

УДК 550.345

**ПОВЕДЕНИЕ ОДНОГО ТИПА МОДЕЛИ SAND-PILE:
ПЕРИОДИЧНОСТЬ И ЕЕ ВЛИЯНИЕ
НА ГРАФИК ПОВТОРЯЕМОСТИ**

И.М. Ротвайн, Н.М. Колесникова, И.В. Ломовской, И.В. Кузнецов

Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук, Москва

Исследован один тип неабелевой модели sand-pile с разными скоростями подтока энергии в ячейки решетки. Доказано, что в модели на торе, независимо от распределения скоростей подтока энергии, всегда существует критическое значение коэффициента диссипации D_{cr} , такое, что при диссипациях, меньших D_{cr} , траектория энергии системы всегда периодична. При этом период этой траектории является функцией диссипации и минимальной скорости подтока энергии в ячейки решетки. Показано, что в модели на решетке с границами при диссипациях, близких к D_{cr} , возникает периодичность сильных модельных событий. Исследован вид графиков повторяемости для разных вариантов модели при различных значениях ее параметров в случае периодического и непериодического поведения системы. Показано, что в случае периодического поведения системы график повторяемости не подчиняется закону Гутенберга–Рихтера, в отличие от случая хаотического поведения системы.

**ONE TYPE OF SAND-PILE MODEL BEHAVIOR:
PERIODICITY AND ITS INFLUENCE ON
MAGNITUDE-FREQUENCY DIAGRAM**

I.M. Rotwain, N.M. Kolesnikova, I.V. Lomovskoy, I.V. Kuznetsov

International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow

We study one type of non-Abelian sand-pile model with different rates of stress flow into lattice cells. If the lattice is defined on torus, the critical value of dissipation D_{cr} is proved to exist such that for dissipations lesser than D_{cr} the stress trajectory of the system is always periodic apart from the stress flow rates distribution. The period of the trajectory is a function of dissipation and a minimum stress flow rate in the system. For the model with open boundary conditions, if dissipation is close to D_{cr} , the strong synthetic events are repeated periodically. The magnitude-frequency diagrams are also studied for different model parameters in cases of periodic or nonperiodic behavior of the system. In case of periodic behavior, the diagram does not correspond to Gutenberg–Richter law, unlike the case of nonperiodic behavior.

Введение

Модель типа *sand-pile* впервые была предложена Баком, Тангом и Визенфельдом [1]. Впоследствии эта модель и ее различные модификации получили широкое распространение и исследовались в значительном числе работ [2–11].

Разные варианты этой модели различаются между собой способами подтока и перераспределения энергии между ячейками решетки [2–11]. В отдельную группу можно выделить детерминированные системы с непрерывным подтоком энергии. Модели такого типа рассматривались в работах [7–11]. Существует еще несколько типов моделей с непрерывным подтоком энергии, по сути, также относящихся к моделям типа *sand-pile* и широко используемых при моделировании сейсмических процессов. К ним относятся различные модификации модели Бариджа–Кнопова [12–15] и блоковая модель динамики литосферы [16].

В работах [8–11] было показано, что в моделях с непрерывным подтоком энергии поведение системы периодически при некоторых значениях ее параметров. Однако возникает вопрос, могут ли в таких моделях существовать области параметров, где график повторяемости для модельных событий линеен, и, в частности, может ли быть график повторяемости линеен в случае периодического поведения модели.

Данная статья является продолжением исследований, начатых в работе [17], где рассматривалось поведение нескольких видов моделей с непрерывным подтоком энергии, скорость которого одинакова для всех ячеек решетки. Были доказаны теоремы о периодичности поведения модели, а также показано, что в случае наличия такого поведения графики повторяемости модельных событий нелинейны.

Здесь рассматривается модель A0 [17,18] с одинаковым для всех ячеек коэффициентом диссипации и с разными скоростями подтока энергии в ячейки. Доказано, что и в этом случае существуют условия, при которых траектория энергии системы периодична. Исследованы условия, при которых в случае неперидической траектории энергии система демонстрирует периодичность сильных событий.

В статье приведены результаты исследований зависимости вида графика повторяемости от наличия или отсутствия в системе периодического поведения. Показано, что если имеет место периодичность траектории энергии системы или сильных событий, то график повторяемости либо не допускает линейной аппроксимации, либо имеет углы наклона, не соответствующие реальной сейсмичности. В случае неперидического поведения системы существует достаточно широкий диапазон параметров модели, при котором графики повторяемости линейны

(т.е. их линейная аппроксимация возможна с малой невязкой), и их углы наклона меняются от 0.65 до 1.4, что соответствует вариации этой величины для реальной сейсмичности [19, 20].

Также показано, что имеется всего два параметра модели – характеристика разброса скоростей подтока энергии по ячейкам решетки и коэффициент диссипации – совместно влияющие как на сам факт существования линейного графика повторяемости, так и на величину его угла наклона.

1. Описание модели

Напомним кратко описание модели A0, приведенное в работах [17, 18].

Рассматривается решетка, состоящая из $N \bullet L$ ячеек. Каждой ячейке i соответствует постоянная скорость подтока энергии $V_i > 0$ и величина энергии $h_i(t) \geq 0$. В начальный момент времени моделирования t_0 каким-либо способом задается начальное состояние системы $h(t_0) = \{h_1(t_0), h_2(t_0), \dots, h_{N \bullet L}(t_0)\}$, причем во всех ячейках энергия меньше единицы. В процессе моделирования в каждую ячейку осуществляется подток энергии с соответствующей скоростью до тех пор, пока величина энергии в какой-либо ячейке j не достигнет единицы. С этого момента начинается *быстрый процесс*, состоящий в следующем:

- для всех ячеек подток энергии прекращается;
- ячейка *рвется*, т.е. ее энергия уменьшается (сбрасывается) до нуля; часть сброшенной энергии $1 - D$ распределяется поровну между четырьмя ячейками, соседними с j ; остаток энергии $h_j - (1 - D)$ диссипирует (здесь и далее D – коэффициент диссипации, $0 < D < 1$). Если в каких-либо ячейках в результате такого распределения величина энергии превысит единицу, эти ячейки, в свою очередь, также рвутся.

Последовательность разрывов ячеек в решетке определяется в соответствии с зафиксированным правилом их просмотра. Быстрый процесс, т.е. разрывы ячеек и соответствующее перераспределение энергии, продолжается до тех пор, пока энергия каждой ячейки решетки не станет меньше единицы. Тогда быстрый процесс прекращается, и возобновляется подток энергии. Предполагается, что каждый быстрый процесс происходит мгновенно, т.е. не имеет длительности во времени.

Рассматривались два варианта быстрого процесса:

- порванная ячейка получает энергию от своих соседей, порвавшихся после нее в том же быстром процессе (модель с *обратным сбросом*);
- порванная ячейка не может получить энергию после своего разрыва в том же быстром процессе (модель *без обратного сброса*), в этом случае энергия, приходящаяся на долю этой ячейки, диссипирует.

Легко показать, что только в случае, когда обратный сброс отсутствует, рассматриваемая модель является абелевой [21], т.е. состояние системы $h = \{h_1, h_2, \dots, h_{N \bullet L}\}$ после окончания быстрого процесса не зависит от порядка просмотра ячеек в быстром процессе.

Краевые условия. Поведение модели существенно зависит от типа ее решетки. В случае решетки с границами имеет место *краевой эффект*, состоящий в следующем. При разрыве граничных ячеек энергия, приходящаяся на долю отсутствующих соседей, диссипирует. Эти ячейки, имея меньшее число соседей, получают меньше дополнительной энергии при ее перераспределении. Таким образом, в случае решетки с границами энергия ячейки зависит от ее расстояния до границы решетки.

В случае решетки на торе краевой эффект отсутствует, так как каждая ячейка имеет четырех соседей.

Модельные события. Подмножество ячеек, порвавшихся в одном и том же быстром процессе, образует *кластер*, если у каждой ячейки этого подмножества есть хотя бы один сосед из того же подмножества и нет соседей, порвавшихся в том же быстром процессе, но не входящих в указанное подмножество. Если у какой-либо порвавшейся ячейки нет соседей, порвавшихся в том же быстром процессе, то она представляет собой *единичный кластер*. Каждый кластер является *модельным событием*.

Результатом моделирования является каталог модельных событий, в котором каждое событие описывается следующими параметрами: время возникновения кластера t ; координаты эпицентра – первой порвавшейся в кластере ячейки; протяженность кластера по длине и ширине; размер события, равный числу ячеек в кластере n_{br} ; величина $M = \lg(n_{br})$ – аналог магнитуды сейсмических событий.

2. Условия периодичности траектории энергии системы

Будем называть изменение состояния системы во времени $\{h_1(t), h_2(t), \dots, h_{N \bullet L}(t)\} = f(t)$ траекторией энергии системы. Эта траектория периодична, если, начиная с некоторого момента времени, для любой ячейки решетки $h_j(t + \omega) = h_j(t)$, где ω – период цикла. В работе [17] была доказана следующая теорема:

Теорема 1. В случае решетки на торе траектория энергии в модели A0 с обратным сбросом является периодической, если скорости потока энергии в разные ячейки решетки одинаковы, т.е.

$$DT_i = DT_j = DT \quad \text{для любых } i \text{ и } j, \text{ где } DT_i = 1/V_i. \quad (1)$$

При этом период цикла будет определяться соотношением

$$\omega = D \bullet DT. \quad (2)$$

Там же с помощью численных экспериментов показано, что при выполнении условия (1) и независимо от типа решетки периодическая траектория энергии системы наблюдается и в модели без обратного сброса. Период цикла при этом равен:

$$\omega = C \bullet DT \bullet (D + (1 - D)/2), \quad (3)$$

где C – некоторый натуральный коэффициент пропорциональности.

Заметим, что в приведенных выше случаях условия возникновения периодического поведения системы не зависели от величины коэффициента диссипации D .

Рассмотрим теперь случай, когда условие (1) не соблюдается, т.е. допускаются $DT_i \neq DT_j$. Введем величину D_{cr} , определяемую из соотношения:

$$\max\{DT_j\} / \min\{DT_j\} = (3D_{cr} + 1) / (4D_{cr}), \quad (4)$$

т.е. $D_{cr} = 1 / (4 \max\{DT_j\} / \min\{DT_j\} - 3)$. Тогда верна следующая теорема.

Теорема 2. В случае модели A0 с обратным сбросом (решетка на торе) при $D < D_{cr}$ всегда найдется такой момент времени t_p , начиная с которого траектория энергии системы становится периодической с длительностью периода

$$\omega = D \bullet \max\{DT_j\}. \quad (5)$$

При этом число событий, возникающих в течение периода цикла, не превышает числа ячеек решетки, в которых $DT = \max\{DT_j\}$.

Доказательство этой теоремы приведено в Приложении. Заметим, что в этой неабелевой модели при $D < D_{cr}$ размеры решетки, распределение скоростей (DT) по ней и правило просмотра ячеек в быстром процессе могут влиять на размеры, локализацию и число событий, возникающих за период цикла, но траектория энергии системы в каждом случае остается периодической.

Численные эксперименты показывают, что при $D \geq D_{cr}$ траектория энергии системы может оставаться периодической, пока значение D не превысит некоторого порога $D_{cr} + \delta$, где значение δ зависит от параметров модели. Рис. 1 иллюстрирует поведение системы при $D < D_{cr}$ и $D > D_{cr} + \delta$.

В случае модели с обратным сбросом (решетка с границами) и без обратного сброса (оба типа решетки) периодическая траектория энергии не наблюдается.

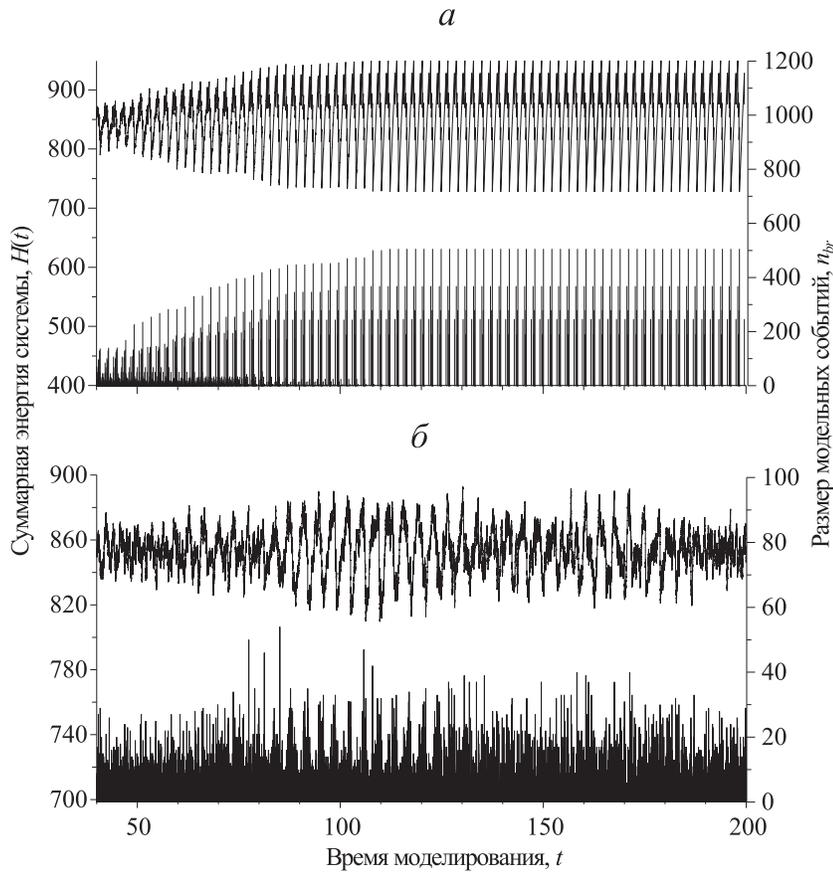


Рис. 1. Зависимость периодичности траектории энергии системы от величины коэффициента диссипации D (модель с обратным сбросом, решетка на торе)

$a - D = 0.15 (D < D_{cr})$, за период цикла возникает семь событий, $\omega = 2.1$;
 $b - D = 0.3 (D > D_{cr})$.

Другие параметры модели: $N = L = 40$; $\max\{DT_j\} = 14$, $\min\{DT_j\} = 7$; число ячеек с $DT_i = \max\{DT_j\}$ равно восьми; $D_{cr} = 0.2$

3. Условия периодичности сильных событий

Естественный интерес представляют условия, при которых траектория энергии системы не является периодической, однако сильные события в системе достаточно часто периодически повторяются.

Мера периодичности сильных событий. Назовем событие сильным, если его магнитуда больше некоторого порога M_0 , который в дальнейшем принимался за 30%-ную границу верхнего квантиля для всех событий рассматриваемого каталога, имеющих $M \geq 1$. Рассмотрим в некотором интервале времени все последовательные сильные события k_1, k_2, \dots, k_n с эпицентром в ячейке j_e . Если

$$t(k_2) - t(k_1) = t(k_3) - t(k_2) = \dots = t(k_n) - t(k_{n-1}),$$

то событие с данным эпицентром повторяется периодически с периодом $\omega_{cl}(j_e) = t(k_2) - t(k_1)$ и числом повторов $n - 1$ в интервале времени $\Delta T = t(k_n) - t(k_1)$. Рассматривались только те интервалы времени, где число повторов не менее, чем n_s (далее $n_s = 10$). Введем меру периодичности системы $\mu = N_{cl}/N_{str}$, где N_{cl} – суммарное число повторов сильных событий в рассматриваемых интервалах времени по всей решетке, а N_{str} – общее число всех сильных событий в системе за весь период моделирования.

Типы периодичности сильных событий. Ниже приведены результаты численного моделирования для модели с обратным сбросом (решетка с границами), позволяющие проанализировать условия возникновения периодичности сильных событий и определить период ω_{cl} в каждом таком случае. Далее мы будем рассматривать поведение модели при случайном и равномерном распределении DT_j по ячейкам решетки со средним DT_{av} и отклонением $\Delta_u = (\max\{DT_j\} - \min\{DT_j\})/DT_{av}$.

В работе [17] было показано, что для такой модели при выполнении условия (1) ($DT_i = DT_j = DT$), независимо от значений ее параметров, сильные события возникают периодически с периодом

$$\omega_{cl} = DT \bullet (D + (1 - D)/4). \quad (6)$$

Эти события локализованы только на границах решетки, т.е. первая рвущаяся ячейка (эпицентр) в каждом периодически повторяющемся кластере является граничной (периодичность *первого типа*).

Если условие (1) не выполнено, то периодичность первого типа сохраняется только при малых значениях Δ_u (рис. 2). Тогда период цикла для каждого кластера с эпицентром в ячейке j_e составляет

$$\omega_{cl}(j_e) = DT_{j_e} \bullet (D + (1 - D)/4), \quad (7)$$

а эпицентрами повторяющихся событий являются ячейки с относительно малыми DT_j .

Модель с обратным сбросом (решетка с границами) демонстрирует также периодичность сильных событий *второго типа*, при которой эпицентры повторяющихся событий никогда не локализованы на границах решетки. В этом случае

$$\omega_{cl}(j_e) = DT_{j_e} D.$$

Периодичность второго типа наблюдается в интервале значений: $D_{cr} - \delta_1 \leq D \leq D_{cr} + \delta_2$, где D_{cr} определяется из условия (4). При этом скорости подтока энергии у всех эпицентров повторяющихся событий

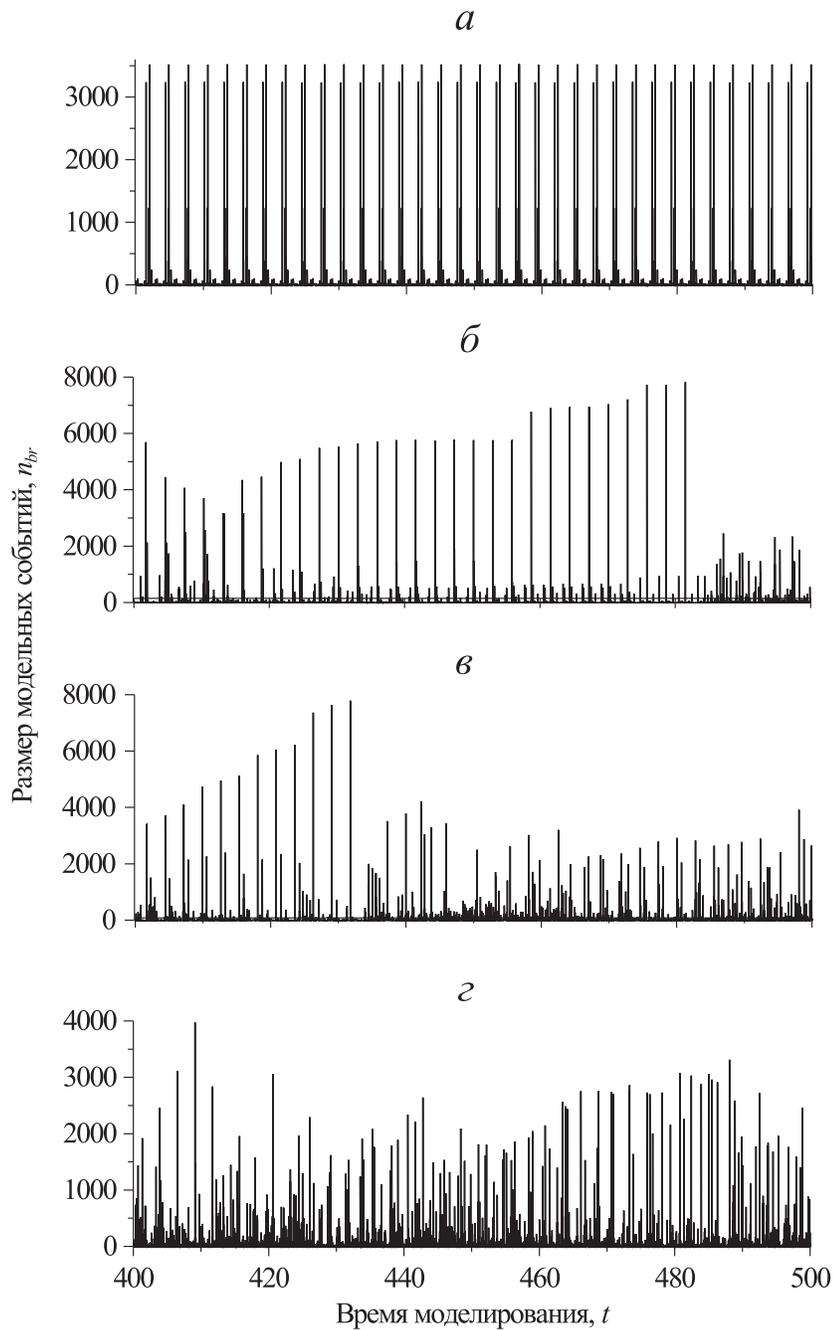


Рис. 2. Зависимость периодичности сильных событий первого типа от величины отклонения Δ_u (модель с обратным сбросом, решетка с границами)

$a - \Delta_u = 0$; $б - \Delta_u = 0.02$; $в - \Delta_u = 0.1$; $г - \Delta_u = 0.2$.

Другие параметры модели: $N = L = 100$; $DT_{av} = 10$, $D = 0.05$

близки к $\max\{DT_j\}$, и значение $\omega_{cl}(j_e)$ близко к величине ω , полученной для модели с решеткой на торе (см.(5)).

Поведение системы, демонстрирующее периодичность второго типа при разных величинах D , сравнивается на рис. 3.

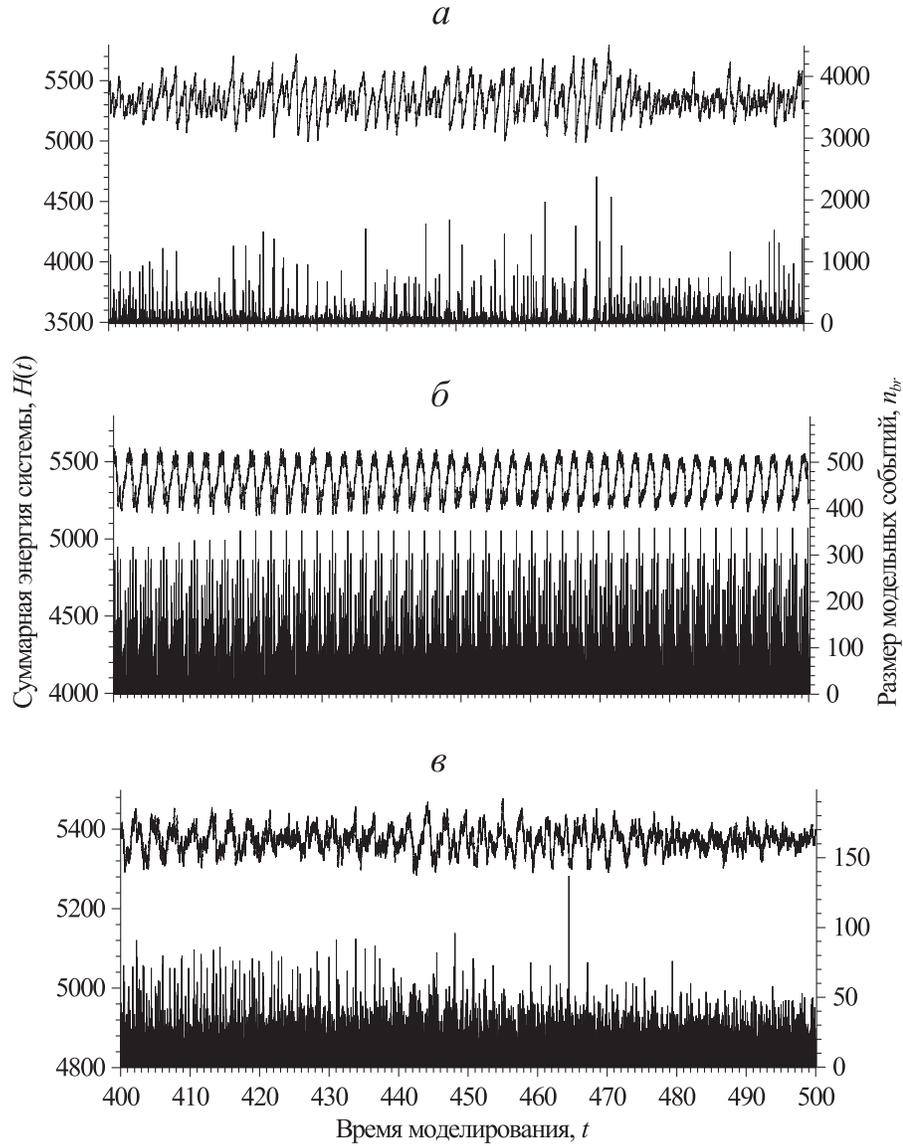


Рис. 3. Зависимость периодичности сильных событий второго типа от величины коэффициента диссипации D (модель с обратным сбросом, решетка с границами)
a - $D = 0.1 (D < D_{cr})$; *б* - $D = 0.158 (D = D_{cr})$; *в* - $D = 0.2 (D > D_{cr})$.
 Другие параметры модели: $N = L = 100$; $DT_{av} = 10$, $\Delta_u = 0.8$

Для более подробного изучения периодичности сильных событий использовалась величина $\mu = N_{cl}/N_{str}$. Число N_{cl} подсчитывалось отдельно для событий с граничными и неграничными эпицентрами, что соответствует значениям μ_1 и μ_2 для периодичности первого и второго типа, соответственно. На рис. 4 показана зависимость μ_2 от величины $(D - D_{cr})$ при разных значениях Δ_u , на рис. 5 – зависимость μ_1 и μ_2 от $(D - D_{cr})$, причем на рис. 5 показаны значения μ при $D \leq D_{cr}$, так как D_{cr} велико при малых значениях Δ_u , и при $D > D_{cr}$ максимальный размер события слишком мал.

Рис. 4. Зависимость μ (периодичность сильных событий второго типа) от величины $(D - D_{cr})$ (модель с обратным сбросом, решетка с границами)

Параметры модели: $N=L=100$; $DT_{av} = 10$. Пунктирная линия соответствует значению $D = D_{cr}$

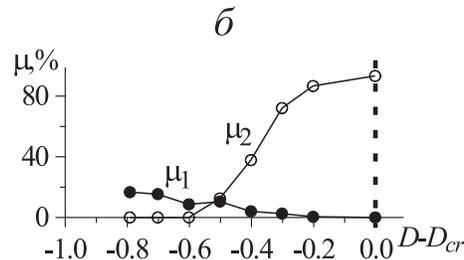
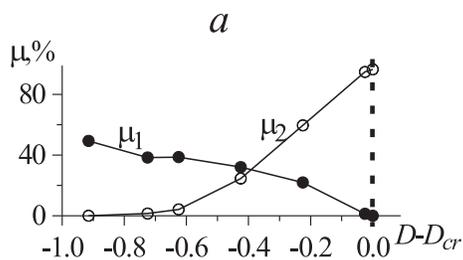
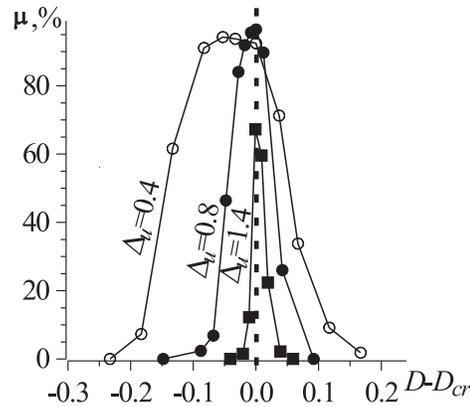
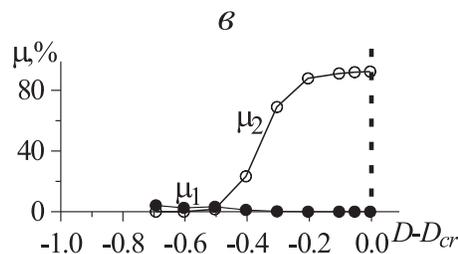


Рис. 5. Зависимость μ от величины $(D - D_{cr})$ (модель с обратным сбросом, решетка с границами)

$a - \Delta_u = 0.02$; $b - \Delta_u = 0.06$;
 $в - \Delta_u = 0.1$.

Другие параметры модели: $N = L = 100$; $DT_{av} = 10$. Пунктирная линия соответствует значению $D = D_{cr}$



Как видно из рис. 4, при достаточно больших значениях Δ_u в системе наблюдается только периодичность второго типа ($\mu_1 = 0$), причем интервал ее существования тем уже, чем больше Δ_u , а ее интенсивность с ростом Δ_u уменьшается. При малых значениях Δ_u (рис. 5) существует также периодичность первого типа, и она тем слабее выражена, чем больше Δ_u . Видно, что периодичность первого типа (в отличие от периодичности второго типа, сильно зависящей от D) имеет примерно постоянный уровень до некоторого значения D , а потом исчезает. В целом, периодичность первого типа слабее периодичности второго типа.

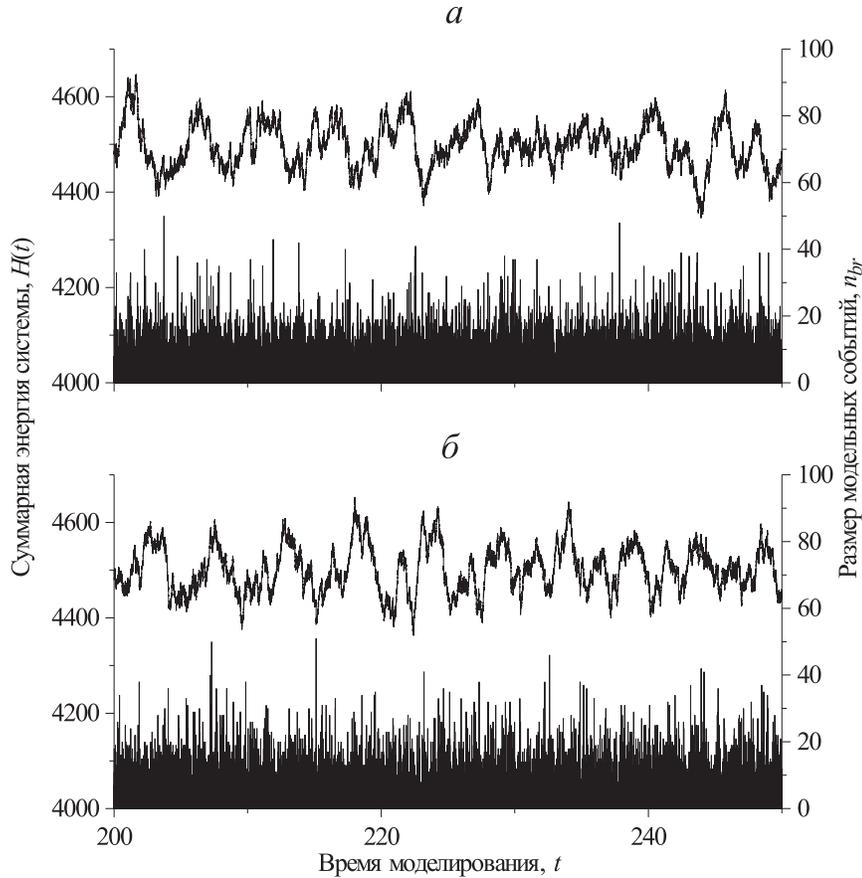


Рис. 6. Поведение модели без обратного сброса
а – решетка на торе; *б* – решетка с границами. Параметры модели:
 $N = L = 100$; $DT_{av} = 10$, $\Delta_u = 0.2$, $D = 0.05$

Для модели A0 без обратного сброса независимо от типа решетки при невыполнении условия (1) периодичности сильных событий не наблюдалось (рис. 6).

4. График повторяемости для модельных событий

Одним из общепринятых критериев адекватности модели и реальной сейсмичности является соответствие графика повторяемости для модельных событий закону Гутенберга–Рихтера для каталогов землетрясений [22]. Другими словами, график повторяемости $\lg N(M) = -bM + a$ должен быть линейен в достаточно широком интервале магнитуд, причем величина b ограничена значениями $0.65 \leq b \leq 1.4$ [19, 20].

Будем считать этот график линейным, если он допускает линейную аппроксимацию методом наименьших квадратов в интервале магнитуд $[M_1, (M_{\max} - \Delta m)]$, при условии, что величина этого интервала не менее некоторого ΔM . Величины M_1 , Δm и ΔM выбирались, исходя из следующих соображений.

Графики повторяемости, типичные для каталогов, порождаемых моделью A0, имеют загиб вниз в области больших магнитуд (рис.7), и величина $\Delta m = 0.6$ достаточна для исключения этого загиба. Кроме того, эти графики имеют загиб вниз в области малых магнитуд, поэтому рассматривались только события с $M \geq M_1 = 1$ ($n_{br} \geq 10$). Графики строились с шагом 0.2 по M , и для определения величины b принимались минимально необходимыми четыре точки, что определило выбор $\Delta M = 0.6$.

Хотя здесь используется достаточно грубая методика определения величины b , ее точности вполне достаточно для данного исследования.

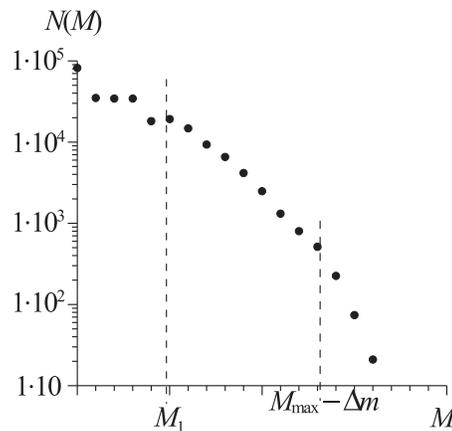


Рис. 7. К выбору интервала магнитуд для подсчета величины b графика повторяемости

Естественно, что начальный период моделирования может существенно влиять на величину b . Поэтому разобьем весь период моделирования на достаточно большие непересекающиеся интервалы и вычислим величину b для каждого из них. Будем считать, что процесс стал стационарным, когда эта величина начинает колебаться около некоторого

среднего значения (рис. 8), т.е. для решетки с $N = 100, L = 100$ разброс этой величины для трех последовательных субкаталогов составляет не более 0.05 при условии, что для построения графика использовались субкаталоги, содержащие не менее 5 000 событий с $M \geq 1$.

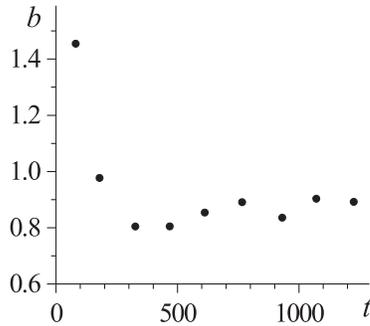


Рис. 8. Изменение величины b в зависимости от длительности моделирования t . Модель с обратным сбросом (решетка с границами).

Параметры модели: $N = L = 100$; $DT_{av} = 10$, $\Delta_u = 0.1$, $D = 0.25$. Величина b вычислялась для последовательных субкаталогов, состоящих из 5 000 событий с $M \geq 1$ ($n_{br} \geq 10$)

5. Графики повторяемости для систем с периодическим поведением траектории энергии или сильных событий

В работе [17] было показано, что для модели A0 с обратным сбросом (решетка на торе) и без обратного сброса (оба типа решетки) при равных скоростях подтока энергии (условие (1)) графики нелинейны.

Теперь рассмотрим поведение графика повторяемости для модели A0 с обратным сбросом (решетка на торе), в которой скорости подтока

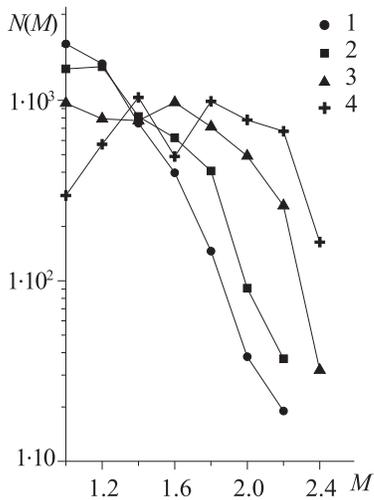


Рис.9. График повторяемости в модели с обратным сбросом (решетка на торе) для субкаталогов событий с $M \geq 1$ в зависимости от периодов моделирования

1 – 0–5000 событий; 2 – 5000–10 000 событий; 3 – 20 000–25 000 событий; 4 – 35 000–40 000 событий.

Параметры модели: $N = L = 100$; $DT_{av} = 10$, $\Delta_u = 0.8$, $D = 0.05$, $D_{cr} = 0.158$

энергии в разные ячейки могут различаться, при $D < D_{cr}$. Как видно из рис. 9, угол наклона графика уменьшается с увеличением времени моделирования, а затем график перестает быть линейным. Изменение параметров этой модели не влияет на описанный эффект.

Рассматривались также графики повторяемости для системы с периодичностью сильных событий как первого, так и второго типа. На рис. 10,а показано, как меняется график в зависимости от коэффициента диссипации в системе с периодичностью первого типа ($\Delta_u = 0.02$). График имеет слишком маленький угол наклона ($b \approx 0.6$), и его вид не зависит от D , пока μ достаточно велико. Однако, когда периодичность первого типа слабеет и появляется периодичность второго типа, вид графика меняется, — он перестает быть линейным. Таким образом, при

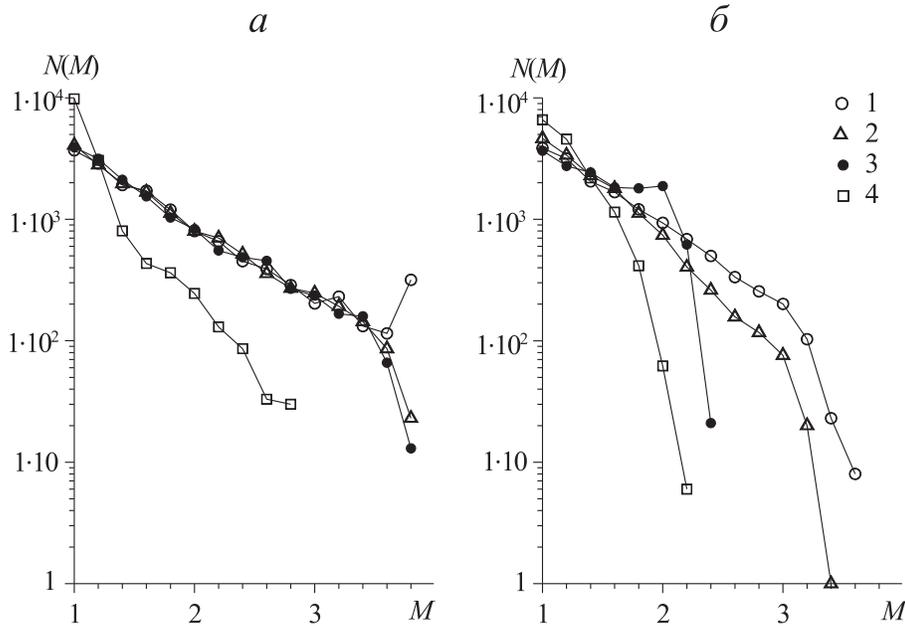


Рис. 10. Графики повторяемости для системы с периодичностью событий первого (а) и второго (б) типа при четырех значениях D (модель с обратным сбросом, решетка с границами)

а — $\Delta_u = 0.02$: 1 — $D = 0.01$ ($\mu_1 = 49.33\%$), 2 — $D = 0.2$ ($\mu_1 = 38.93\%$), 3 — $D = 0.3$ ($\mu_1 = 38.67\%$), 4 — $D = 0.7$ ($\mu_1 = 21.95\%$, $\mu_2 = 59.61\%$) ($D_{cr} = 0.925$);
 б — $\Delta_u = 0.8$: 1 — $D = 0.01$ ($\mu_2 = 0\%$), 2 — $D = 0.09$ ($\mu_2 = 6.85\%$), 3 — $D = 0.158$ ($\mu_2 = 96.48\%$), 4 — $D = 0.19$ ($\mu_2 = 45.62\%$) ($D_{cr} = 0.158$).

Другие параметры модели: $N = L = 100$; $DT_{av} = 10$

достаточно высоком уровне периодичности первого типа в системе график повторяемости не соответствует закону Гутенберга–Рихтера.

Несколько иное поведение график имеет в области параметров модели, где наблюдается периодичность второго типа. На рис. 10,б показано, как зависит вид графика от D при $\Delta_u = 0.8$. При относительно малых значениях D (что соответствует малым величинам μ) график линейен и имеет допустимое значение угла наклона, причем величина b медленно растет с ростом коэффициента диссипации. Однако в области

$D \approx D_{cr}$, где μ велико, график имеет слишком маленький угол наклона и значительно хуже аппроксимируется прямой, а при дальнейшем увеличении D (уменьшении μ) угол наклона графика вновь возрастает и находится в допустимых пределах, но хуже, чем в области малых диссипаций, аппроксимируется прямой.

Таким образом, можно сделать следующий качественный вывод: Если в системе наблюдается периодичность траектории энергии или достаточно высокий уровень периодичности сильных событий, график повторяемости модельных событий нелинеен или имеет слишком маленький угол наклона.

6. График повторяемости для систем с неперiodическим поведением

Для модели с обратным сбросом (решетка с границами) область существования линейного графика с углом наклона в допустимых пределах на плоскости (D, Δ_u) показана на рис. 11. Видно, что в этой модели можно выделить достаточно широкий диапазон параметров, при которых график соответствует закону Гутенберга–Рихтера.

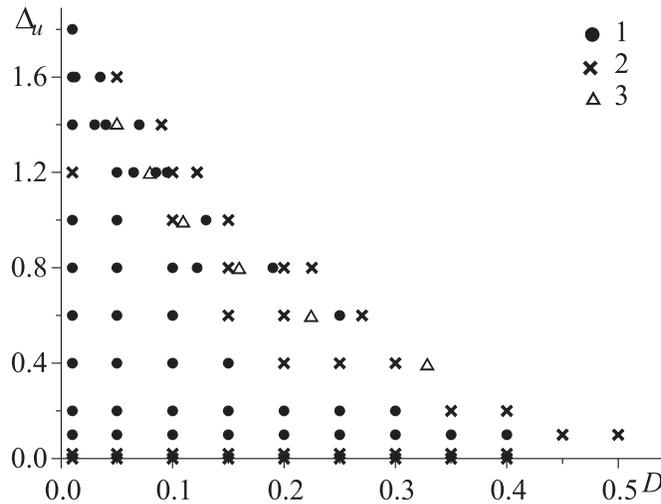


Рис. 11. Область существования графика повторяемости, соответствующего закону Гутенберга–Рихтера (модель с обратным сбросом, решетка с границами)

1 – график соответствует закону Гутенберга–Рихтера; 2 – график не соответствует закону Гутенберга–Рихтера; 3 – окрестность D_{cr} , график не соответствует закону Гутенберга–Рихтера.

Параметры модели: $N = L = 100$; $DT_{av} = 10$

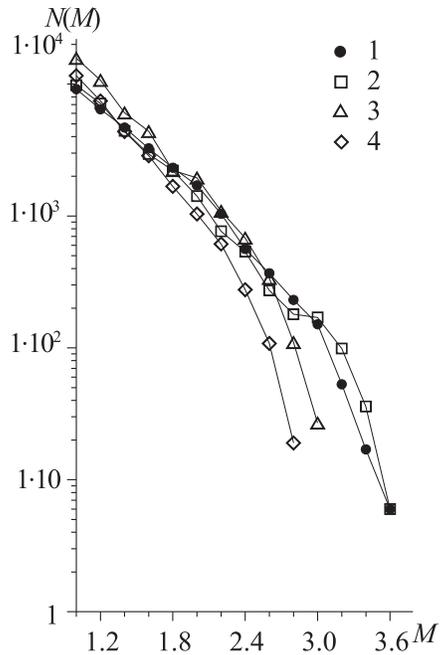


Рис. 12. Влияние размеров решетки на график повторяемости (модель с обратным сбросом, решетка с границами)

1 – $N = L = 150$; 2 – $N = L = 100$;
3 – $N = L = 70$; 4 – $N = L = 40$.
Другие параметры модели: $DT_{av} = 10$,
 $\Delta_u = 0.2$, $D = 0.225$

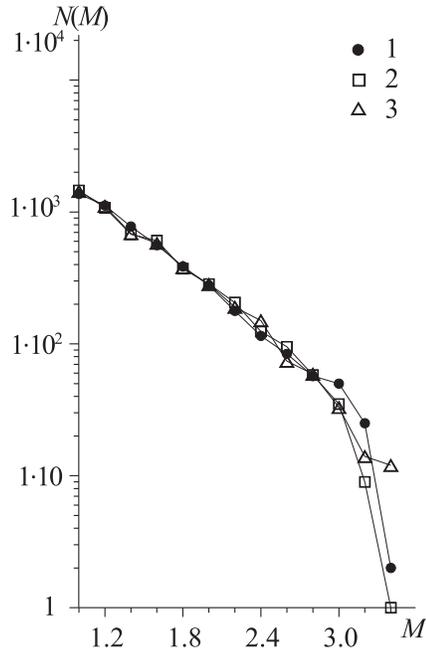


Рис. 13. Влияние начального состояния системы на график повторяемости (модель с обратным сбросом, решетка с границами)

1 – нулевое начальное состояние системы; 2, 3 – разные варианты случайного начального состояния.

Параметры модели: $N = L = 100$,
 $DT_{av} = 10$, $\Delta_u = 0.8$, $D = 0.05$

Для той же модели сравниваются графики повторяемости при разных размерах решетки модели (рис. 12) и при разных начальных состояниях системы (рис. 13). Из рис. 12,13 видно, что начальное состояние системы и размеры решетки не оказывают решающего влияния на линейность графика и величину b .

Как было показано выше (рис. 10,б), при $D < D_{cr}$ (в области малых значений μ) величина b медленно растет с ростом коэффициента диссипации. Интересно также посмотреть, как меняется вид графика при изменении значения Δ_u . Однако сравнивать графики при разных Δ_u и одном и том же значении D бессмысленно, потому что это значение D может оказаться больше или меньше D_{cr} (так как D_{cr} зависит от Δ_u) и ему могут соответствовать разные уровни периодичности сильных событий. Поэтому кажется целесообразным сравнивать графики повторяемости для системы с примерно одинаковым значением μ . Графики с

$\mu_2 = 26 - 30\%$ (при $D < D_{cr}$) и разными значениями Δ_u приведены на рис. 14. Видно, что величина Δ_u не оказывает существенного влияния на вид графика.

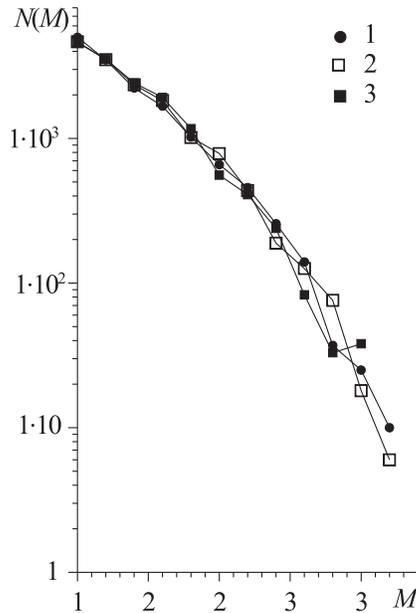


Рис. 14. Влияние величины Δ_u на график повторяемости в системах с одинаковым уровнем периодичности сильных событий

1 - $\Delta_u=0.4$, $D=0.18$ ($\mu_2=30.16\%$);
 2 - $\Delta_u = 0.8$, $D = 0.1$ ($\mu_2 = 28.7\%$);
 3 - $\Delta_u = 1.4$, $D = 0.042$ ($\mu_2 = 26.4\%$).
 Другие параметры модели: $N=L=100$; $DT_{av} = 10$

Таким образом, можно сделать следующий вывод: В модели A0 с обратным сбросом (решетка с границами) существует достаточно широкая область параметров модели, при которых график линеен с углом наклона в допустимых пределах. Вид графика определяется коэффициентом диссипации и уровнем периодичности сильных событий в системе.

Естественно, приведенные графики не являются точным доказательством этого вывода. Однако ни один из результатов многочисленных контрольных экспериментов, в которых параметры модели варьировались в достаточно широком диапазоне значений, не противоречит сделанному выводу.

Данный вывод не может быть распространен на случай непериодического поведения модели A0 без обратного сброса (оба типа решетки) или модели с обратным сбросом (решетка на торе) ($D > D_{cr} + \delta$). В этих вариантах диапазон магнитуд, где можно рассматривать график повторяемости, настолько мал даже при малых коэффициентах диссипации (см. рис. 6), что сделать надежные выводы о существовании удовлетворительного графика сложно.

Заключение

Рассмотрена модель A0, являющаяся вариантом неконсервативной детерминированной модели с непрерывным подтоком энергии. В этой модели величина энергии в ячейке после ее разрыва уменьшается до нуля; между четырьмя соседями порванной ячейки распределяется постоянная величина энергии. Модель рассматривалась как на торе, так и на решетке с границами при отсутствии обратного сброса энергии (абелева модель) и при его наличии (неабелева модель).

Изучалась периодичность траектории энергии системы и периодичность сильных событий, порождаемых моделью. Сформулировано, в каких вариантах и при каких параметрах модели ее поведение становится периодическим. Доказана теорема о периодичности траектории энергии системы в модели с обратным сбросом (решетка на торе) при $D < D_{cr}$. Показано, что в случае модели с обратным сбросом (решетка с границами) можно выделить области параметров (D, Δ_u) , в которых наблюдается периодичность возникновения сильных событий первого типа (эпицентры сильных событий локализованы на границе решетки) и второго (эпицентры не локализованы на границе решетки).

Показано также, что при периодичности траектории энергии системы (модель с обратным сбросом, решетка на торе) или при достаточно высоком уровне периодичности сильных событий (модель с обратным сбросом, решетка с границами) график повторяемости нелинеен или имеет слишком маленький угол наклона.

В случае непериодического поведения траектории энергии и слабой периодичности сильных событий в системе существует достаточно широкий диапазон параметров модели, при котором график повторяемости соответствует закону Гутенберга–Рихтера. Границы этой области и вид графика зависят от коэффициента диссипации и уровня периодичности, который, в свою очередь, определяется величинами D и Δ_u , где Δ_u характеризует распределение скоростей подтока энергии в ячейки решетки.

Таким образом, D и Δ_u являются параметрами, определяющими поведение данной модели.

Попытка прогноза поведения этой модели с помощью восстановления величин коэффициента диссипации и скоростей подтока энергии в ячейки решетки сделана в работе [23].

Приложение Доказательство Теоремы 2

Теорема 2. В случае модели A0 с обратным сбросом (решетка на торе) при $D < D_{cr}$, т.е. если выполнено условие:

$$\max\{DT_j\} / \min\{DT_j\} < (3D + 1)/(4D),$$

всегда найдется такой момент времени t_p , начиная с которого траектория энергии системы становится периодической. Длительность периода определяется формулой:

$$\omega = D \bullet \max\{DT_j\}.$$

При этом число событий, возникающих в течение периода цикла, не превышает числа ячеек решетки, в которых $DT = \max\{DT_j\}$.

Для доказательства Теоремы 2 приведем несколько лемм, описывающих поведение рассматриваемой модели.

Обозначения. Прежде всего, следует отметить, что, хотя быстрый процесс не имеет длительности по времени, он, тем не менее, упорядочен по моментам разрывов ячеек. Введем следующее обозначение. Пусть в быстром процессе, который происходил в момент времени t , последовательно рвались ячейки i_1, i_2, \dots, i_n . Тогда обозначим моменты их разрывов в быстром процессе как $T_{i_1}, T_{i_2}, \dots, T_{i_n}$, причем каждому из этих моментов разрывов будет соответствовать один и тот же момент времени t . Здесь и далее моменты разрывов ячеек в быстром процессе обозначаются буквой T , в отличие от моментов времени, которые обозначены буквой t .

Пусть ячейка i_1 порвалась в момент времени t_1 , и момент ее разрыва в этом быстром процессе T_{i_1} , а ячейка i_2 порвалась в момент времени $t_2 \geq t_1$, и момент ее разрыва в быстром процессе T_{i_2} . Будем говорить, что $T_{i_1} < T_{i_2}$, если либо $t_1 < t_2$, либо $t_2 = t_1$ и ячейка i_1 порвалась раньше ячейки i_2 в быстром процессе.

Лемма 1. Пусть t_b – момент времени, раньше которого каждая ячейка решетки порвалась хотя бы один раз, и $t \geq t_b$. Тогда в течение любого полуинтервала времени $]t, t + D \bullet \max\{DT_j\}]$ каждая ячейка решетки порвется хотя бы один раз.

Доказательство. Предположим обратное, т.е. имеются ячейки j_1, j_2, \dots, j_k , которые в течение времени $]t, t + D \bullet \max\{DT_j\}]$ не порвались. Обозначим через $T_{j_1}, T_{j_2}, \dots, T_{j_k}$ моменты их последних разрывов перед началом указанного интервала. Выберем из них ячейку i , у которой $T_i = \min\{T_{j_1}, T_{j_2}, \dots, T_{j_k}\}$. Пусть моменту разрыва T_i соответствует время $t_i \leq t$. Очевидно, что все соседи ячейки i обязательно порвутся хотя бы один раз за время $[t_i, t + D \bullet \max\{DT_j\}]$.

Для ячейки i верно соотношение:

$$h_i(t + D \bullet \max\{DT_j\}) = h_i(t_i) + h_{fl} + h_n,$$

где $h_i(t_i)$ – энергия ячейки i после ее разрыва в момент T_i ; h_{fl} – энергия, полученная ячейкой i за счет подтока со скоростью $1/DT_i$ за время $[t_i, t + D \bullet \max\{DT_j\}]$; h_n – энергия, которую ячейка i получила от соседей за то же время.

Согласно определению модели, $h_i(t_i) = 0$; $h_{fl} = (t - t_i)/DT_i + D \bullet \max\{DT_j\}/DT_i$, следовательно, $h_{fl} \geq D$; а $h_n \geq (1 - D)$, так как за рассматриваемый интервал времени все соседи ячейки i порвутся хотя бы один раз.

Следовательно, $h_i(t + D \bullet \max\{DT_j\}) \geq 1$ и ячейка i должна была порваться за время $]t, t + D \bullet \max\{DT_j\}]$, что противоречит исходному предположению. Таким образом, Лемма 1 доказана.

Будем далее рассматривать лишь время, большее t_b .

Лемма 2. Между двумя последовательными разрывами любой ячейки решетки все ее соседи порвутся один и только один раз.

Доказательство. Обозначим через T_1 и T_2 последовательные моменты разрывов некоторой ячейки i (соответствующие моменты времени t_1 и t_2), а через n_{nb} – число ее соседей, порвавшихся между T_1 и T_2 . Тогда энергия ячейки i перед ее разрывом T_2 определяется как

$$h_i(T_2) = (t_2 - t_1)/DT_i + n_{nb}(1 - D)/4.$$

Из Леммы 1 следует, что $(t_2 - t_1) \leq D \bullet \max\{DT_j\}$, т.е. $(t_2 - t_1)/DT_i \leq D \bullet \max\{DT_j\}/DT_i$. Так как всегда $\max\{DT_j\}/DT_i < (3D + 1)/(4D)$, то $(t_2 - t_1)/DT_i < (3D + 1)/4$. Тогда, если $n_{nb} < 4$, то $h_i(T_2) < 1$, т.е. ячейка i не могла порваться в момент T_2 , поэтому $n_{nb} \geq 4$.

Докажем теперь, что между T_1 и T_2 никто из соседей ячейки i не порвался больше одного раза. Предположим, у ячейки i найдутся соседи, порвавшиеся более одного раза между T_1 и T_2 . Выберем среди них такую ячейку k_1 , которая первой порвалась второй раз за указанный период. Так как для любой ячейки $n_{nb} \geq 4$, то у ячейки k_1 , в свою очередь, есть сосед k_2 , который порвался между двумя последовательными разрывами ячейки k_1 и, следовательно, между двумя последовательными разрывами ячейки i , и т.д. Таким образом, существует конечная последовательность ячеек k_1, k_2, \dots, k_j , в которой каждая ячейка рвется дважды между T_1 и T_2 и хотя бы один из ее соседей ни разу не рвался между двумя ее последовательными разрывами. Тогда первая, порвавшаяся дважды, ячейка из этого множества получила энергию не более, чем от трех соседей между двумя своими последовательными разрывами, что невозможно. Лемма 2 доказана.

Следствие. Из Леммы 2 следует, что никакая ячейка не может порваться более одного раза в течение одного быстрого процесса. Действительно, пусть это не так, и T_1 и T_2 – моменты последовательных разрывов ячейки i в одном и том же быстром процессе. Тогда к моменту T_2 ячейка i наберет энергию $h_i(T_2) = 1 - D$, т.е. $h_i(T_2) < 1$, что невозможно.

Назовем ячейку данного кластера *начальной*, если она не имеет в этом кластере соседей, порвавшихся до нее в быстром процессе образования этого кластера. Каждой начальной ячейке соответствует *исходное* подмножество ячеек из данного кластера, в котором каждая из них, кроме начальной, имеет хотя бы одного соседа из данного подмножества, порвавшегося раньше нее в быстром процессе образования этого кластера.

Очевидно, что для каждой начальной ячейки в кластере существует одно и только одно исходное подмножество, отвечающее такому определению. Число исходных подмножеств равно числу начальных ячеек в кластере, одна из которых является эпицентром кластера. Исходные подмножества одного кластера всегда пересекаются. Исходное подмножество с начальной ячейкой, у которой $DT = \max\{DT_j\}$, будем называть *максимальным*.

Лемма 3. Любое исходное подмножество обладает следующим свойством: предыдущий разрыв его начальной ячейки происходит раньше, чем предыдущий разрыв каждой из остальных ячеек этого подмножества.

Более точно это можно сформулировать следующим образом. Рассмотрим исходное подмножество Ω , возникшее в момент времени t_Ω . Пусть Ω состоит из ячеек $a_\Omega, j_1, j_2, \dots, j_k$, где a_Ω – начальная ячейка. Обозначим через $T_a, T_{j_1}, T_{j_2}, \dots, T_{j_k}$, соответственно, моменты предыдущих перед t_Ω разрывов этих ячеек. Тогда, $T_a = \min\{T_a, T_{j_1}, T_{j_2}, \dots, T_{j_k}\}$.

Доказательство. Предположим, что это утверждение неверно и $T_{j_b} = \min\{T_a, T_{j_1}, T_{j_2}, \dots, T_{j_k}\}$ – момент предыдущего перед t_Ω разрыва ячейки $j_b \neq a$. Согласно определению исходного подмножества, у ячейки j_b есть хотя бы один сосед j_c , порвавшийся раньше нее в быстром процессе t_Ω . Следовательно, ячейка j_c порвалась дважды между двумя последовательными разрывами ячейки j_b , что противоречит Лемме 2. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Если в исходное подмножество Ω входят ячейки с $DT = \max\{DT_j\}$, то это подмножество является максимальным, т.е. одна из этих ячеек будет начальной в Ω .

Доказательство. Пусть ячейка a является начальной ячейкой Ω . Среди ячеек, принадлежащих Ω , выберем такую ячейку i , для которой

$DT_i = \max\{DT_j\}$. Обозначим через t_a и t_i моменты времени, соответствующие предыдущим перед t_Ω разрывам ячеек a и i , и пусть $h_a(t_\Omega)$ – энергия ячейки a , накопленная к началу быстрого процесса t_Ω . Заметим, что для всех ячеек k , имеющих $DT_k = \max\{DT_j\}$, время между любыми двумя последовательными разрывами:

$$t_{k2} - t_{k1} = D \bullet \max\{DT_j\}.$$

Действительно, из Леммы 1 следует, что $t_{k2} - t_{k1} \leq D \bullet \max\{DT_j\}$, но если $t_{k2} - t_{k1} < D \bullet \max\{DT_j\}$, то $h_k(t_{k2}) < 1$, что невозможно. Поэтому, согласно Лемме 3, $t_\Omega - t_a \geq t_\Omega - t_i = D \bullet \max\{DT_j\}$.

Однако, согласно Лемме 1, $t_\Omega - t_a \leq D \bullet \max\{DT_j\}$. Следовательно, $t_\Omega - t_a = D \bullet \max\{DT_j\}$. А так как $h_a(t_\Omega) = D \bullet \max\{DT_j\} / DT_a + (1 - D)$ и $h_a(t_\Omega) = 1$, то $DT_a = \max\{DT_j\}$, т.е. подмножество Ω является максимальным. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть в момент времени t_{Ω_1} возникло максимальное исходное подмножество Ω_1 с начальной ячейкой a . Тогда в момент времени $t_{\Omega_2} = t_{\Omega_1} + D \bullet \max\{DT_j\}$ возникнет максимальное исходное подмножество Ω_2 с той же начальной ячейкой, причем каждая ячейка подмножества Ω_1 будет принадлежать подмножеству Ω_2 .

Доказательство. Легко видеть, что в момент времени $t_{\Omega_2} = t_{\Omega_1} + D \bullet \max\{DT_j\}$ обязательно возникнет некоторое исходное подмножество Ω_2 , в которое входит ячейка a , так как время между последовательными разрывами ячейки a равно $D \bullet \max\{DT_j\}$. Более того, ячейка a будет начальной для этого подмножества. Действительно, если a не является начальной ячейкой подмножества Ω_2 , то, согласно определению исходного подмножества, у нее есть хотя бы один сосед k , порвавшийся раньше нее в быстром процессе t_{Ω_2} . Пусть t_k – время разрыва ячейки k , предшествующего t_{Ω_2} . Если $t_k > t_{\Omega_1}$, то ячейка k порвалась два раза между двумя последовательными разрывами ячейки a , что противоречит Лемме 2. Если же $t_k \leq t_{\Omega_1}$, то так как $t_{\Omega_2} - t_k \leq D \bullet \max\{DT_j\} = t_{\Omega_2} - t_{\Omega_1}$, то $t_k = t_{\Omega_1}$. Однако, если бы ячейка k порвалась в быстром процессе t_{Ω_1} позже ячейки a , то это бы противоречило Лемме 2, так как ячейка a не порвалась бы между двумя последовательными разрывами ячейки k , а если раньше, то это невозможно, так как ячейка a была начальной в подмножестве Ω_1 .

Докажем теперь, что любая другая ячейка, входящая в Ω_1 , будет входить в Ω_2 . Сначала покажем, что нет такой ячейки, которая принадлежала бы Ω_1 и могла бы порваться в интервале времени от t_{Ω_1} до t_{Ω_2} . Предположим обратное, и пусть ячейка j порвалась первой после t_{Ω_1} . Тогда, согласно определению исходного подмножества, у такой ячейки есть, по крайней мере, один сосед, который порвался раньше нее в бы-

стром процессе t_{Ω_1} , и, следовательно, ни разу не рвался между двумя последовательными разрывами ячейки j , что противоречит Лемме 2.

Вместе с тем, согласно Лемме 1, каждая из ячеек, принадлежащих Ω_1 , должна порваться хотя бы один раз в полуинтервале времени $]t_{\Omega_1}, t_{\Omega_2}]$. Следовательно, все они порвутся в быстром процессе t_{Ω_2} позже начальной ячейки.

Теперь предположим, что существуют ячейки $j_1, j_2, \dots, j_n \in \Omega_1$, не являющиеся начальными, которые порвались в момент времени t_{Ω_2} , но не входят в Ω_2 . Пусть ячейка j_k порвалась первой из них. Согласно определению исходного подмножества, у нее был хотя бы один сосед $i \in \Omega_1$, порвавшийся раньше нее в быстром процессе t_{Ω_1} . Если он порвался в быстром процессе t_{Ω_2} раньше j_k , то, по определению исходного подмножества, $j_k \in \Omega_2$. Если же ячейка i порвалась позже j_k , то она ни разу не порвалась между двумя последовательными разрывами ячейки j_k , что противоречит Лемме 2. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. Если ячейка i имеет хотя бы одного соседа из максимального исходного подмножества Ψ , тогда в некоторый момент времени она войдет в одно из максимальных исходных подмножеств.

Доказательство. Рассмотрим некоторую ячейку i , не входящую ни в одно максимальное исходное подмножество и соседняя ячейка j которой входит в максимальное исходное подмножество Ψ_1 с начальной ячейкой a . Согласно Лемме 5, ячейка j будет принадлежать серии максимальных исходных подмножеств $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$ с одной и той же начальной ячейкой a . Обозначим через $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ моменты возникновения этих подмножеств. Тогда $\tau_{k+1} - \tau_k = D \bullet \max\{DT_j\} (1 \leq k < n)$, т.е.

$$\tau_{k+1} = \tau_1 + kD \bullet \max\{DT_j\}. \quad (\text{П } 1)$$

Пусть t_1, t_2, \dots, t_n — моменты времени, соответствующие последовательным разрывам ячейки i . Тогда существует такой момент, для которого $\tau_l \leq t_m \leq \tau_{l+1}$. Тогда $\tau_{l+1} \leq t_{m+1} \leq \tau_{l+2}$. Действительно, если $t_{m+1} < \tau_{l+1}$, то ячейка i порвалась два раза между двумя последовательными разрывами ячейки j , а если $t_{m+1} > \tau_{l+2}$, то ячейка j порвалась два раза между двумя последовательными разрывами ячейки i , что противоречит Лемме 2. Аналогично можно показать, что $\forall k (1 \leq k < n) \tau_{l+k} \leq t_{m+k} \leq \tau_{l+k+1}$.

Однако интервал времени между двумя последовательными разрывами ячейки i $t_{m+1} - t_m \leq D \bullet DT_{\max-1}$, где $DT_{\max-1}$ — следующее по величине DT после $\max\{DT_j\}$. Действительно, пусть в момент t_{m+1} ячейка i входит в некоторое исходное подмножество Ω с начальной ячейкой d , причем Ω — не максимальное подмножество. Обозначим через t_d время предшествующего t_{m+1} разрыва ячейки d , а через $h_d(t_{m+1})$

энергию, накопленную ячейкой d к моменту начала быстрого процесса t_{m+1} . Тогда, согласно Лемме 3, $t_{m+1} - t_m \leq t_{m+1} - t_d$. Однако, так как $h_d(t_{m+1}) = 1$, то $(t_{m+1} - t_d)/DT_d + (1 - D) = 1$, т.е. $t_{m+1} - t_d = D \bullet DT_d$. Но так как Ω не является максимальным исходным подмножеством, то $t_{m+1} - t_d \leq D \bullet DT_{max-1}$, тогда и

$$t_{m+1} - t_m \leq D \bullet DT_{max-1}.$$

Отсюда,

$$t_{m+k} \leq t_m + kD \bullet DT_{max-1}. \quad (\text{П } 2)$$

Из соотношений (П 1) и (П 2) следует, что

$$t_{m+k} - \tau_{l+k} \leq (t_m - \tau_l) - kD(\max\{DT_j\} - DT_{max-1}),$$

т.е. при достаточно больших k $t_{m+k} - \tau_{l+k} < 0$, т.е. ячейка i дважды порвется между двумя последовательными разрывами ее соседа j , что противоречит Лемме 2, либо $t_{m+k} - \tau_{l+k} = 0$, что означает, что ячейка вошла в максимальное исходное подмножество Ψ_k , что и требовалось доказать.

Из приведенных выше лемм следует, что всегда существует такой момент времени, после которого все ячейки решетки войдут в максимальные исходные подмножества. Поскольку максимальные исходные подмножества периодически повторяются с периодом $DT = \max\{DT_j\}$, то и каждая ячейка решетки будет рваться с этим периодом, т.е. траектория энергии системы будет периодической. Лемма 6 доказана.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект N 00-15-98507 "Поддержка научных школ", проект N 02-05-64140), фонда James S. McDonnell (Сотрудничество XXI века по изучению комплексных систем, Проект "Критические переходы в комплексных системах"), НАТО (проект SfP 972266), Международного института прикладного системного анализа (IIASA, проект RMS) и Международного научно-технического центра (проект N 1293-99).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized criticality: An explanation of 1/f noise // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol.59. P.381-384.
2. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized criticality // Phys. Rev. A. 1988. Vol.38. P.364.
3. Bak P., Tang C. Earthquakes as self-organized critical phenomenon // J. Geophys. Res. 1989. Vol.94. P.15635-15637.

4. *Manna S.S.* Two-state model of self-organized criticality // J. Phys. A. 1991. Vol.24. P.L363–L369.
5. *Ito K., Matsuzaki M.* Earthquakes as self-organized critical phenomena // J. Geophys. Res. 1990. Vol.95, N B5. P.6853–6860.
6. *Feder H.J.S., Feder J.* Self-organized criticality in a stick-slip process // Phys. Rev. Lett. 1991. Vol.66, N 20. P.2669–2672.
7. *Olami Z., Feder H.J.S., Christensen K.* Self-organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton modeling earthquakes // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol.68. P.1244–1247.
8. *Socolar J.E.S., Grinstein G., Jayaprakash C.* On self-organized criticality in non-conserving systems // Phys. Rev. E. 1993. Vol.47, N 4. P.2366–2376.
9. *Grassberger P.* Efficient large-scale simulations of a uniformly driven system // Phys. Rev. E. 1994. Vol.49, N 3. P.2436–2444.
10. *Gabrielov A.* Abelian avalanches and Tutte polynomials // Physica A. 1993. Vol.195. P.253–274.
11. *Gabrielov A., Newman W.I., Knopoff L.* Lattice models of failure: sensitivity to the local dynamics // Phys. Rev. E. 1994. Vol.50, N 1. P.188–197.
12. *Burridge R., Knopoff L.* Model and theoretical seismicity // Bull. Seism. Soc. Amer. 1967. Vol.59.
13. *Carlson J.M., Langer J.S.* A mechanical model of an earthquake fault // Phys. Rev. A. 1989. Vol.40. P.6470–6484.
14. *Shaw B.E., Carlson J.M., Langer J.S.* Pattern of seismic activity preceding large earthquakes // J. Geophys. Res. 1992. Vol.97. P.479–488.
15. *Pepke S.L., Carlson J.M., Shaw B.E.* Prediction of large events on dynamical model of a fault // J. Geophys. Res. 1994. Vol.99, N B4. P.6769–6788.
16. *Габриэлов А.М., Левшина Т.А., Ротвайн И.М.* Блочная модель динамики литосферы и прогноз землетрясений // Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука, 1989. С.46–55. (Вычисл. сейсмология; Вып.22).
17. *Колесникова Н.М., Ротвайн И.М., Кузнецов И.В.* Динамика поведения некоторых моделей клеточных автоматов // Проблемы динамики литосферы и сейсмичности. М.: ГЕОС, 2001. С.212–224. (Вычисл. сейсмология; Вып.32).
18. *Кузнецов И.В.* Прогноз сильных событий в моделях клеточных автоматов на основе решения обратной задачи // Проблемы динамики и сейсмичности Земли. М.: ГЕОС, 2000. С.212–220. (Вычисл. сейсмология; Вып.31).
19. *Молчан Г.М., Кропруд Т.Л., Дмитриева О.Е., Некрасова А.К.* Многомасштабная модель сейсмичности в задачах сейсмического риска: Италия // Современные проблемы сейсмичности и динамики Земли. М.: Наука, 1996. С.193–224. (Вычисл. сейсмология; Вып.28).
20. *Кропруд Т.Л.* Параметры сейсмичности для основных высокосейсмичных районов мира // Логические и вычислительные методы в сейсмологии. М.: Наука, 1984. С.36–58. (Вычисл. сейсмология; Вып.17).
21. *Dhar D.* Self-organized critical state of sandpile automaton models // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol.64, N 14. P.1613–1616.
22. *Gutenberg B., Richter C.* Seismicity of the earth and associated phenomena. Princeton, New Jersey: Princeton University Press. 1954. 310 p.
23. *Кузнецов И.В., Ротвайн И.М., Колесникова Н.М., Ломовской И.В.* Восстановление управляющих параметров и прогноз поведения клеточных моделей разлома // Наст. сб.