligned}$$

Опять учтем, что $EM = 1$, $Ew_0 = 1/2$, $E\mu(\Delta_0) = 1/5$ и $2\rho = 1 - x - y$. Имеем

$$E\mu^2(\Delta_0) = x^2(x + v + (1 - z)(3 + y)/5)(1 - v^2)^{-1} m_2. \quad (17)$$

Интервал

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (1/5, 2/5) = (1/5, 1/4) \cup (1/4, 3/8) \cup (3/8, 2/5) = \\ &= 1/4 \Delta_0^c \cup (1/4, 3/8) \cup (3/8 + 1/8 \Delta_0). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\mu(\Delta_1) \stackrel{d}{=} w_0^1 w_0^2 T^2[\mu(\Delta_0)]^c + w_0^1 w_1^2 \tilde{w}_0^3 \tilde{M}^1 + w_0^1 w_1^2 \tilde{w}_0^3 T^3[\tilde{\mu}(\Delta_0)],$$

где символ " $\sim$ " означает, что используется базис $\{\tilde{w}_\alpha^i, \tilde{M}^i\}$, не зависящий от $\{w_\alpha^i, M^i\}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} E\mu^2(\Delta_1) &= x^2 \{E\mu^2(\Delta_0)\}^c + x^2 y m_2 + x y^2 E\mu^2(\Delta_0) + \\ &+ 2x(1 - z)(3 + 5x)5^{-2} m_2. \end{aligned} \quad (18)$$

Четвертое слагаемое здесь дано уже в преобразованном виде с учетом (9). Интервал $\Delta_2 = (2/5, 3/5) = 1/2 \Delta_0^c \cup (1/2 + 1/2 \Delta_0)$. Поэтому

$$\mu(\Delta_2) \stackrel{d}{=} w_0^1 T[\mu(\Delta_0)]^c + w_0^1 T[\tilde{\mu}(\Delta_0)],$$

что дает

$$E\mu^2(\Delta_2) = x \{E\mu^2(\Delta_0)\}^c + y E\mu^2(\Delta_0) + 2(1 - z)5^{-2} m_2. \quad (19)$$

Интервалы $\Delta_3 = (3/5, 4/5) = \Delta_1^c$, $\Delta_4 = (4/5, 1) = \Delta_0^c$. Поэтому

$$E\mu^2(\Delta_3) = \{E\mu^2(\Delta_1)\}^c \quad \text{и} \quad (20)$$

$$E\mu^2(\Delta_4) = \{E\mu^2(\Delta_0)\}^c.$$

Подставим (17)–(20) в (8). После простой, но требующей внимания алгебры получим второе искомое уравнение

$$\Phi := \frac{z^2 + 4}{1 - v^2} + \frac{3z + 2}{1 - v} - 0.5z^2 - 0.8z + 2v - 3.6 - 2.5 \frac{1 - z^{\alpha_5}}{1 - z} = 0, \quad (21)$$

где $z = x + y$, $v = x \times y$, $\alpha_5 = \ln 5 / \ln 2$.

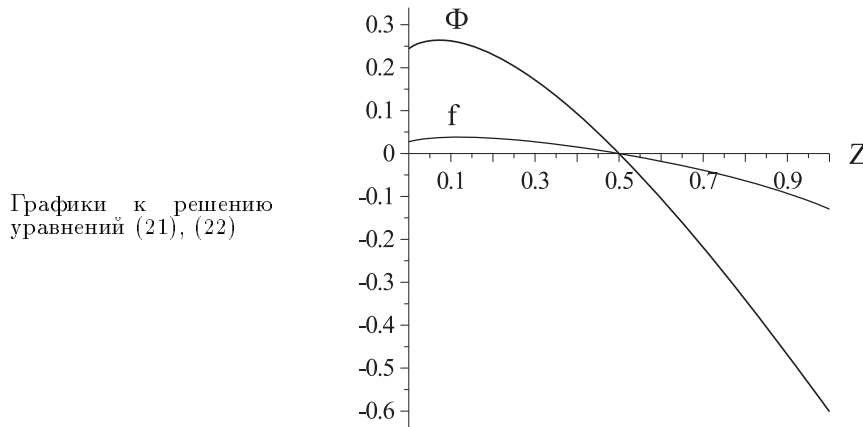
Из уравнения (16) можно явно выразить v через z :

$$1 - v = 2/3 (z + 2)[4/9 + (1 - z^{\alpha_3})/(1 - z)]^{-1}. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (21), получим уравнение на z . Из соотношения

$$E \sum_{i=1}^{c-1} w_i^2(c) = c^{-\tau(2)}$$

и неравенства $\tau(2) > \tau(1) = 0$ следует, что $z = x + y \leq 1$. Левая часть уравнения (21) после учета (22) есть функция $\Phi(z)$; она вместе с $f = \sqrt{v} - 1/4$ представлена на рисунке.



Видно, что $z = 1/2$ есть единственный корень $\Phi(z) = 0$ в интервале $z \in (0, 1)$, при этом $v = xy = 1/16$. Следовательно, $x = y = 1/4$. Как показано выше, это решение ведет к мере Лебега. Доказательство закончено.

Заключение

Представленный результат означает, что мультифрактальная каскадная мера "помнит" размерность своего генератора. В противном случае мера, масса которой имеет второй момент, становится масштабно инвариантной и, следовательно, теряет свойство перемежаемости. Физические рассуждения, игнорирующие этот факт [9–11,16], должны опираться на другие каскадные модели. На языке статистики параметр " ϵ " является мешающим. От него сильно зависит интерпретация результатов проверки статистической зависимости мультипликативных коэффициентов для разных масштабов [6]. Зависимость меры от " ϵ " не может игнорироваться также в дискуссии об универсальности каскадов. Таким образом, независимые каскадные модели становятся достаточно ограничительными, как только мы выходим за рамки качественного объяснения явления перемежаемости. С этой точки зрения объяснение феномена перемежаемости, данное Паризи–Фришем на основе постулата мультифрактальности физического поля, представляется более гибким. Оно оставляет в стороне механизм генерации мультифрактальности, который может иметь разную природу и разную формализацию. Как пример, отметим простейшую модель седиментации в геологии, в которой мультифрактальность порождается отнюдь не мультипликативным процессом [17] и ведет к мультифрактальному спектру верхних показателей Гольдера, далекому от "универсальных" спектров параболического типа, которые повсеместно декларируются в приложениях.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00314) и Международным научно-техническим центром (проект 1293).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Frisch U.* Turbulence: The legacy of A.N.Kolmogorov. Cambridge Univ. Press, 1995. 296 p.
2. *Яглом А.М.* О влиянии флуктуаций диссипации энергии на форму характеристик турбулентности в инерционном интервале // ДАН СССР. 1966. Т.166, N 1. С.49–52
3. *Новиков Е.А., Стюарт Р.У.* Перемежаемость турбулентности и спектр флуктуаций диссипации энергии // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1964. N 3. С.408–413.
4. *Mandelbrot B.* Multiplications aléatoires et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. A. 1974. Vol.278. P.289–355.
5. *Molchan G.M.* Scaling exponents and multifractal dimension for independent random cascades // Commun. Math. Phys. 1996. Vol.179. P.681–702.

6. *Sreenivasan K.R., Stolzovitzky G.* Turbulent cascades // J. Stat. Phys. 1995. Vol.78, N 1/2. P.311–333.
7. *Kahane J.P., Peyriere J.* Sur certaines martingale de B.Mandelbrot // Adv. Math. 1976. Vol.22. P.131.
8. *Holley R., Ligget T.* Generalized potlatch and smoothing processes // Z. Wahr. Verw. Geb. 1981. Vol.55. P.165–195.
9. *Novikov E.A.* Infinitely divisible distributions in turbulence // Phys. Rev. E. 1994. Vol.50. R3303–R3305.
10. *She Z.S., Waymire E.* Quantized energy cascade and log- Poisson statistics in fully developed turbulence // Phys. Rev. Let. 1995. Vol.74, N 2. P.262–265.
11. *Shertzer D., Lovejoy S.* Universal multifractals do exist: comments on "A statistical analysis of mesoscale rainfall as a random cascade" // J. Appl. Meteorol. 1997. Vol.36. P.1296–1303.
12. *Molchan G.* Turbulent cascades: limitations and a statistical test of the lognormal hypothesis // Phys. Fluids. 1977. Vol.9, N 8. P.2387–2396.
13. *Ossiander M., Waymire E.* Statistical estimation for multiplicativ cascades // Ann. Stat. 2000. Vol.28, N 6.
14. *Anselmet F., Gane Y., Hopfinger E., Antonia R.* High-order velocity structure functions in turbulent shear flows // J. Fluid. Mech. 1984. Vol.140, N 63.
15. *Andrews L.C., Phillips R.L., Shivamoggi B.K., Beck J.K., Soshi M.L.* A statictical theory for the distribution of energy dissipation in intermittent turbulence // Phys. Fluids A. 1989. Vol.1, N 6. P.999–1006.
16. *Pedrizzetti G., Novikov E.A., Praskovsky A.A.* Self-similarity and probability distributions of turbulent intermittency // Phys. Rev. E. 1996. Vol.53, N 1. P.475–484.
17. *Molchan G., Turcotte D.* A stochastic model of sedimentation: probabilities and multifractality // Eur. J. Appl. Math. 2002. Vol.20. P.1–13.