

УДК 550.345

## СЦЕНАРИЙ СИЛЬНЫХ СОБЫТИЙ В МОДЕЛИ НАКОПЛЕНИЯ ПЕСКА

А.Б. Шаповал, М.Г. Шнирман

Международный институт теории прогноза землетрясений  
и математической геофизики Российской академии наук, Москва

Рассматривается модель накопления песка квадратной решеткой. Количество событий как функция от их размера убывает по степенному закону при не очень больших размерах событий. Доля сильных событий (не удовлетворяющих степенному закону) не зависит от длины решетки. Сильные события прогнозируемы с помощью следующих предвестников: увеличение общего количества песка и повышение кластеризации ячеек, содержащих достаточно много песчинок. Количественно предвестники оцениваются в терминах диаграммы ошибок.

## SCENARIOS OF LARGE EVENTS IN THE SAND-PILE MODEL

A.B. Shapoval, M.G. Shnirman

International Institute of Earthquake Prediction Theory  
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow

In the sand-pile model the quantity of events as function on their size decreases following a power law if events' size is not big. Large events do not satisfy the power law. Their fraction does not depend on the lattice length. The following two precursors result in prediction of the strong events. They are the growth of the total sand quantity in the lattice and clusterisation of the cells containing sufficiently many particles. Error diagram qualifies the precursors.

### Введение

В природе и обществе широко представлены системы с большим числом степеней свободы, в которых хаотические малые изменения приводят к внезапным крупным событиям.

Например, стоимость акций зависит от общих тенденций рынка и локальных предпочтений инвесторов, вызывающих колебания общих тенденций. Оба параметра взаимосвязаны сложным образом, то усиливая, то ослабляя друг друга. Самоусиливающийся процесс может привести к резким скачкам на фондовом рынке. Важная проблема, стоящая перед инвесторами, – предугадать резкое изменение цен на активы.

Крупные землетрясения происходят вследствие малых движений земных плит и взаимодействия между ними. Возникает задача прогноза крупных землетрясений на основе данных о предшествующих землетрясениях. Алгоритмы прогноза землетрясений по предшествующей сейсмичности разрабатываются школой В.И.Кейлис-Борока. Они, в частности, отражены в работах [1–3].

В плане универсальности процесса подготовки крупных событий интересны попытки обобщить алгоритм прогноза на задачи, не связанные с сейсмичностью. Например, прогноз результатов президентских и сенаторских выборов в США приведен в работе [4].

Возникает естественный вопрос: каким бы мог быть простой механизм, пренебрегающий конкретными деталями рассматриваемых процессов, но приводящий к наблюдаемой картине появления крупнейших событий. В 1987 году Бак и др. [5, 6] представили модель накопления песка<sup>1</sup>, которая претендует на роль такого механизма. В модели система, эволюционируя согласно локальным правилам, самоорганизуется определенным образом. Самоорганизация достигается без настройки контрольных параметров. Остановимся на этой модели подробно.

Произвольная ячейка  $(i, j)$  решетки площади  $N \times N$  содержит целое число песчинок  $h_{ij} > 0$ . Это число меньше порога  $H = 4$ . В каждый момент (дискретного) времени в случайно выбранную ячейку  $(i, j)$  падает одна песчинка:

$$h_{ij} \longrightarrow h_{ij} + 1. \quad (1)$$

Если в результате количество песчинок  $h_{ij}$  достигает порога  $H$ , то песок перераспределяется так, что ячейка  $(i, j)$  раздает каждому из четырех ближайших соседей ровно по одной песчинке:

$$\begin{aligned} h_{ij} &\longrightarrow h_{ij} - 4, \\ h_{i\pm 1, j} &\longrightarrow h_{i\pm 1, j} + 1, \quad h_{i, j\pm 1} \longrightarrow h_{i, j\pm 1} + 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Если ячейка  $(i, j)$  лежит на границе решетки, то одна песчинка (две для угловых ячеек) покидает решетку. Перераспределения продолжают до тех пор, пока количество песчинок во всех ячейках решетки оказывается меньше порога:

$$h_{ij} < H \quad \text{для любых } i, j = 1, \dots, N. \quad (3)$$

Событием является только что описанная последовательность перераспределений. В работе [7] показано, что перераспределения (2) не могут продолжаться бесконечно. Пусть  $q$  – число перераспределений с

<sup>1</sup>Sand-pile в англоязычной литературе.

учетом кратности, произошедших во время некоторого события. Тогда размером события называется число  $s = Cq/N^2$ , где  $C$  фиксировано равным  $100^2$  для удобства последующих графических изображений.

В соответствии со сформулированными правилами проводится эксперимент. Информация о произошедших событиях – время, размер, распределение песка – заносится в каталог. Естественно зафиксировать длину каталога, пропорциональную  $N^2$ .

Самые разнообразные свойства модели подверглись внимательному изучению. Бак дает обзор исследований в работе [8], читатель может также найти обсуждение результатов, например, в [7] и [9]. Задача прогноза событий каталога с помощью предшествующих событий меньшего размера до сих пор не решена.

В настоящей работе ставится задача определить, что предшествует событиям самого большого размера. Их будем называть сильными. Точная постановка задачи приведена в разд.1. Введены два предвестника сильных событий: *увеличение песка в решетке* и *повышение кластеризации ячеек*, содержащих три песчинки. Второй предвестник алгоритмически похож на вычисление размерности Реньи фрактальных множеств, введенном в работе [10], однако основан на принципиально ином разбиении множества на кластеры. Метод определен и успешно применен в статье [11] при изучении сейсмических потоков при нестандартном подходе к геометрии множеств. В разд.2 предвестники сравниваются друг с другом в терминах диаграммы ошибок. Установлено, что предвестник, основанный на кластеризации, несколько лучше предсказывает сильные события. Качество прогноза улучшается с увеличением размера прогнозируемых событий.

Основные выводы сделаны в заключении.

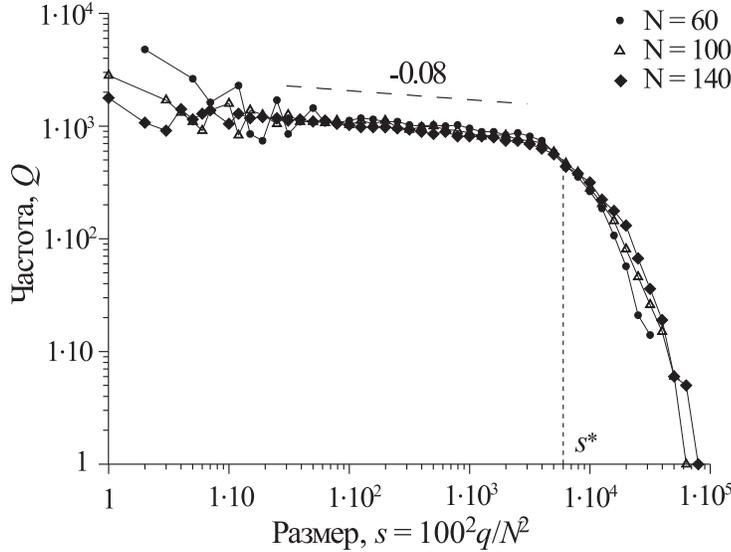
## 1. Сильные события и их предвестники

**Критическое состояние.** Система, эволюционируя по сформулированным правилам, через некоторое время  $t_c$  приходит в *критическое состояние*, которое не зависит от начального распределения песка в решетке [7]. Критическое состояние характеризуется следующими свойствами системы.

1). Распределение событий по размерам (график повторяемости) является степенным при размере  $s$ , меньшем некоторого  $s^*$  (рис.1). Значение  $s^*$  не зависит от ребра решетки [8]. При  $s > s^*$  график резко обрывается вниз, так что он убывает быстрее любой степени.

2). Рассмотрим каталог достаточно большой длины  $L_N$ , соответствующий решетке площади  $N \times N$  и полученный на интервале  $[t_c, t_c + L_N]$ . Пусть  $\bar{h}_N(t)$  – среднее количество песчинок в ячейке

решетки с ребром  $N$  в момент времени  $t$  после произошедших распределений песка по правилам (1),(2):  $\bar{h}_N(t) = N^{-2} \sum_{i,j=1}^N h_{ij}$ . Обозначим через  $\bar{h}_N$  осреднение функции  $\bar{h}_N(t)$  по каталогу длины  $L_N$ . Тогда  $\bar{h}_N$  стремится к некоторому числу  $h_\infty \simeq 2.11$  при  $N \rightarrow \infty$  [12]<sup>2</sup>.



**Рис. 1.** График повторяемости для трех длин ребра решетки  $N$ .

В каждом каталоге 40 000 событий. Логарифмическая ось абсцисс разбита на равные отрезки, середине каждого отрезка поставлено в соответствие число  $Q$  произошедших событий, имеющих размер  $s$ , лежащий на этом отрезке. Значение  $s^* \simeq 10^{3.6}$ . Наклон аппроксимирующей прямой равен  $-0.08$

Далее будем рассматривать каталог, содержащий информацию о событиях, которые произошли после того, как система пришла в критическое состояние.

**Постановка задачи.** Назовем событие сильным, если его размер больше, чем некоторое  $\hat{s} \geq s^*$  (как зафиксировать параметр  $\hat{s}$  обсуждается ниже). Число  $s^*$  (см. рис. 1) не зависит от длины ребра решетки. Поэтому сильные события определены корректно.

Цель исследования – выяснить: предсказуемы ли сильные события. На этом пути нам не удалось добиться успеха, используя методы, применяемые для прогноза в сейсмичности и в других моделях клеточных автоматов. Однако установлена корреляция между сильными событиями и пространственными характеристиками распределения песчинок в решетке.

<sup>2</sup>Численное значение  $h_\infty$  в [12] равно 2.12. Отличие возникает из-за незначительной разницы в правилах эволюции системы.

Следующие два сценария происхождения сильных событий представляются естественными. В первом – перед сильным событием может увеличиваться среднее количество песчинок в ячейке решетки  $\bar{h}_N(t)$ . Второй сценарий – объединение в кластеры ячеек, содержащих три песчинки при, быть может, неизменном среднем количестве песчинок в ячейке ( $\bar{h}_N(t) \simeq \bar{h}_N$ ). Заметим, что в реальности измерение подобных характеристик безусловно затруднено.

Можно было бы интерпретировать первый сценарий как накопление напряжения на единицу площади, а второй сценарий – как увеличение степени консолидации зоны подготовки события.

Для изучения правдоподобности второго сценария необходимо ввести количественную характеристику кластеризации. Для этого воспользуемся алгоритмом, примененном в работе [11].

**Мера кластера как предвестник сильного события.** Пусть  $a_r(i, j)$  – среднее количество песчинок в квадрате размера  $(2r + 1) \times (2r + 1)$  и центром в точке  $(i, j)$ :

$$a_r(i, j) = \left( \sum_{k=i-r}^{i+r} \sum_{l=j-r}^{j+r} \zeta_{kl} \right)^{-1} \sum_{k=i-r}^{i+r} \sum_{l=j-r}^{j+r} h_{kl} \zeta_{kl}, \quad (4)$$

где  $\zeta_{kl} = 1$ , если ячейка  $(k, l)$  принадлежит решетке ( $0 < k, l \leq N$ ) и  $\zeta_{kl} = 0$  – в противном случае.

Зафиксируем натуральное число  $r$  и вещественное число  $a^* = a_r^*$ . Определим кластер индуктивно.

- клетка  $(i, j)$  принадлежит некоторому кластеру  $K$ , если  $a_r(i, j) \geq a^*$ ;
- если некоторая ячейка  $(i, j)$  принадлежит  $K$ , то все ее ближайшие соседи  $(k, l)$  ( $k = i \pm 1, l = j$  или  $k = i, l = j \pm 1$ ), для которых  $a_r(k, l) \geq a^*$ , принадлежат  $K$ .

Следовательно, произвольному распределению песка в решетке соответствует множество кластеров  $\{K_\alpha\}$ , зависящее от  $r$  и  $a^*$ . Каждому кластеру припишем число  $p_\alpha$ , определенное как количество ячеек кластера  $K_\alpha$ , деленное на общее число ячеек  $(i, j)$  с  $a_r(i, j) \geq a^*$ . По построению  $\sum_\alpha p_\alpha = 1$ . Через  $\nu$  обозначается число кластеров. Для любого положительного  $D$ , не равного единице, определим величину кластеризации  $\mu$  следующей формулой:

$$\mu = \frac{-\log \sum_{\alpha=1}^{\nu} p_\alpha^D}{(D - 1) \log \nu}. \quad (5)$$

Итак, тройке чисел  $D, r, a^*$  соответствует величина кластеризации  $\mu$ . Из определения следует, что  $0 < \mu \leq 1$ , причем значение  $\mu = 1$

достигается, если числа  $p_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, \nu$ ) равны между собой, а  $\nu$  произвольно. Если один большой кластер "доминирует" на фоне малых, т.е. существует  $p_{\alpha_0}$  значительно превосходящее другие  $p_\alpha$ , то значение  $\mu$  мало. Чем больше  $D$ , тем больше подчеркивается контраст между размерами кластеров. Напротив, при малых  $D$  большее влияние на величину  $\mu$  оказывает не контрастность кластеров, а их количество.

Определение  $\mu$  только формально напоминает определение размерности Реньи. Числа  $p_\alpha$  в (5) не содержат той информации о геометрии кластеров, которая имеет место при построении размерности Реньи.

## 2. Прогноз сильных событий

**Индивидуальные предвестники: определение и результат прогноза.** Определим предвестник *повышение кластеризации ячеек*. В каждый момент времени  $t$  после всех изменений, произошедших по правилам (1)–(3), вычисляется кластеризация  $\mu$ . Если  $\mu < \mu^*$ , то объявляется тревога на интервале  $(t, t + T]$ . Это означает, что сильное событие прогнозируется на интервале  $(t, t + T]$ . Таким образом, предвестником сильного события является уменьшение  $\mu$ , т.е. появление кластеров существенно разных размеров.

Качество предвестника оценивается с помощью диаграммы ошибок [13]. Пусть  $n$  – доля сильных событий, произошедших, когда тревога не была объявлена, по отношению к числу всех сильных событий. Тогда  $n$  можно назвать долей ошибок предвестника при прогнозе. Пусть  $\tau$  – доля времени тревог по отношению к полному интервалу времени каталога. При фиксированных  $D, r, a^*, T$  доли  $n$  и  $\tau$  являются функциями от параметра  $\mu^*$ :  $n = n(\mu^*)$ ,  $\tau = \tau(\mu^*)$ . График неявной зависимости  $\tau$  от  $n$ , на котором  $n$  и  $\tau$  являются функциями от  $\mu^*$ , называется диаграммой ошибок. Предвестник оказывается хорошим, если  $\min_{\mu^*} (n + \tau)$  достаточно мал и полученное минимальное значение устойчиво на значительном интервале изменения  $\tau$ .

Зафиксируем длину ребра решетки  $N = 100$ . Параметры  $D, r, a^*$  и  $T$  подбирались с целью минимизировать функцию  $(n + \tau)$ . Оптимальные полученные значения:  $D=2, r=5, a^*=2.16, T=10$ . Уменьшение  $\mu$  означает, что велика кластеризация множества, состоящего из ячеек, содержащих достаточно много песчинок. Значение "достаточно много" определяется числом  $a^*$ . Число песчинок в ячейке целое. Введение параметра  $r$  и процедура осреднения числа песчинок (4) по квадрату со стороной  $(2r + 1)$  расширяет число возможных значений  $a_r(i, j)$  и дает возможность оптимизировать параметр  $a^*$ . Заметим, что оптимальное значение  $a^* = 2.16$  больше типичного среднего числа песчинок в ячейке  $\bar{h}_N(t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 2.11$ .

Другой исследуемый предвестник – *увеличение песка в решетке*. Он заключается в увеличении среднего числа песчинок  $\bar{h}_N(t)$  перед сильным событием. Так как  $N$  фиксировано, обозначим далее  $\bar{h}_N(t)$  через  $\bar{h}(t)$ . Тревога объявляется на интервале времени  $(t, t + T]$ , если  $\bar{h}(t)$  превзойдет некоторый параметр  $h^*$ :  $\bar{h}(t) \geq h^*$ . Как и выше, определим для рассматриваемого предвестника долю ошибок  $n$  и долю времени тревог  $\tau$ . Функции  $n(\cdot)$  и  $\tau(\cdot)$  зависят от параметра  $h^*$ .

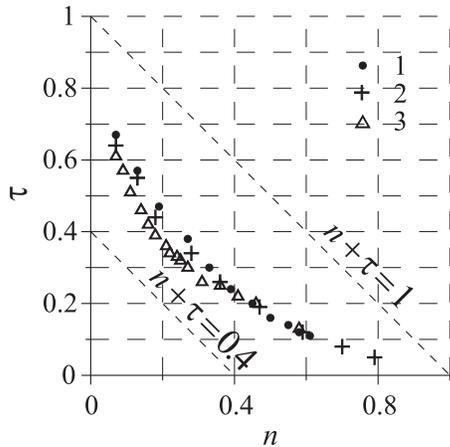


Рис. 2. Диаграмма ошибок предвестников *увеличение песка в решетке* (1) и *повышение кластеризации ячеек* (2) и их объединения (3)

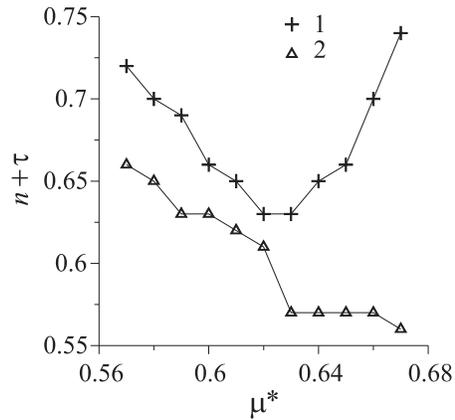


Рис. 3. Зависимость  $(n + \tau)$  от параметра  $\mu^*$  для предвестника *повышение кластеризации ячеек* (1) и объединения предвестников (2)

Диаграмма ошибок  $(n, \tau)$  предвестника *повышение кластеризации ячеек* приведена на (рис. 2), а зависимость  $(n + \tau)$  от  $\mu^*$  – на рис. 3. При получении графиков число  $\hat{s}$ , определяющее сильные события, положено равным 35 500. Диаграмма ошибок предвестника *увеличение песка в решетке* приведена на рис. 2, а зависимость  $(n + \tau)$  от  $h^*$  – на рис. 4.

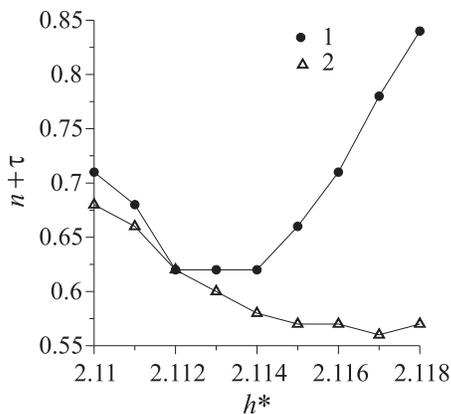


Рис. 4. Зависимость  $(n + \tau)$  от параметра  $h^*$  для предвестника *увеличение песка в решетке* (1) и объединения предвестников (2)

Рисунки 2–4 показывают, что количественные характеристики прогноза: диаграмма ошибок и зависимость  $(n + \tau)$  от параметров – для рассмотренных предвестников близки друг к другу. При этом прогноз, основанный на кластеризации, обладает небольшим преимуществом. Поэтому оба рассмотренных сценария появления сильных событий одинаково правдоподобны.

**Объединение предвестников.** Чтобы уменьшить минимальное значение  $(n + \tau)$  и сделать его более устойчивым (тем самым улучшая предвестник), осуществляется объединение предвестников. Формально, проводится следующая процедура: фиксируется  $D = 2$  и  $T = 10$ ; в каждый момент времени  $t$  вычисляются  $\mu_1, \mu_2$  и  $\mu_3$  по формуле (5) при трех близких наборах параметров  $r$  и  $a^*$ :  $r = 2, a^* = 2.16$ ;  $r = 3, a^* = 2.16$ ;  $r = 3, a^* = 2.18$ , соответственно.

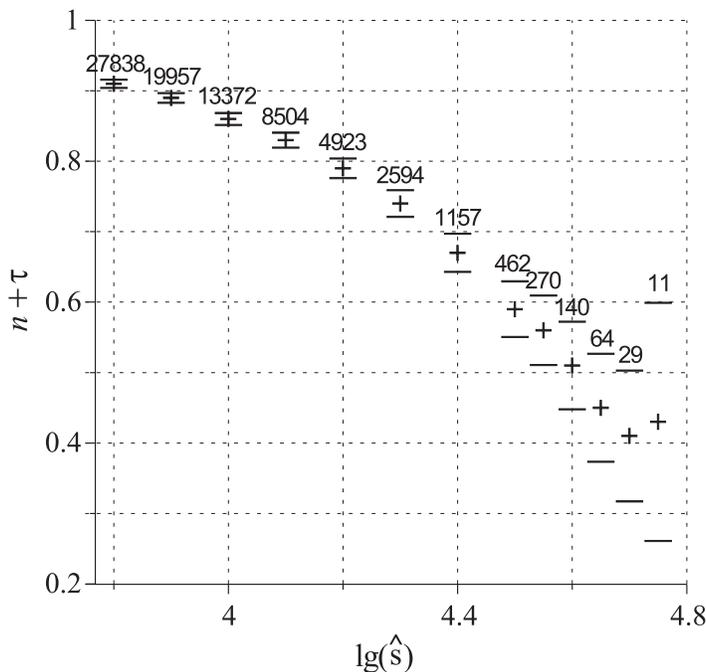
Введем три критических значения  $\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*$  параметров  $\mu_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Тревога объявляется на интервале  $(t, t + T]$ , если из четырех неравенств  $\mu_i < \mu_i^*$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и  $\bar{h}(t) > h^*$  выполнены по крайней мере три. Параметр  $\mu_1^*$  был ранее введен для предвестника *повышение кластеризации ячеек* и обозначался  $\mu^*$ .

Диаграмма ошибок объединения предвестников приведена на рис. 2.; зависимость  $(n + \tau)$  от  $\mu_1^*$  при фиксированных остальных критических параметрах – на рис. 3, а от параметра  $h^*$  – на рис. 4.

Значения  $(n + \tau) \in [0.55, 0.60]$  достаточно устойчивы. Они достигаются при  $n \in [0.2, 0.3]$  или  $\tau \in [0.25, 0.35]$ , т.е. на десятой части возможных значений как  $n$  так и  $\tau$ . А неравенство  $(n + \tau) < 0.65$  справедливо на третьей части возможных значений  $n$  и  $\tau$ .

Объединение предвестников количественно лучше и устойчивее рассмотренных отдельных предвестников. Уменьшение  $(n + \tau)$  показывает, что отдельные предвестники предсказывают не одни и те же события.

Напомним, что сильным называлось событие, имеющее размер больший, чем некоторое  $\hat{s}$ . Объединение предвестников проводилось при разных значениях  $\hat{s}$ . Минимальное значение  $(n + \tau)$  уменьшается с увеличением  $\hat{s}$  (рис. 5). Естественно, что чем больше  $\hat{s}$ , тем менее статистически значимы точки графика. Чтобы получить каталог с событиями большего размера, нужно увеличить время наблюдаемой эволюции. Однако число событий с увеличением размера убывает быстрее степенной функции (хотя и не экспоненциально). Поэтому даже значительное увеличение времени эксперимента не приводит к получению качественно новых данных.



**Рис. 5.** Функция  $(n + \tau)$  при различных порогах сильных событий  $\hat{s}$  для объединенных предвестников (крестики) и 95%-ный доверительный интервал оценки  $(n + \tau)$  (горизонтальные линии). Числа на графике отвечают количеству прогнозируемых сильных событий

Сильные события не являются близкими к периодическим. Предвестник, объявляющий тревогу спустя некоторое фиксированное время после сильного события на достаточно большое время или до наступления сильного события, не работает.

### Заключение

Исследованы сильные события ( $s > \hat{s}$ ) в модели накопления песка. В области их развития график повторяемости не удовлетворяет степенному закону.

Найдены два предвестника сильных событий. Один из них – это увеличение среднего числа песчинок в ячейке  $\bar{h}(t)$  перед сильным событием. Тревога объявляется при  $\bar{h}(t) > h^*$ .

Второй предвестник – более тонкий и несколько более точный – повышение кластеризации ячеек, содержащих три песчинки, перед сильным событием. Количество песка в каждой ячейке осредняется по малой окрестности. Выделяется множество ячеек, в которых осреднение больше некоторого порога. Тревога объявляется при достаточно малой мере этого множества.

Рассмотренные предвестники хорошо дополняют друг друга. Предвестник, основанный на их объединении, дает устойчивый прогноз, лучший, чем прогнозы, полученные с помощью отдельных предвестников.

Результат прогноза зависит от того, насколько сильные события прогнозируются. Чем больше  $\hat{s}$  в определении сильных событий при постоянном  $N$ , тем лучше прогноз.

Аналогичный результат имеет место при прогнозе землетрясений. Крупнейшие землетрясения имеют магнитуду, большую 8. (Магнитудой называют некоторый аналог размера; в терминах рассмотренной модели магнитуда пропорциональна логарифму размера.) Эти события достаточно хорошо прогнозируемы (см. [14]). Однако прогноз землетрясений, имеющих магнитуду, большую 7.5, безусловно не так хорош.

Существует распространенное мнение, что крупнейшие события в модели Бака не прогнозируемы. Однако в рассмотренной модели накопления песка получено, что события прогнозируемы, если они аномально крупные (т.е. находятся существенно вне зоны действия степенного закона). Чем это можно объяснить?

Возможно, оба индивидуальных предвестника отражают не приближение системы к критической точке, а степень ее "закритичности", т.е. продвижение за критическую точку. Видимо, именно "закритичность" приводит к необходимости выбора аномально больших значений размера прогнозируемых событий, находящихся вне зоны действия степенного закона распределения событий по размерам. События "нормальных" размеров не прогнозируются рассмотренными методами, что, однако, не может быть полным решением вопроса о прогнозируемости этих событий, так как возможны другие методы прогнозирования, опирающиеся на более детальное изучение геометрии распределения песка (напряжений).

Черезвычайно интересен вопрос о связи между рассмотренным сценарием закритического порождения сильных событий и более традиционным [15] сценарием критического порождения крупнейших событий: в каком смысле "закритичность" продолжает "критичность", и может ли "закритическое" поведение рассматриваться как подтверждение гипотезы универсальности порождения крупных событий [16]?

## ЛИТЕРАТУРА

1. Keilis-Borok V.I., Kossobokov V.G. Preliminary activation of seismic flow: algorithm M8 // Phys. Earth Planet. Inter. 1990. Vol.61. P.73–83.
2. Keilis-Borok V.I., Rotwain I.M. Diagnosis of time of increased probability of strong earthquakes in different regions of the world: algorithm CN // Phys. Earth Planet. Inter. 1990. Vol.61. P.57–72.

3. *Keilis-Borok V.I.* Intermediate-term earthquake prediction // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1996. Vol.93. P.3748–3755.
4. *Keilis-Borok V.I., Lichtman A.J.* The self-organization of American society in presidential and senatorial elections // Limits of predictability. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1993. P.233–237.
5. *Bak P., Tang C.* Earthquakes as a self-organized critical phenomenon // J. Geophys. Res. 1989. Vol.94. P.15635–15637.
6. *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* Self-organized criticality // Phys. Rev. A. 1988. Vol.38. P.364–374.
7. *Dhar D.* The Abelian Sandpile and Related Models // Physica A. 1999. Vol.263. P.4–25.
8. *Bak P.* How Nature Works. Oxford: Oxford Univ. Press., 1997.
9. *Ivashkevich E.V., Priezhev V.B.* Introduction to the sandpile model // Physica A. 1998. Vol.254. P.97–116.
10. *Halsey T.C., Yensen M.H., Kadanoff L. et al.* Fractal measures and their singularities: the characterisation of strange sets // Phys. Rev. A. 1986. Vol.33, N 2. P.1141–1151.
11. *Блантер Е.М., Шнирман М.Г.* О "мультифрактальном" подходе к вопросу кластеризации эпицентров // Проблемы прогноза землетрясений и интерпретация сейсмологических данных. М.: Наука, 1992. С.46–62. (Вычисл. сейсмология; Вып.25).
12. *Carlson J.M., Swindle G.H.* Self-organized criticality: sandpiles, singularities, and scaling // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1995. Vol.92. P.6712–6719.
13. *Молчан Г.М.* Оптимальные стратегии в прогнозе землетрясений // Современные методы интерпретации сейсмологических данных. М.: Наука, 1991. С.3–18. (Вычисл. сейсмология; Вып.24).
14. *Kossobokov V.G., Keilis-Borok V.I., Romashkova L.L., Healy J.H.* Testing earthquake prediction algorithms: statistically significant real-time prediction of the largest earthquake in the Circum-Pacific, 1992–1997 // Phys. Earth Planet. Inter. 1999. Vol.111. P.187–196.
15. *Keilis-Borok V.I.* The lithosphere of the Earth as a non-linear system with implications for earthquake prediction // Rev. Geophys. Vol.28. 1990. P.19–34.
16. *Keilis-Borok V.I.* Intermediate-term earthquake prediction // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1996. Vol.93. P.3748–3755.