УДК 550.311

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ ЗЕМЛИ. II. СРЕДНИЕ НАПРЯЖЕНИЯ И БАЛАНС ЭНЕРГИИ

О.Д. Воевода

Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук, Москва

Методом моментов получено уравнение, которое связывает тензор средних напряжений в Земле с вектором угловой скорости вращения Земли и ее тензором инерции. Методом моментов получено уравнение баланса механической энергии в Земле. Оценка величин, которые входят в эти уравнения, позволила выделить из совокупности силовых воздействий те, которые оказывают существенное влияние на движения Земли как целого.

ABOUT EQUATIONS OF EARTH MOTIONS. II. THE AVERAGE STRESS AND THE ENERGY BALANCE

O.D. Voevoda

International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow

The paper discuues equations for average stress and energy balance in self-gravitating and rotating Earth. The equations were obtained by making use the "virial equations" method. Geodynamical applications of these equations are also discussed.

Введение

Данная статья является продолжением работы [1], в которой методом моментов была получена система уравнений движения массивной вращающейся деформируемой Земли.

Основная цель настоящей статьи состоит в оценке значимости различных силовых воздействий на движения материала Земли. Эти оценки сделаны на основе формулы для средних напряжений [1] и уравнения баланса энергии Земли.

Существуют различные утверждения о природе и величине напряжений в Земле. Например, эту величину можно оценить, исходя из решения

© О.Д. Воевода, 2002

задачи о напряженном состоянии массивного стационарно вращающегося однородного упругого шара [2].

Однако в достаточно общей постановке задача определения средних напряжений в массивной вращающейся деформируемой неоднородной Земле не рассмотрена. Так как силовые воздействия на Землю аддитивны, то аддитивны и средние напряжения в Земле, которые обусловлены соответствующими силовыми воздействиями. Поэтому наличие уравнения, которое связывает средние напряжения в Земле с действующими на нее силами разной природы необходимо для оценки значимости вклада каждой из этих сил в движение материала Земли.

Расчету энергии Земли посвящено достаточно много работ, например [3–5]. Однако в этих работах в явном виде не выделены те части энергии, которые соответствуют различным движениям Земли. Это обстоятельство затрудняет оценку значимости различных силовых воздействий на движения материала Земли.

1. Формулировка задачи

Рассмотрим шарообразное тело, которое удалено от других аналогичных тел. Все тела взаимодействуют между собой в соответствии с законом тяготения. В материале тел реализуются малые перемещения, деформации и медленное изменение перемещений. Отсчетное состояние каждого из тел соответствует гипотетической модели тела из недеформируемого материала.

Введем неинерциальную систему координат $\{o_m, \vec{x}_m\}$, начало которой помещено в центр масс тела с номером m (см. рисунок).

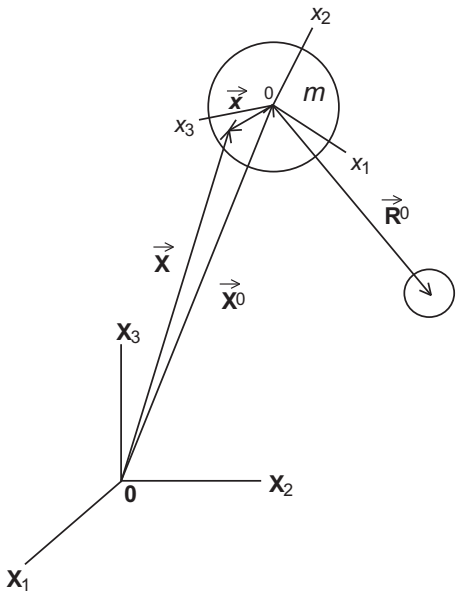
В этой системе координат линейное уравнение внутренней задачи динамики рассматриваемого тела имеет вид [1]:

$$\rho_m \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{u}}_m}{\partial t^2} + 2\rho_m \vec{\Omega}_m \times \frac{\partial \vec{\mathbf{u}}_m}{\partial t} + \rho_m \vec{\Omega}_m \times (\vec{\Omega}_m \times \vec{\mathbf{u}}_m) + \rho_m \frac{d\vec{\Omega}_m}{\partial t} \times \mathbf{u}_m -$$

$$-\nabla \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_m = \vec{f}_{mm} - \rho_m \vec{\Omega}_m \times (\vec{\Omega}_m \times \vec{x}_m) - \rho_m \frac{d\vec{\Omega}_m}{dt} \times \vec{x}_m + \vec{f}_m. \qquad (1)$$

Здесь $\rho = \rho(\vec{x})$ – плотность материала тела в отсчетном состоянии, $\vec{x}$ – вектор положения точки тела относительно его центра масс в отсчетном состоянии, $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}(\vec{x}, t)$ – вектор перемещений точек материала тела, $\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\vec{x}, t)$ – тензор напряжений, $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(t)$ – угловая скорость вращения тела в отсчетном состоянии. Вектор $\vec{f}_{mm}$ – сила гравитационного притяжения между точкой $\vec{x}_m$ и всеми другими точками $\vec{x}'_m$ тела V_m, а вектор $\vec{f}_m$ – приливообразующая сила. Оператор $\partial/\partial t$ действует в системе координат $\{o_m, \vec{x}_m\}$.

Система тел



Введем инерциальную систему координат $\{0, X\}$, начало которой помещено в некоторую точку пространства (см. рисунок). В этой системе координат линейное уравнение (1) имеет вид:

$$\rho_m \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{X}}_m}{\partial t_X^2} = \nabla \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_m + \vec{f}_{mm} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{N} \vec{f}_{mn}. \tag{2}$$

В рассматриваемом случае $\vec{\mathbf{X}} = \vec{X}^0 + \vec{\mathbf{x}}$, $\vec{\mathbf{x}} = \vec{x} + \vec{\mathbf{u}}$. Вектор $\vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{X}}(t)$ определяет положение точки деформируемого тела относительно системы координат $\{0, \vec{X}\}$. Вектор $\vec{X}^0 = \vec{X}^0(t)$ определяет положение в пространстве центра масс тела в отсчетном состоянии, вектор $\vec{\mathbf{x}}$ определяет положение точки деформируемого тела относительно его центра масс. Вектор $\vec{f}_{mn}$ есть сила гравитационного взаимодействия точки $\vec{X} \in V_m$ с каждым из других тел. В линейном приближении совпадают операторы частной и полной производных по времени, т.е. $\partial/\partial t = d/dt$. Оператор $\partial/\partial t_X$ действует в системе координат $\{0, \vec{X}\}$.

Пусть вектор напряжений равен нулю на поверхности тела

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \bullet \vec{n} = 0 \quad \text{на } S, \tag{3}$$

где $\vec{n}$ – единичная внешняя нормаль к поверхности S в отсчетном состоянии.

Так как система координат $\{o_m, \vec{x}_m\}$ помещена в центр масс тела, то формула (4) устанавливает, что перемещение $\vec{\mathbf{u}}^0(t)$ центра масс тела равно нулю:

$$\vec{\mathbf{u}}^0 = \frac{1}{M}\int\limits_V \rho\vec{\mathbf{u}}dV = 0. \qquad (4)$$

Применение метода моментов к уравнению (1) позволяет найти связь тензора средних напряжений в материале массивного вращающегося тела с тензором инерции тела и вектором угловой скорости его вращения. Применение метода моментов к уравнению (2) позволяет найти уравнение баланса механической энергии в Земле.

Как и в статье [1] будем использовать следующие обозначения: G – гравитационная постоянная, M – масса тела, $\widehat{I} = \int\limits_V \rho\vec{x}\vec{x}dV$ – тензор инерции тела в отсчетном состоянии, I – первый инвариант тензора $\widehat{I}$, а $\vec{R}^0_{mn}$ – вектор взаимного положения центров масс тел.

2. Средние напряжения в массивном вращающемся деформируемом теле

Найдем связь тензора средних напряжений

$$\langle\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\rangle = \frac{1}{\mathbf{V}}\int\limits_{\mathbf{V}} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}dV \qquad (5)$$

с силами, которые действуют на тело, его тензором инерции и вектором угловой скорости вращения.

Среднее давление в теле и характеристика отличия напряженного состояния тела от гидростатического определяются, соответственно, формулами: $\langle\mathbf{p}\rangle = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\langle\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\rangle$, $\mathrm{Dev}\langle\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\rangle = \langle\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\rangle - \langle\mathbf{p}\rangle\widehat{1}$, где $\widehat{1}$ – единичный тензор Кронекера.

Используем метод моментов. Умножим вектор $\vec{x}_m$ слева и справа на обе части уравнения (1), а затем сложим получившиеся уравнения. В результате получим:

$$\vec{x}_m(\nabla\bullet\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_m) + (\nabla\bullet\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_m)\vec{x}_m = \rho_m\left(\vec{x}_m\frac{\partial^2\vec{\mathbf{u}}_m}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\vec{\mathbf{u}}}{\partial t^2}\vec{x}_m\right) + 2\vec{\Omega}_m\times$$
$$\times\rho_m\left(\vec{x}_m\frac{\partial\vec{\mathbf{u}}_m}{\partial t} + \frac{\partial\vec{\mathbf{u}}_m}{\partial t}\vec{x}_m\right) + \vec{\Omega}_m\times(\vec{\Omega}_m\times\rho_m(\vec{x}_m\vec{\mathbf{u}}_m + \vec{\mathbf{u}}_m\vec{x}_m)) +$$
$$+\frac{d\vec{\Omega}_m}{dt}\times\rho_m(\vec{x}_m\vec{\mathbf{u}}_m + \vec{\mathbf{u}}_m\vec{x}_m) + 2\vec{\Omega}_m\times(\vec{\Omega}_m\times\rho_m\vec{x}_m\vec{x}_m) +$$
$$+2\frac{d\vec{\Omega}_m}{dt}\times\rho_m\vec{x}_m\vec{x}_m + (\vec{x}_m\vec{f}_{mm} + \vec{f}_{mm}\vec{x}_m) + (\vec{x}_m\vec{f}_m + \vec{f}_m\vec{x}_m). \qquad (6)$$

Проинтегрируем уравнение (6) по объему V_m тела. В результате получим формулу, которая содержит несколько объемных интегралов. Можно показать, что некоторые из этих интегралов оказываются равными нулю. Так как тела удалены друг от друга, то при интегрировании по объему V_m последнего слагаемого в правой части формулы (6) пренебрежем величинами порядка $o(l^3/R^3)$ (см. [1]).

В результате получим:

$$\begin{aligned}\langle\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_m\rangle &= \frac{1}{2V_m}\frac{d^2\widehat{\mathbf{i}}_m}{dt^2} + \frac{1}{V_m}\vec{\Omega}_m \times \frac{d\widehat{\mathbf{i}}_m}{dt} + \frac{1}{2V_m}\vec{\Omega}_m \times (\vec{\Omega}_m \times \widehat{\mathbf{i}}_m) + \\ &+ \frac{1}{2V_m}\frac{d\vec{\Omega}_m}{dt} \times \widehat{\mathbf{i}}_m + \frac{1}{V_m}\vec{\Omega}_m \times (\Omega_m \times \widehat{I}_m) + \\ &+ \frac{1}{V_m}\frac{d\vec{\Omega}_m}{dt} \times \widehat{I}_m + \frac{1}{2V_m}\int\limits_{V_m} (\vec{x}_m\vec{f}_{mm} + \vec{f}_{mm}\vec{x}_m)dV + \\ &+ \frac{1}{V_m}G\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{N}\left(M_n\left(\frac{\widehat{I}_m}{|\vec{R}^0_{mn}|^3} - 3\frac{\vec{R}^0_{mn}\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^5}\bullet\widehat{I}_m\right)\right). \qquad (7)\end{aligned}$$

где $\widehat{\mathbf{i}} = \int\limits_V \rho(\vec{x}\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{u}}\vec{x})dV$ – возмущение тензора инерции, которое обусловлено способностью материала тела деформироваться.

Рассмотрим уравнение (1) в точке $\vec{x}'_m$ того же тела V_m. Умножим вектор $\vec{x}'_m$ слева и справа на обе части этого уравнения, а затем сложим получившиеся уравнения. В результате получим уравнение, которое аналогично (7). Проинтегрируем это уравнение по объему V_m, а затем преобразуем его. Преобразования полностью аналогичны тем, которые были использованы выше при выводе уравнения (7). Примем во внимание, что интегрирование по объемам V_m и V'_m приводит к одинаковым интегральным характеристикам тела, т.е. $M = M'$, $\langle\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\rangle = \langle\widehat{\boldsymbol{\sigma}}'\rangle$, $\widehat{I} = \widehat{I}'$, $\widehat{\mathbf{i}} = \widehat{\mathbf{i}}'$.

В результате получим:

$$\begin{aligned}\langle\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_m\rangle &= \frac{1}{2V_m}\frac{d^2\widehat{\mathbf{i}}_m}{dt^2} + \frac{1}{V_m}\vec{\Omega}_m \times \frac{d\widehat{\mathbf{i}}_m}{dt} + \frac{1}{2V_m}\vec{\Omega}_m \times (\vec{\Omega}_m \times \widehat{\mathbf{i}}_m) + \\ &+ \frac{1}{2V_m}\frac{d\vec{\Omega}_m}{dt} \times \widehat{\mathbf{i}}_m + \frac{1}{V_m}\vec{\Omega}_m \times (\Omega_m \times \widehat{I}_m) + \\ &+ \frac{1}{V_m}\frac{d\vec{\Omega}_m}{dt} \times \widehat{I}_m + \frac{1}{2V_m}\int\limits_{V'_m} (\vec{x}'_m\vec{f}'_{mm} + \vec{f}'_{mm}\vec{x}'_m)dV' +\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{V_m}G\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{N}\left(M_n\left(\frac{\widehat{I}_m}{|\vec{R}^0_{mn}|^3}-3\frac{\vec{R}^0_{mn}\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^5}\bullet\widehat{I}_m\right)\right). \tag{8}$$

Так как $\vec{f}_{mm}=-\vec{f}'_{mm}$ как и все внутренние силы, то, сложив уравнения (7) и (8), получим:

$$\langle\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_m\rangle=\frac{1}{2V_m}\frac{d^2\widehat{\mathbf{i}}_m}{dt^2}+\frac{1}{V_m}\vec{\Omega}_m\times\frac{d\widehat{\mathbf{i}}_m}{dt}+\frac{1}{2V_m}\vec{\Omega}_m\times(\vec{\Omega}_m\times\widehat{\mathbf{i}}_m)+$$
$$+\frac{1}{2V_m}\frac{d\vec{\Omega}_m}{dt}\times\widehat{\mathbf{i}}_m+\frac{1}{V_m}\vec{\Omega}_m\times(\Omega_m\times\widehat{I}_m)+\frac{1}{V_m}\frac{d\vec{\Omega}_m}{dt}\times\widehat{I}_m+$$
$$+\frac{1}{V_m}G\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{N}\left(M_n\left(\frac{\widehat{I}_m}{|\vec{R}^0_{mn}|^3}-3\frac{\vec{R}^0_{mn}\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^5}\bullet\widehat{I}_m\right)\right). \tag{9}$$

Уравнение (9) устанавливает связь тензора средних напряжений $\langle\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_m\rangle$ в теле V_m с его тензором инерции $\widehat{I}_m$ и вектором угловой скорости вращения $\vec{\Omega}_m$ в отсчетном состоянии, с возмущением тензора инерции $\widehat{\mathbf{i}}_m$, вектором взаимного положения $\vec{R}^0_{mn}$ всех тел и массами тел $M_n(n\neq m)$.

Из уравнения (9) следует, что собственная гравитация тела не влияет на тензор средних напряжений и среднее давление в материале тела. Это значит, что напряжения и давление изменяют знак внутри тела таким образом, что интеграл от них по объему тела равен нулю. Равенство нулю среднего давления означает, что под действием собственной гравитации в неоднородном деформируемом теле реализуются как области сжатия, так и области растяжения его материала. Такой же результат следует из решения внутренней задачи о деформировании упругого одородного шара под действием его собственной гравитации [2].

3. Средние напряжения в Земле

Рассмотрим принятую ранее модель Земли, для которой [1]:

$$\boldsymbol{\rho}=\rho(|\vec{x}|),\quad \widehat{J}=J\widehat{1},\quad \widehat{I}=0,\quad d\vec{\Omega}/dt=0, \tag{10}$$

где J – первый инвариант тензора инерции $\widehat{J}=\frac{1}{M}\int\limits_V\rho(|\vec{x}|^2\widehat{1}-\vec{x}\vec{x})dV$.

В рамках этой модели Земля и другие тела в отсчетном состоянии являются шарами с центрально-симметричным распределением плотности внутри каждого из тел.

Из формул (9) и (10) следует, что тензор средних напряжений в принятой модели Земли равен

$$\langle\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_m\rangle=\frac{1}{2V_m}\frac{d^2\widehat{\mathbf{i}}_m}{dt^2}+\frac{1}{V_m}\vec{\Omega}_m\times\frac{d\widehat{\mathbf{i}}_m}{dt}+\frac{1}{2V_m}\vec{\Omega}_m\times(\vec{\Omega}_m\times\widehat{\mathbf{i}}_m). \tag{11}$$

Тензор средних напряжений в Земле зависит от вектора угловой скорости вращения Земли в отсчетном состоянии, возмущения тензора инерции и его производных по времени. Сила собственной гравитации Земли и приливообразующие силы в явном виде не влияют на тензор средних напряжений в Земле. Это значит, что эти силы вызывают в Земле напряжения, средние по объему, значения которых равны нулю.

Далее анализ уравнения (11) удобно провести в декартовой системе координат $\{o, x_1, x_2, x_3\}$:

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \frac{d^2 \mathbf{i}_{ij}}{dt^2} + \frac{1}{V} \delta_{ikp} \Omega_k \frac{d\mathbf{i}_{pj}}{dt} + \frac{1}{2V} \delta_{iql} \Omega_q \delta_{lkp} \Omega_k \mathbf{i}_{pj}. \tag{12}$$

Здесь $i, j, k, l, p, q = 1, 2, 3$, δ_{ij} – симметричный единичный тензор Кронекера, а δ_{ijk} – антисимметричный единичный тензор Леви-Чевита. Тензор Кронекера $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Тензор Леви-Чевита определяется следующим образом: $\delta_{ijk} = 1$, если значения индексов i, j, k образуют четную перестановку из 1,2,3; $\delta_{ijk} = -1$, если значения индексов i, j, k образуют нечетную перестановку из 1,2,3; $\delta_{ijk} = 0$, если какие-либо два индекса совпадают. Таким образом, отличные от нуля компоненты тензора Леви-Чевита равны: $\delta_{123} = \delta_{312} = \delta_{231} = 1$, $\delta_{132} = \delta_{213} = \delta_{321} = -1$. Числовые значения компонент тензора Леви-Чевита удобно рассчитывать из формулы $\delta_{ijk} = (i-k)(j-k)(k-i)/2$. Компонента $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ определяет силу, которая действует вдоль оси координат с индексом j на площадке, внешняя нормаль к которой направлена вдоль оси координат с индексом i. В уравнении (12) и далее опущен номер тела, а по всем значениям повторяющихся индексов производится суммирование.

Пусть система координат $\{o, \vec{x}\}$ ориентирована так, что только компонента вектора угловой скорости $\Omega_3 \neq 0$.

В этом случае уравнение (12) принимает вид:

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 \mathbf{i}_{ij}}{dt^2} + \delta_{i3p} \Omega_3 \frac{d\mathbf{i}_{pj}}{dt} + \frac{1}{2} \delta_{i3l} \Omega_3 \delta_{l3p} \Omega_3 \mathbf{i}_{pj} \right). \tag{13}$$

В формуле (13), сделав вычисления, получим:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma}_{ij} \rangle &= \frac{1}{V} \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 \mathbf{i}_{ij}}{dt^2} + \Omega_3 \left(\delta_{i31} \frac{d\mathbf{i}_{1j}}{dt} + \delta_{i32} \frac{d\mathbf{i}_{2j}}{dt} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \Omega_3 \Omega_3 (\delta_{l32} \mathbf{i}_{1j} - \delta_{l31} \mathbf{i}_{2j}) \right), \end{aligned} \tag{14}$$

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \frac{1}{2V} \left(\frac{d^2 \mathbf{i}}{dt^2} - \Omega_3 \Omega_3 (\mathbf{i}_{11} - \mathbf{i}_{22}) \right), \tag{15}$$

$$\mathrm{Dev}\langle\boldsymbol{\sigma}_{ij}\rangle = \frac{1}{V}\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\mathbf{i}_{ij}}{dt^2} - \frac{\delta_{ij}}{6}\frac{d\mathbf{i}}{dt^2} + \Omega_3\left(\delta_{i31}\frac{d\mathbf{i}_{1j}}{dt} + \delta_{i32}\frac{d\mathbf{i}_{2j}}{dt}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\Omega_3\Omega_3(\delta_{l32}\mathbf{i}_{1j} - \delta_{l31}\mathbf{i}_{2j}) + \frac{1}{6}\Omega_3\Omega_3(\mathbf{i}_{11} + \mathbf{i}_{22})\delta_{ij}\right). \qquad (16)$$

Как и следует, $\mathrm{Tr}(\mathrm{Dev}) = 0$.

Заметим, что в жидком теле $\mathrm{Dev}\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle = 0$, а единственной интегральной характеристикой напряженного состояния является среднее давление $\langle\mathbf{p}\rangle$.

Формулы (14)–(16) позволяют оценить величину интегральных характеристик напряженного состояния Земли.

Сделаем эту оценку в случае квазистатического движения материала Земли. В этом случае из формул (14)–(16) получим:

$$\langle\boldsymbol{\sigma}_{ij}\rangle = \frac{1}{2V}\Omega_3\Omega_3(\delta_{l32}\mathbf{i}_{1j} - \delta_{l31}\mathbf{i}_{2j}), \qquad (17)$$

$$\langle\mathbf{p}\rangle = -\frac{1}{2V}\Omega_3\Omega_3(\mathbf{i}_{11} + \mathbf{i}_{22}), \qquad (18)$$

$$\mathrm{Dev}\langle\boldsymbol{\sigma}_{ij}\rangle = \frac{1}{2V}\Omega_3\Omega_3\left(\delta_{l32}\mathbf{i}_{1j} - \delta_{l31}\mathbf{i}_{2j} + \frac{\delta_{ij}}{3}(\mathbf{i}_{11} + \mathbf{i}_{22})\right). \qquad (19)$$

При современной точности измерений полярный момент инерции $C = \mathbf{I}_{33} = 8.04\,10^{44}\,\mathrm{г\,см^2}$, экваториальные моменты инерции $A \approx B = \mathbf{I}_{11} \approx \mathbf{I}_{22} = 8.01\,10^{44}\,\mathrm{г\,см^2}$, а недиагональные компоненты тензора инерции можно считать ненаблюдаемыми величинами, т.е. $\mathbf{I}_{12} = \mathbf{I}_{13} = \mathbf{I}_{23} = 0$.

Таким образом, с учетом реальной ситуации, из формул (17)–(19) следует, что в квазистатическом приближении не равны нулю следующие интегральные характеристики напряженного состояния Земли:

$$\begin{aligned}
\langle\boldsymbol{\sigma}_{11}\rangle &= -\frac{1}{2V}\Omega_3\Omega_3\mathbf{i}_{11},\\
\langle\boldsymbol{\sigma}_{22}\rangle &= -\frac{1}{2V}\Omega_3\Omega_3\mathbf{i}_{22},\\
\langle\mathbf{p}\rangle &= -\frac{1}{2V}\Omega_3\Omega_3(\mathbf{i}_{11} + \mathbf{i}_{22});
\end{aligned} \qquad (20)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dev}\langle\boldsymbol{\sigma}_{11}\rangle &= -\frac{1}{2V}\Omega_3\Omega_3(2\mathbf{i}_{11} + \mathbf{i}_{22}),\\
\mathrm{Dev}\langle\boldsymbol{\sigma}_{22}\rangle &= -\frac{1}{2V}\Omega_3\Omega_3(\mathbf{i}_{11} + 2\mathbf{i}_{22}),\\
\mathrm{Dev}\langle\boldsymbol{\sigma}_{33}\rangle &= \frac{1}{2V}\Omega_3\Omega_3(\mathbf{i}_{11} + \mathbf{i}_{22}).
\end{aligned}$$

Так как в отсчетном состоянии $I_{11} = I_{22} = I_{33} = (\mathbf{I}_{11} + \mathbf{I}_{22} + \mathbf{I}_{33})/3$, тогда $\mathbf{i}_{11} = \mathbf{I}_{11} - I_{11}$, $\mathbf{i}_{22} = \mathbf{I}_{22} - I_{22}$. Объем Земли $V = 1.10\,10^{27}$ см^3, а угловая скорость вращения $\Omega = 7.29\,10^{-5}$ 1/с. Таким образом, из (20) следует, что порядки величин возмущения тензора инерции Земли и средних напряжений в ней равны:

$$\mathbf{i} \sim 10^{42} \text{ гсм}^2, \quad \langle\boldsymbol{\sigma}\rangle \sim -\frac{1}{2\mathrm{V}}\Omega^2\mathbf{i} \sim 10^6 \text{ дин/см}^2$$

Известно, что порядок величины модулей упругости материала Земли $\mathbf{c} \sim 10^{12}$дин/см^2. Сравнив величину средних напряжений в Земле с величиной модулей упругости ее материала, получим: $\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle/\mathbf{c} \sim 10^{-6}$.

4. Баланс механической энергии в массивном вращающемся деформируемом теле

Найдем уравнение баланса механической энергии из линейного уравнения (2) внутренней задачи динамики массивного вращающегося деформируемого тела. Каждая величина в таком уравнении баланса энергии должна быть определена с той же погрешностью, что и соответствующая величина в уравнениях движения (1), (2). Это значит, что уравнение баланса энергии в таком теле будет справедливо с некоторой погрешностью. Несмотря на это, оно позволит сравнить влияние различных силовых воздействий на движения материала Земли.

В инерциальной системе координат $\{0, \vec{X}\}$ уравнение (2) представим в виде:

$$\rho_m \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{W}}_m}{\partial t_X} = \nabla \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_m + \vec{f}_{mm} + \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m}}^{N} \vec{f}_{mn}\,, \tag{21}$$

где $\vec{\mathbf{W}} = \partial\vec{\mathbf{X}}/\partial t_X$, $\vec{\mathbf{X}} = \vec{X}^0 + \vec{\mathbf{x}}$, $\vec{\mathbf{x}} = \vec{x} + \vec{\mathbf{u}}$. Дифференцирование по времени осуществляется в системе координат $\{0, \vec{X}\}$.

Используем метод моментов. Умножив вектор $\vec{\mathbf{W}}_m$ скалярно на обе части уравнения (21), получим:

$$\rho_m \vec{\mathbf{W}}_m \bullet \frac{\partial \vec{\mathbf{W}}_m}{\partial t_X} = \vec{\mathbf{W}}_m \bullet (\nabla \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}}) + \vec{\mathbf{W}}_m \bullet \vec{f}_{mm} + \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m}}^{N} \vec{\mathbf{W}}_m \bullet \vec{f}_{mn}. \tag{22}$$

Проинтегрировав уравнение (22) по объему V_m тела, получим:

$$\int\limits_{V_m} \rho\vec{\mathbf{W}} \bullet \frac{\partial \vec{\mathbf{W}}}{\partial t_X} dV = \int\limits_{V_m} \vec{\mathbf{W}} \bullet (\nabla \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}}) dV +$$

$$+ \int\limits_{V_m} \vec{\mathbf{W}} \bullet \vec{f}_{mm}\, dV + \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m}}^{N} \int\limits_{V_m} \vec{\mathbf{W}}_m \bullet \vec{f}_{mn}. \tag{23}$$

Преобразуем левую часть в формуле (23). Примем во внимание, что $\vec{\mathbf{W}} \bullet (\partial \vec{\mathbf{W}}/\partial t_X) = \frac{1}{2}\partial(\vec{\mathbf{W}} \bullet \vec{\mathbf{W}})/\partial t_X$, а так как объем V тела не зависит от времени, то производную по времени можно вынести за знак интеграла. В результате получим:

$$\int\limits_{V_m} \rho \vec{\mathbf{W}} \bullet \frac{\partial \vec{\mathbf{W}}}{\partial t_X} dV = \frac{\partial}{\partial t_X} \left(\frac{1}{2} \int\limits_{V_m} \rho \vec{\mathbf{W}} \bullet \vec{\mathbf{W}} dV \right). \tag{24}$$

Подставим в правую часть формулы (24) $\vec{\mathbf{W}} = \vec{W}^0 + \vec{\mathbf{w}}$, где $\vec{W}^0 = \partial \vec{X}^0/\partial t_X$, а $\vec{\mathbf{w}} = \partial \vec{\mathbf{x}}/\partial t_X$. Примем во внимание, что величину $\vec{W}^0$ можно вынести из-под знака интеграла, а $\int\limits_V \rho \vec{\mathbf{W}} dV = \frac{\partial}{\partial t_X} \int\limits_V \rho \vec{\mathbf{x}} dV = 0$. В результате получим:

$$\int\limits_{V_m} \rho \vec{\mathbf{W}} \bullet \frac{\partial \vec{\mathbf{W}}}{\partial t_X} dV = \frac{\partial}{\partial t_X} \left(\frac{1}{2} M_m \vec{W}^0_m \bullet \vec{W}^0_m \right) + \frac{\partial}{\partial t_X} \left(\frac{1}{2} \int\limits_{V_m} \rho \vec{\mathbf{w}} \bullet \vec{\mathbf{w}} dV \right). \tag{25}$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части формулы (23). Так как $\vec{\mathbf{W}} \bullet (\nabla \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}}) = \nabla \bullet (\vec{\mathbf{W}} \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}}) - (\nabla \vec{\mathbf{W}}) \bullet\bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}}$, то

$$\int\limits_V \vec{\mathbf{W}} \bullet (\nabla \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}}) dV = \int\limits_V \nabla \bullet (\vec{\mathbf{W}} \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}}) dV - \int\limits_V (\nabla \vec{\mathbf{W}}) \bullet\bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}} dV.$$

В правой части последней формулы первый интеграл преобразуем в интеграл по поверхности тела. Этот интеграл равен нулю, в силу условия (3) на поверхности тела. Таким образом,

$$\int\limits_V \vec{\mathbf{W}} \bullet (\nabla \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}}) dV = - \int\limits_V (\nabla \vec{\mathbf{W}}) \bullet\bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}} dV.$$

Подставим $\vec{\mathbf{W}} = \vec{W}^0 + \vec{\mathbf{w}}$ в правую часть последней формулы. Примем во внимание, что $\nabla \vec{W}^0 = 0$, а операторы ∇ и $\partial/\partial t$ можно поменять местами. В результате получим:

$$\int\limits_{V_m} \vec{\mathbf{W}} \bullet (\nabla \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}}) dV = - \int\limits_{V_m} \left(\frac{\partial}{\partial t_X} \nabla \vec{\mathbf{x}} \right) \bullet\bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}} dV. \tag{26}$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части формулы (23). Примем во внимание, что $\vec{\mathbf{W}} = \vec{W}^0 + \mathbf{w}$, $\vec{W}^0$ можно вынести за знак интеграла, а главный вектор сил собственной гравитации тела

$\vec{F}_{mm} = \int\limits_{V_m} \vec{f}_{mm} dV = 0$. В результате получим:

$$\int\limits_{V_m} \vec{\mathbf{W}} \bullet \vec{f}_{mm} dV = \int\limits_{V_m} \vec{\mathbf{w}} \bullet \vec{f}_{mm} dV. \tag{27}$$

Сделав аналогичные преобразования с третьим слагаемым в правой части формулы (23), получим:

$$\int\limits_{V_m} \vec{\mathbf{W}}_m \bullet \vec{f}_{mn} dV = \vec{W}_m^0 \bullet \int\limits_{V_m} \vec{f}_{mn} dV + \int\limits_{V_m} \vec{\mathbf{w}}_m \bullet \vec{f}_{mn} dV \tag{28}$$

Сделанные преобразования (24)–(28) позволяют записать уравнение (23) в виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t_X}\left(\frac{1}{2} M_m \vec{W}_m^0 \bullet \vec{W}_m^0\right) + \frac{\partial}{\partial t_X}\left(\frac{1}{2}\int\limits_{V_m} \rho \vec{\mathbf{w}} \bullet \vec{\mathbf{w}} dV\right) = \\
&= -\int\limits_{V_m} \left(\frac{\partial}{\partial t_X} \nabla \vec{\mathbf{x}}\right) \bullet \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}}) dV + \\
&+ \int\limits_{V_m} \vec{\mathbf{w}} \bullet \vec{f}_{mm} dV + \vec{W}_m^0 \bullet \vec{F}_{mN} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{N} \int\limits_{V_m} \vec{\mathbf{w}} \bullet \vec{f}_{mn} dV,
\end{aligned} \tag{29}$$

где $\vec{F}_{mN} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{N} \int\limits_{V_m} \vec{f}_{mn} dV$ – главный вектор внешних гравитационных сил.

В уравнении (29) выделим в явном виде величины, которые связаны с вращением тела и взаимным перемещением точек его материала.

Преобразуем подынтегральное выражение во втором слагаемом левой части уравнения (29):

$$\begin{aligned}
&\rho \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t_X} \bullet \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t_X} = \rho \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t_X} \bullet \left(\frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{\mathbf{x}}\right) = \rho \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t_X} \bullet \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t} + \rho \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t_X} \bullet (\vec{\Omega} \times \vec{\mathbf{x}}) = \\
&= \rho \left(\frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{\mathbf{x}}\right) \bullet \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t} + \rho \vec{\Omega} \bullet \left(\vec{\mathbf{x}} \times \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t_X}\right) = \\
&= \rho \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t} \bullet \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t} + \rho \vec{\Omega} \bullet \left(\vec{\mathbf{x}} \times \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t}\right) + \rho \vec{\Omega} \bullet \left(\vec{\mathbf{x}} \times \left(\frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{\mathbf{x}}\right)\right) = \\
&= \rho \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t} \bullet \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t} + 2\rho \vec{\Omega} \bullet \left(\vec{\mathbf{x}} \times \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t}\right) + \rho \vec{\Omega} \bullet (\vec{\mathbf{x}} \times (\vec{\Omega} \times \vec{\mathbf{x}})).
\end{aligned}$$

Известно, что $\vec{\mathbf{x}} \times (\vec{\Omega} \times \vec{\mathbf{x}}) = \vec{\Omega} \bullet (|\vec{\mathbf{x}}|^2 \widehat{1} - \vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{x}})$. Таким образом,

$$\rho \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t_X} \bullet \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t_X} = \rho \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t} \bullet \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t} + \vec{\Omega} \bullet (\vec{\Omega} \bullet \rho(|\vec{\mathbf{x}}|^2 \widehat{1} - \vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{x}})).$$

Так как $\vec{\mathbf{x}} = \vec{x} + \vec{\mathbf{u}}$, а $\partial x / \partial t = 0$, то

$$\rho \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t} \bullet \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t} = \rho \frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial t} \bullet \frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial t} + \vec{\Omega} \bullet (\vec{\Omega} \bullet \rho(|\vec{x}|^2 \widehat{1} - \vec{x}\vec{x})) +$$
$$+ \vec{\Omega} \bullet (\vec{\Omega} \bullet \rho((\vec{\mathbf{u}} \bullet \vec{x} + \vec{x} \bullet \vec{\mathbf{u}}) \widehat{1} - (\vec{\mathbf{u}}\vec{x} + \vec{x}\vec{\mathbf{u}}))) + \vec{\Omega} \bullet (\vec{\Omega} \bullet \rho(|\vec{\mathbf{u}}|^2 \widehat{1} - \vec{\mathbf{u}}\vec{\mathbf{u}})).$$

Подставим эту формулу под знак соответствующего интеграла в левой части уравнения (29). После интегрирования в тензоре инерции пренебрежем слагаемыми, которые пропорциональны $\mathbf{u}^2$. В результате получим:

$$\int\limits_{V_m} \rho \vec{\mathbf{w}} \bullet \vec{\mathbf{w}} dV = - \int\limits_{V_m} \rho \frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial t} \bullet \frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial t} dV +$$
$$+ M_m \vec{\Omega}_m \bullet \widehat{J}_m \bullet \vec{\Omega}_m + M_m \vec{\Omega}_m \bullet \widehat{\mathbf{j}}_m \bullet \vec{\Omega}_m. \qquad (30)$$

Преобразуем подынтегральное выражение в первом слагаемом правой части уравнения (29). Примем во внимание, что операторы ∇ и $\partial / \partial t_X$ можно поменять местами, $\vec{\mathbf{x}} = \vec{x} + \vec{\mathbf{u}}$, а $\partial \vec{\mathbf{x}} / \partial t = 0$. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t_X} \nabla \vec{\mathbf{x}} = \nabla \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t_X} = \nabla \left(\frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{\mathbf{x}} \right) =$$
$$= \nabla \frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla(\vec{\Omega} \times \vec{x}) + \nabla(\vec{\Omega} \times \vec{\mathbf{u}}) = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \vec{\mathbf{u}} + \vec{\Omega} \times (\nabla \vec{x}) + \vec{\Omega} \times (\nabla \vec{\mathbf{u}}).$$

Так как $\nabla \vec{x} = \widehat{1}$ есть симметричный тензор, то $\vec{\Omega} \times \widehat{1} = 0$, а

$$\frac{\partial}{\partial t_X} \nabla \vec{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \vec{\mathbf{u}} + \vec{\Omega} \times (\nabla \vec{\mathbf{u}}).$$

Таким образом,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_X} \nabla \vec{\mathbf{x}} \right) \bullet \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla \vec{\mathbf{u}} \right) \bullet \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}} + (\vec{\Omega} \times (\nabla \vec{\mathbf{u}})) \bullet \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}}.$$

Тензор дисторсии $\nabla \vec{\mathbf{u}}$ можно единственным образом представить в виде суммы $\nabla \vec{\mathbf{u}} = \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \widehat{\boldsymbol{\omega}}$, где $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ есть симметричный тензор деформаций, а $\widehat{\boldsymbol{\omega}}$ есть антисимметричный тензор локального поворота. Так как $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$ есть симметричный тензор, то $\frac{\partial \widehat{\boldsymbol{\omega}}}{\partial t} \bullet \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}} = 0$, а

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \vec{\mathbf{u}} = \frac{\partial \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial t}.$$

В результате получим:

$$\int\limits_V \left(\frac{\partial}{\partial t_X}\nabla\vec{\mathbf{x}}\right)\bullet\bullet\widehat{\boldsymbol{\sigma}}dV = \int\limits_V \frac{\partial\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial t}\bullet\bullet\widehat{\boldsymbol{\sigma}}dV + \vec{\Omega}\times\bullet\int\limits_V \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}\bullet\widehat{\boldsymbol{\sigma}}dV. \qquad (31)$$

Преобразуем подынтегральное выражение во втором слагаемом в правой части уравнения (29):

$$\vec{\mathbf{w}}\bullet\vec{f}_{mm} = \frac{\partial\vec{\mathbf{x}}}{\partial t_X}\bullet\vec{f}_{mm} = \left(\frac{\partial\vec{\mathbf{x}}}{\partial t} + \vec{\Omega}\times\vec{\mathbf{x}}\right)\bullet\vec{f}_{mm} =$$
$$= \frac{\partial\vec{\mathbf{u}}}{\partial t}\bullet\vec{f}_{mm} + (\vec{\Omega}\times\vec{x})\bullet\vec{f}_{mm} + (\vec{\Omega}\times\vec{\mathbf{u}})\bullet\vec{f}_{mm} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathbf{u}}\bullet\vec{f}_{mm}) - \vec{\mathbf{u}}\bullet\frac{\partial\vec{f}_{mm}}{\partial t} + \vec{\Omega}\times(\vec{x})\bullet\vec{f}_{mm} + \vec{\Omega}\bullet(\vec{\mathbf{u}})\times\vec{f}_{mm}.$$

Подставим эту формулу под знак интеграла во второе слагаемое в правой части уравнения (29), примем во внимание, что $\partial\vec{f}_{mm}/\partial t = 0$ и главный момент сил собственной гравитации $\vec{M}_{mm} = \int\limits_{V_m}\vec{x}\times\vec{f}_{mm}dV = 0$. В результате получим:

$$\int\limits_{V_m}\vec{\mathbf{w}}\bullet\vec{f}_{mm}dV = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V_m}\vec{\mathbf{u}}\bullet\vec{f}_{mm}dV + \vec{\Omega}_m\bullet\int\limits_{V_m}\vec{\mathbf{u}}\times\vec{f}_{mm}dV. \qquad (32)$$

Сделаем соответствующие преобразования в подынтегральном выражении в четвертом слагаемом правой части уравнения (29):

$$\vec{\mathbf{w}}\bullet\vec{f}_{mn} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathbf{u}}_m\bullet\vec{f}_{mn}) + \vec{\Omega}\bullet(\vec{x}_m + \vec{f}_{mn}) + \vec{\Omega}\bullet(\vec{\mathbf{u}}_m\times\vec{f}_{mn}).$$

Получившуюся формулу подставим под знак интеграла. В результате получим:

$$\int\limits_{V_m}\vec{\mathbf{w}}_m\bullet\vec{f}_{mn}dV = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V_m}\vec{\mathbf{u}}\bullet\vec{f}_{mn}dV +$$
$$+\vec{\Omega}_m\bullet\int\limits_{V_m}\vec{x}_m\times\vec{f}_{mn}dV + \vec{\Omega}\bullet\int\limits_{V_m}\vec{\mathbf{u}}_m\times\vec{f}_{mn}dV. \qquad (33)$$

Подставим формулы (30)–(33) в уравнение (29). В результате получим:

$$\frac{\partial}{\partial t_X}\Big(\frac{1}{2}M_m\vec{W}^0_m\cdot\vec{W}^0_m\Big)+\frac{\partial}{\partial t_X}\left(\frac{1}{2}\int\limits_{V_m}\rho\frac{\partial\vec{\mathbf{u}}}{\partial t}\bullet\frac{\partial\vec{\mathbf{u}}}{\partial t}dV\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial t_X}\Big(\frac{1}{2}M_m\vec{\Omega}_m\bullet\widehat{J}_m\bullet\vec{\Omega}_m\Big)+\frac{\partial}{\partial t_X}\Big(\frac{1}{2}M_m\vec{\Omega}_m\bullet\widehat{j}_m\bullet\vec{\Omega}_m\Big)=$$
$$=\vec{W}^0_m\bullet\vec{F}_{mn}-\int\limits_{V_m}\frac{\partial\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial t}\bullet\bullet\widehat{\boldsymbol{\sigma}}dV-\vec{\Omega}\times\bullet\int\limits_{V_m}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}\bullet\widehat{\boldsymbol{\sigma}}dV+$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V_m}\vec{\mathbf{u}}\bullet\vec{f}_{mm}dV+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V_m}\vec{\mathbf{u}}_m\bullet\vec{f}_{mn}dV+\vec{\Omega}_m\bullet\int\limits_{V_m}\vec{\mathbf{u}}\times\vec{f}_{mm}dV+$$
$$+\vec{\Omega}_m\bullet\int\limits_{V_m}\vec{\mathbf{u}}\times\vec{f}_{mn}dV+\vec{\Omega}_m\bullet\int\limits_{V_m}\vec{x}_m\times\vec{f}_{mn}dV. \qquad (34)$$

Рассмотрим левую часть уравнения (34). Первое слагаемое есть изменение в единицу времени кинетической энергии орбитального движения тела. Второе слагаемое есть изменение в единицу времени собственно кинетической энергии материала тела. Третье слагаемое есть изменение в единицу времени той части кинетической энергии, которая обусловлена вращением тела в отсчетном состоянии. Четвертое слагаемое есть изменение в единицу времени той части кинетической энергии вращения тела, которая связана со способностью материала тела деформироваться.

Таким образом, левая часть уравнения (34) есть изменение в единицу времени полной кинетической энергии массивного вращающегося деформируемого тела.

Рассмотрим правую часть уравнения (34). Первое слагаемое есть работа внешних гравитационных сил на изменении в единицу времени положения центра масс тела в пространстве. Второе и третье слагаемые связаны с изменением в единицу времени так называемой внутренней энергии материала вращающегося тела. Если тело упругое, то второе слагаемое есть точно изменение в единицу времени внутренней энергии. Четвертое и пятое слагаемые есть изменения в единицу времени работ соответствующих объемных сил на перемещениях материала невращающегося тела. Шестое и седьмое слагаемые есть изменения в единицу времени работ соответствующих объемных сил на перемещениях материала вращающегося тела. Восьмое слагаемое есть изменение в единицу времени работы внешних гравитационных сил на изменении положений точек материала (т.е. масс элементарных объемов) при вращении тела в отсчетном состоянии.

Таким образом, правая часть уравнения (34) есть сумма мощностей различных силовых воздействий на массивное вращающееся деформируемое тело.

Уравнение баланса энергии (34) устанавливает следующий факт: изменение в единицу времени полной кинетической энергии массивного вращающегося деформируемого тела равно сумме мощностей различных силовых воздействий на это тело.

Второе слагаемое в правой части уравнения (34) описывает возможную диссипацию энергии. Механизм диссипации энергии определяется реологической моделью материала тела.

Если $\vec{\Omega} = 0$, то уравнение (34) есть уравнение баланса энергии в невращающемся теле. Если $\mathbf{\vec{u}} = 0$, а следовательно и $\hat{\mathbf{j}} = 0$, то уравнение (34) есть уравнение баланса энергии недеформируемого тела, которое вращается относительно своего центра масс.

5. Баланс механической энергии в Земле

Рассмотрим баланс энергии в принятой модели Земли (10).

Для этой модели уравнение (29) имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t_X}\Big(\frac{1}{2}M_m\vec{W}^0_m \bullet \vec{W}^0_m\Big)+\frac{\partial}{\partial t_X}\left(\frac{1}{2}\int\limits_{V_m}\rho\frac{\partial\mathbf{\vec{u}}}{\partial t}\bullet\frac{\partial\mathbf{\vec{u}}}{\partial t}dV\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial t_X}\Big(\frac{1}{2}M_m|\vec{\Omega}|^2J\Big)+\frac{\partial}{\partial t_X}\Big(\frac{1}{2}M_m\vec{\Omega}_m\bullet\hat{j}_m\bullet\vec{\Omega}_m\Big)=$$
$$=\vec{W}^0_m\bullet\vec{F}_{mn}-\int\limits_{V_m}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial t}\bullet\bullet\hat{\boldsymbol{\sigma}}dV-\vec{\Omega}\times\bullet\int\limits_{V_m}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\bullet\hat{\boldsymbol{\sigma}}dV+$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V_m}\mathbf{\vec{u}}\bullet\vec{f}_{mm}dV+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V_m}\mathbf{\vec{u}}_m\bullet\vec{f}_{mn}dV+\vec{\Omega}_m\bullet\int\limits_{V_m}\mathbf{\vec{u}}\times\vec{f}_{mm}dV+$$
$$+\vec{\Omega}_m\bullet\int\limits_{V_m}\mathbf{\vec{u}}\times\vec{f}_{mn}dV+\vec{\Omega}_m\bullet\int\limits_{V_m}\vec{x}_m\times\vec{f}_{mn}dV, \qquad (35)$$

где угловая скорость $\vec{\Omega}$ не зависит от времени.

Используем уравнение (35) для оценки влияния различных силовых воздействий на движения материала Земли. Численные значения основных характеристик Земли были приведены выше.

В уравнении (35) каждое из слагаемых есть изменение в единицу времени соответствующей величины. В качестве этой характерной единицы времени целесообразно выбрать период $T = 1/|\vec{\Omega}|$ вращения Земли

вокруг своего центра масс. Заметим, что, оставаясь только в рамках уравнения (35), невозможно оценить величины вторых слагаемых в левой и правой частях этого уравнения.

Из уравнения (35) следует, что величина изменения в единицу времени кинетической энергии вращения Земли в отсчетном состоянии равна $K^{\mathrm{rot}}/T \sim \Omega^2 I/T$. Из уравнения (35) следует, что величина изменения в единицу времени той части кинетической энергии вращения, которая обусловлена способностью ее материала деформироваться, равна $\mathbf{k}^{\mathrm{rot}}/T \sim \Omega^2\mathbf{i}/T$. Таким образом, $\mathbf{k}^{\mathrm{rot}}/K^{\mathrm{rot}} \approx 10^{-2}$, т.е. мощность, которая обусловлена способностью материала вращающейся Земли деформироваться, существенно меньше той мощности, которая реализуется при вращении Земли как недеформируемого тела.

Четвертое слагаемое в правой части уравнения (35) есть изменение в единицу времени работы силы собственной гравитации невращающейся Земли на перемещениях ее материала. Это слагаемое равно $\mathbf{p}_{sg} \sim \mathbf{u}GM^2/(Tr^2)$. Шестое слагаемое в правой части уравнения (35) есть изменение в единицу времени работы силы собственной гравитации вращающейся Земли на перемещениях ее материала. Это слагаемое равно $\mathbf{p}^{\mathrm{rot}}_{sg} \sim \mathbf{u}GM^2/r^2$. Отношение $\mathbf{p}^{\mathrm{rot}}_{\mathrm{grav}}/\mathbf{p}_{\mathrm{grav}} \approx 1$.

Пятое слагаемое $\mathbf{p}_{\mathrm{eg}}$ в правой части уравнения (35) есть изменение в единицу времени работы внешних гравитационных сил на перемещениях материала невращающейся Земли. Седьмое слагаемое $\mathbf{p}^{\mathrm{rot}}_{\mathrm{eg}}$ в правой части уравнения (35) есть изменение в единицу времени работы внешних гравитационных сил на перемещениях материала вращающейся Земли. Отношение $\mathbf{p}^{\mathrm{rot}}_{\mathrm{eg}}/\mathbf{p}_{\mathrm{eg}} \approx 1$.

Так как величина главного вектора внешних гравитационных сил $F \sim G\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{N}(M_m M_n)/R^2_{mn}$, то $\mathbf{p}_{\mathrm{eg}} \approx \mathbf{p}^{\mathrm{rot}}_{\mathrm{eg}} \sim \mathbf{u}\Omega F_{\mathrm{eg}}$.

Найдем отношение $\mathbf{p}_{sg}/\mathbf{p}_{\mathrm{eg}}$ для пар: Земля($\oplus$)–Солнце($\odot$) и Земля($\oplus$)–Луна ($\circ$).

Масса Солнца $M_\odot \approx 2.00 \cdot 10^{23}$ г, а его расстояние до Земли $R_{\oplus\odot} \approx$ $\approx 1.50 \cdot 10^{13}$ см. Масса Луны $M_\circ \approx 7.30 \cdot 10^{25}$ г, а ее расстояние до Земли $R_{\oplus\circ} \approx 3.84 \cdot 10^{10}$ см.

Подставим эти численные значения в соответствующие формулы. В результате получим:

$$\mathbf{p}_{\oplus\oplus}/\mathbf{p}_{\oplus\odot} \sim M_\oplus R^2_{\oplus\odot}/(M_\odot r^2_\oplus) \approx 10^3, \quad \mathbf{p}_{\oplus\oplus}/\mathbf{p}_{\ominus\circ} \approx 10^5.$$

Это значит, что воздействие силы собственной гравитации Земли на перемещения ее материала существенно больше аналогичного воздействия внешних гравитационных сил.

Восьмое слагаемое в правой части уравнения (35) есть изменение в единицу времени работы внешних гравитационных сил на изменении

положения (относительно $\{o, \vec{x}\}$) точек Земли при ее вращении в отсчетном состоянии $p_{\text{eg}} \sim rM/T$. Найдем отношение $\mathbf{p}_{\text{eg}}/p_{\text{eg}}$. Примем во внимание, что численные значения главного момента и главного вектора внешних гравитационных сил совпадают, т.е. $M \approx F$. Отношение $\mathbf{p}_{\text{eg}}/p_{\text{eg}} \sim \mathbf{u}/r \ll 1$, т.е. воздействие внешних гравитационных сил на перемещения точек материала Земли существенно меньше воздействия этих сил на изменение положения точек недеформируемой Земли относительно ее центра масс.

Приведенные оценки показывают, что во многих задачах геодинамики (за исключением теории приливов) Землю можно считать массивным вращающимся деформируемым телом и не учитывать ее взаимодействие с другими телами.

Эти оценки подтверждают правомерность приближений, которые были использованы Х. Киношита для решения задачи определения ориентации Земли в пространстве в рамках модели недеформируемого тела [6,7].

Основные результаты и выводы

Для простейшей модели Земли установлена связь тензора средних напряжений в Земле с вектором угловой скорости ее вращения и возмущением тензора инерции. Получено уравнение баланса энергии в этой модели Земли. Оценены величины компонент тензора средних напряжений в Земле и мощности различных силовых воздействий на Землю.

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

1. Собственная гравитация Земли и приливообразующие силы вызывают в материале Земли напряжения, средние по объему Земли значения которых равны нулю.

2. Вращение Земли может существенно влиять на перемещения ее материала и должно приниматься во внимание в задачах глобальной геодинамики.

3. В задаче определения ориентации Земли в пространстве (внешняя задача) допустимо считать Землю вращающимся недеформируемым телом, которое взаимодействует с другими телами в соответветствии с законом тяготения.

4. В задачах описания движений материала Земли (внутренняя задача за исключением теории приливов) целесообразно считать Землю массивным вращающимся деформируемым телом, не взаимодействующим с другими телами.

Работа выполнена при поддержке Международного научно-технического центра (проект N 1538).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воевода О.Д.* Об уравнениях движения Земли // Проблемы динамики литосферы и сейсмичности. М.: ГЕОС, 2001. С.278–296. (Вычисл. сейсмология; Вып.32).
2. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
3. *Getino J.* Elastic energy of deformable Earth: general expression // Celest. Mech. Dynamical Astron. 1992. Vol.53. P.11–36.
4. *Dahlen E.A.* Theoretical global seismology. Prinston: Prinston Univ. Press., 1998. 1025 p.
5. *Мориц Г., Мюллер А.* Вращение Земли: Теория и наблюдения. Киев: Наук. думка, 1992. 512 с.
6. *Kinoshita H.* Theory of the rotation of the rigid Earth // Celest. Mech. 1977. Vol.15. P.277–326.
7. *Kinoshita H., Souchay J.* The theory of the nutation of the rigid Earth. Model of the second order // Celest. Mech. Dynamical Astron. 1990. Vol.48. P.187–265.